대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 3, 543 ~ 565. Sep 2014

수학논술을 활용한 수업에서 나타나는 수학적 과정 분석 : 확률과 통계 영역을 중심으로

김 규 상* · 이 재 학** · 이 광 호***

본 연구는 학생들의 수학논술 교수·학습과정에서 나타나는 수학적 과정과 관련된 여러 가지 특징들을 조사하고 수학 학습에서 학생 개개인에게 나타나는 긍정적인 변화를 분석하여, 수학논술이 '수학적 과정'을 학습하도록 하는 교수·학습활동의 대안이 될 수 있음을 확인하는데 목적이 있다. 이를 위해, 수학논술 과제를 개정 수학과 교육과정의 확률과 통계 영역 분류에 따라 재구성 하였고, 고등학교 3학년 학생 8명을 대상으로 하여 수업을 실시한 후 수학적 과정 요소를 중심으로 분석하였다. 그 결과 수학적 문제해결, 추론, 의사소통과 관련한 다양한 특징들이 나타났으며, 특히 수학논술 과제가 학생들의 일반적으로 나타날 수 있는 수학적 과정과 관련한 특징뿐만 아니라 보다 발생가능성이 낮은 특징들 또한 나타나도록 하는데 도움이 됨을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

논술은 우리나라의 중등교육에 있어서 교육과정상의 이론적 논의가 아직 제대로 이루어지지 않음에도 불구하고 이미 교육 현장의 주된 이슈가 되고 있다. 각 대학은 여러 형태의 논술고사를 입학전형에 중요한 전형요소로 반영하면서 고등학교 교육과정 속에서도 공식적이든 비공식적이든 논술이 대학의 당락을 결정하는 요소로 여겨지고 있다. 대학에서 논술을 입시전형의 주요한 요소로 삼겠다는 의도는 대학 나름대로 우리나라의 입시제도상의 문제점을 보완하려는 의도가 있다고 판단되나, 교수·학습활동의 측면으로 바라보면, 중등 교육에서의 논술교육은 그 자체로서 우리나라 초·중등교육이 가지고 있는 지식위주의 암기식 교육을 극복하고 시대 변화에 맞는 창의적 교육을 가능하게 하는 긍정적이고 발전적인 측면을 가지고 있다고 할 수 있다. 그런데, 학교교육에서는 논술교육이 갖는 의미가 중요하고 사회적으로 이미 주목을 받고 있음에도 불구하고 이에 대한 체계적인 연구와 대응이 적극적으로 모색되고 있지 못한 것이 현실이다.

이와 때를 맞추어 교육과학기술부에서는 「2009 개정 교육과정 총론」을 발표하고 이에 따른 교과 교육과정의 개정을 추진하였으며, 결국 2011년에 2011 개정 수학과 교육과정이 공시되었다. 특히, 2011 개정 수학과 교육과정에서 강조하고 있는 내용 중 하나가 수학적 과정의 강화이다. 이런 수학적 과정은 2007년 개정 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수·학습방법'에서 강조되었지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 못했다는 한계점을 드러내기도

* 한국교원대학교 대학원, marcus77@sen.go.kr (제1 저자)
** 한국교원대학교, jaelee@knue.ac.kr (교신저자)
*** 한국교원대학교, parasol@knue.ac.kr

하였다. 결국 2011 개정 교육과정에서의 '수학적 과정'의 재강조는 수학적 과정과 관련된 측면들을 더욱 적극적으로 분명하게 다루고자 하는 의도를 가지고 있다고 판단할 수 있다. 그럼에도 불구하고, 이번 2011 개정 수학과 교육과정에서도 고등학교의 경우에는 교육과정 문서상에 '수학적 과정'을 고려, 반영하고 있지 않아 구체적인 교수·학습 방법 또한 제시되지 못하여 학교 현장에서는 많은 혼란이 예상된다.

이에 본 연구는 수학논술을 활용한 수업에서 나타나는 사례들을 연구하여 학생들의 수학논술 교수·학습과정에서 나타나는 수학적 과정과 관련된 여러 가지 특징들을 조사하고 수학논술이 '수학적 과정'과 관련된 다양한 특징들을 나타내도록 하는 교수·학습활동의 한 방안이 될 수 있음을 확인하고자 한다.

Ⅱ. 수학적 과정의 국내·외 논의

1. 수학과 교육과정에서의 수학적 과정

김도한 외(2009)의 「창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구」에서는 우리나라 학생들에게 취약한 수학적 사고 과정과 수학적 사고 활동을 학교수학에서 더욱 적극적으로 지도하기 위한 방안으로서 수학적 과정이라는 영역을 신설하고 구체적인 성취기준을 제시할 것을 제안하였다. 김도한 외(2009)에서 정의하는 수학적 과정은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 이로부터 수학적 과정이 내용 영역과 '다른 차원'으로 그리고 '모종의 능력'으로 정의되었음을 확인할 수 있다. 내용 영역과 '다른 차원'의 의미는 내용 영역과 '별개로' 또는 내용 영역을 '초월하여' '다양한 현상 또는 상황'에서 수학을 적용할 수 있는 기회를 가져야 한다는 것을 의미한다. 또한, '모종의 능력'을 전통적으로 강조해오던 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등을 구성 요소로 설명함으로써, '다른 차원'이지만 완전히 새로운 것이 아니라 이미 각 내용 영역에서 얼마간 추구해왔던 목표를 강조하고 있다. 그러므로 김도한 외(2009)에서의 수학적 과정은 기존에 강조해오던 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 보다 직접적으로 그리고 명시적으로 강조하기 위한 개념으로 이해할 수 있다. 특히, 수학적 과정 관련 능력 요소를 성취기준과 평가기준에 반영할 것을 제안함으로써, 강조의 입장을 견고하게 한 것으로 볼 수 있다.

황선욱 외(2011)의 「창의 중심의 미래형 수학과 교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구」는 김도한 외(2009)의 연구의 후속 연구로, 선행 연구에서 구축된 수학과 교육과정의 체제나 방향 그리고 철학을 기반으로 하여 수학교육의 주요 이슈를 반영하고, 몇몇 사안들을 발전적으로 수정·보완한 바를 반영하는 방식으로 진행되었다. 황선욱 외(2011)의 연구에서 정의하는 수학적 문제해결, 추론, 의사소통의 의미는 다음과 같다. '수학적 문제해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 기지의 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등

을 수학적 표현수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다.

다시 말해, 학생들 스스로 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결하고자 할 때, 나타나는 모든 일련의 과정을 수학적 과정이라 말 할 수 있다.

물론 넓은 의미에서 위와 같은 과정들은 실제로 어떠한 문제 상황이 주어지더라도 조금이나마 반드시 나타나는 능력들이다. 결국 교육과정에서 수학적 과정을 강조하는 이유는 문제를 학생들에게 많이 제공하여 수학적 과정과 관련된 요소들을 많이 나타나게 하는 것이라기보다, 어떠한 교수학습활동에서 학생들에게 수학적 과정과 관련한 요소들이 잘 나타나는 지를 확인하고, 그런 활동들을 학생들에게 계속해서 제공하고자 함이다.

2. 국제 학업성취도 평가에서의 수학적 과정

가. PISA에서의 수학적 소양

PISA는 의무 교육과정이 끝나는 학생들을 대상으로 이들이 건전한 민주 시민으로서 사회에서 생활하는데 있어서 얼마나 잘 준비되었는지를 평가하고자 한다. 따라서 PISA는 학생들이 구체적인 학교 교육과정을 얼마나 잘 숙달했는지에 대해서 판단하려하기보다는 실세계에서 그들의 지식과 기술을 사용할 수 있는 능력에 초점을 두고 있다(OECD, 2009). PISA는 이와 같은 능력을 소양이라고 부르고 있으며, 따라서 소양을 측정하는 것이 PISA의 목적이라고 할 수 있다.

PISA에서 평가하고자 하는 소양은 각 교과의 단편적인 지식을 수용하여 단순하게 재생산하는 능력이 아니라, 각 교과의 핵심 개념에 대한 풍부한 이해를 바탕으로 다양한 상황에 적절하게 활용할 수 있는 능력을 뜻한다(노국향 외, 2001). 또한 수학적 소양은 다양한 상황에서 수학 문제를 제시하고 형식화하고 해결하고 해석함으로써, 여러 가지 아이디어를 효율적으로 분석하고 추론하고 의사소통을 하는 학생들의 능력과 관련되는 개념이다(이미경 외, 2004, p.21).

PISA에서 제시하는 수학적 소양의 정의는 PISA 2000, PISA 2003, 그리고 PISA 2012로 나아가면서 조금씩 변화하였다. 수학적 소양은 수학을 실세계와 관련짓는 능력, 수학을 활용하는 능력, 수학을 구성하는 능력 등으로 점차 확대되었다.

나. TIMSS에서의 수학적 과정

TIMSS 연구의 주목적은 연구 참가국 학생들의 수학과 과학성취도를 국제적인 수준에서 파악하고, 이전의 연구들과의 추이 변화를 비교하고, 수학과 과학 성취도의 변화에 영향을 미치는 관련 변인들과의 관계를 포괄적으로 파악함으로써, 각 국의 교육 정책 수립과 교육의 질 개선에 도움이 되는 정보를 제공하는 것이다.

TIMSS에서 수학적 과정은 행동 영역 또는 인지 영역에서 일부로 다루어지고 있다. 특히, TIMSS 2007, 2011에서 적용하기와 추론하기로 구분되고 있는 능력 요소에서 구성 또는 모델링 등 유사한 강조점을 확인할 수 있다(이미경 외, 2005).

앞서 살펴본 PISA와 달리 TIMSS는 학습이 충실하게 이루어졌는지 살펴보는 데 초점을 두고 있기 때문에, 실생활에 적용하거나 다양한 맥락에서 추론하는 이른바, 소양이나 역량의 이름 아래 다루어졌던 능력 요소를 특별히 강조하지 않는다. 비록 비정형적인 문제를 해결하는 능력을 살펴보지만 그것은 일부 평가 요소일 뿐, 근본적으로 지향하는 평가 요소는 아니다. 그러므로 TIMSS는 PISA와 달리 수학적 창의성을 과도하게 강조하는 입장도 아니고, 정의적 영역의 평가

를 포함하지도 않은 것으로 보인다(정상권 외, 2011, 재인용).

결국 국제 학업성취도 평가를 비교해 본 결과 각 평가가 바라보는 수학과 과정에 대한 입장은 평가의 목적에 따라 강조하거나 축소되는 경향을 나타내기는 하지만, 조금이나마 수학적 과정에 대한 강조점을 확인할 수 있었고, 수학과 교육과정의 평가영역에서 또한 강조점을 두고 있음을 알 수 있었다. 그러므로 수학적 과정을 강조하고 있는 상황에서 수학논술 과제가 수학적 과정 요소들이 나타나도록 하는 적절한 도구가 될 수 있는지를 확인해 보고자 한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

본 연구에서는 서울특별시 송파구 소재의 J고등학교 3학년 학생들 중 담당 수학교사와의 논의를 거쳐 아래 두 가지 조건을 만족하는 학생 8명을 연구대상자로 선정하였다.

첫째, 수학논술 문항에 제시되는 내용이 확률과 통계 전 영역에 걸쳐 있으므로, 확률과 통계 영역의 기본적인 수학적 개념을 습득하였지만, 확률과 통계 단원을 좋아하지 않는 학생들로 구성하는 것이 적당하다고 판단하였다. 이에 조건에 맞는 고등학교 3학년 학생들로 구성하였다.

둘째, 연구에 참여할 의사가 있으며, 수학논술에 관심이 있는 학생들로 구성하였다. 본 연구에서 사용한 수학논술 문제를 해결하도록 시도하기 위해서는 기본적으로 수학논술에 대한 관심과 흥미가 필요하다. 관심과 흥미를 가지지 못한 학생의 경우 학생들에게는 기존의 수학문제보다 더 어렵게 느껴져 결국 의미 있는 시사점을 도출해 낼 수 없을 가능성이 높기 때문이다.

학생들의 수학교과 수준은 한국교육과정평가원에서 실시한 대학수학능력시험 6월 모의평가 결과로 평가하였으며, 수리(가)형 백분위점수 89점 이상을 상위권, 77～89점을 중상위권, 50～77점을 중위권으로 나타내었다.

다음은 학생과의 면담, 담당 수학교사의 평상시 수업 태도 관찰 결과를 토대로 학생들의 성향과 수학에 대한 생각, 수학논술에 대한 생각을 정리한 것이다. 등장하는 이름은 가명을 사용하였다.

가희

과학중점과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 상위권이며 밝고 활발한 성격을 지닌 여학생이다. 중학교 2학년까지 미국에서 학교를 다녔으며, 한국학교와 미국학교를 동시에 경험한 이유로 다양한 수업방법에 대한 거부감이 적었으며, 호기심이 많고 지적욕구가 강하여 평소에도 많은 발문을 하였다. 수학적 지식에 대한 많은 오류들을 가지고 있었으나 이는 한국어로 의사소통을 할 때 의미의 전달을 이해하는데 어려움을 느끼고 있는 것이 하나의 원인이기도 하였고, 성취욕구가 강하여 스스로 깊게 생각하며 진지하게 문제를 해결하려는 태도를 지니고 있었다. 중학교 3학년 때, 강동교육청 영재교육원(물리)을 수료하였다. 수학논술을 접해본 기회는 이번이 처음이었으며, 수학논술을 어려운 수학문제 정도로 인식하고 있었고 대학 입학에 도움이 될까? 하는 막연한 기대감을 가지고 실험에 참여하였다.

서현

자연과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 중상위권이며 심성은 조용하고 신중한 성격을 지닌 여학생이다. 수학을 중학교까지는 별 어려움 없이 느끼다가 고등학교에 진학하면서부터 수학을 어렵고 힘든 과목으로 느끼기 시

작하였고, 특히 확률과 통계 단원을 많이 힘들어 하고 있었다. 수학을 잘 하고자 하는 욕구가 강하며, 학원을 비롯하여 하루의 많은 시간을 수학 공부에 할애하고 있었다. 차분하고 꾸준하게 자신의 생각을 말과 글로 잘 표현하며, 여러 방향으로 문제를 해결하려고 노력하는 편이다. 수학논술을 처음 접해본 것은 2학년 겨울방학이었으며, 수학논술을 통해 교과서에서 배웠던 내용의 심화과정을 학습하기를 바라고 있었고, 이를 통해 대학교 수시모집에서도 좋은 결과를 얻기를 희망하고 있었다.

소연

자연과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 상위권이며 차분하고 꾸준히 자신의 생각을 표현하려고 노력하는 여학생이다. 평소에 수학 관련서적을 많이 접하였고, 학원을 비롯하여 하루의 많은 시간을 수학공부에 할애하고 있었으며, 수학공부 자체는 좋아하나, 맞고 틀리는 것에 민감하게 반응하는 경향을 나타내었다. 주어진 문제에 대해 깊게 사고하여 근거를 확실히 제시하려고 노력하였고, 익숙한 문제유형은 자신감을 가지고 해결하나, 새로운 유형의 문제에는 어려움을 보이고 자신의 생각을 논리적으로 설명하지 못하는 경향을 나타내었으며, 역시 확률 단원을 가장 싫어하였다. 수학논술을 처음 접해본 것은 2학년 겨울방학이었으며, 문제를 잘 풀어내지 못할 것이라는 걱정에 처음에는 망설였으나, 대학 입시에서 수학논술이 중요한 부분을 차지할 것 같은 막연한 불안감과 어려운 수학문제를 풀 때 나는 할 수 있다는 자신감을 조금이나마 얻기 위해 수학논술에 관심을 갖게 되었다.

동현

과학중점과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 중상위권이며 착하고 밝은 성격을 지닌 남학생이다. 수학보다는 과학과목에 더 흥미를 가지고 있으며 수학을 별 어려움 없이 느끼기는 하지만, 복잡한 혼합 계산을 귀찮아하고 있었고, 계획을 세워 학습을 하는 노력이 약간은 부족해 보였다. 나는 수학을 충분히 잘 할 수 있다고 믿는 자아성취감은 매우 높은 편이었으며, 수학수업에 함께 참여해서 발문을 하는 것에 긍정적인 반응과 적극적인 태도를 나타내었다. 중학교 3학년 때, 강동교육청 영재교육원(물리)을 수료하였다. 수학논술을 처음 접해본 것은 2학년 여름방학 이었으며, 수학논술의 소재로서 제시되는 흥미로운 내용들과 그 속에 숨어있는 수학적인 개념을 학습하기를 희망하여 수학논술에 관심을 가지게 되었다.

성훈

자연과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 중위권이며 조용하고 성실한 태도를 보이는 남학생이다. 수학을 복잡하다고 생각하여 힘들어하기도 하였으나 흥미로움을 느끼고 수학에 대해 긍정적으로 생각하려고 노력하는 학생이다. 학교와 학원에서 수학을 배우고 있으며 본인 스스로 계획성 있게 수학학습을 해나가고 있었다. 정형화된 문제는 무리 없이 잘 해결하나 익숙하지 않은 형태의 문제에는 어려움을 느끼고 자신 있게 도전하는 태도가 조금은 부족하였다. 특히 확률과 통계 문제를 어려워하였으며, 수학논술을 접해본 기회는 이번이 처음이었고, 수학논술에 대한 두려움을 많이 느끼고 있었지만, 다른 친구들도 많이 수학논술을 공부하고 있어서 자신도 공부를 해야 되지 않을까? 하는 불안감에 의해 실험에 참여하게 되었다.

석현

과학중점과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 상위권이며 말수가 적고 수줍음을

많이 타는 남학생이다. 수학과 과학에 대해 관심이 많아 관련 서적을 찾아 자주 접하는 편이었으며, 실험을 할 수 있다는 점에서 과학을, 다양한 유형의 문제들이 있고, 문제의 정답은 하나뿐이며, 문제를 풀어냈을 때의 느낌을 좋아한다는 점에서 수학을 좋아하는 과목으로 생각하였다. 문제에 대해 깊이 사고하며 문제풀이에서 근거를 확실히 제시하려고 노력하였으나, 말로서는 자신의 생각을 표현하는데 익숙하지 않은 모습을 보였다. 수학논술은 2학년 여름방학부터 동현이와 함께 시작하였으며, 마찬가지로 수학논술의 소재로서 제시되는 흥미로운 내용들과 그 속에 숨어있는 수학적인 개념을 학습하기를 희망하여 수학논술에 관심을 가지게 되었다.

재민

과학중점과정을 이수하고 있는 남학생으로 수학교과 수준은 중상위권이며 쾌활하고 매사에 적극적이며 자신의 생각을 자유롭게 표현하는 편이다. 주장에 대한 근거를 확실하게 제시하려고 노력하지만, 상대방의 반박에도 쉽게 수긍해버리는 모습을 나타내기도 하였다. 수학교과를 재미있지만 어려운 과목으로 인식하고 있었고, 계획을 세워 학습을 하는 노력이 약간은 부족해 보였다. 그러나 정형화된 문제보다 새로운 유형의 문제에 더 많은 관심을 보이고 풀어낼 때까지 도전하는 과제집착력은 뛰어난 편이었다. 수학논술을 처음 접해본 것은 2학년 여름방학 이었으며, 수능시험을 통해 대학교에 진학하는 것보다 수학논술 시험을 보고 대학교에 입학하는 것이 자신의 성향을 볼 때 더 유리할 것 같아 일찍부터 수학논술에 관심을 가지게 되었다.

지호

과학중점과정을 이수하고 있는 학생으로 수학교과 수준은 상위권이며 매사에 적극적이고 자신감이 넘치는 남학생이다. 수학 교과에 관심이 많고, 문제해결력 또한 우수하며, 나는 수학을 잘한다는 자아성취감이 매우 높았다. 학교와 학원에서 수학을 배우고 있으며 수능시험에 맞춰 체계적으로 공부를 해나가고 있는 학생이다. 수학논술을 처음 접해본 것은 2학년 여름방학 이었으며, 최상위권 대학에 진학을 위해서는 수학논술이 필요할 것 같다는 판단을 하였고, 학교 교육과정에서 제시되지 않는 다양한 심화 내용들을 수학논술을 통해 학습할 것이라는 기대감이 결합하여 수학논술에 관심을 가지게 되었다.

2. 과제 구성 기본 방향

우선 연구 참여자와의 인터뷰를 통해 각 영역에서 참여자들이 어려워하는 내용이나 관심 있는 내용들을 확인하여 그와 관련한 주제들을 수학논술 문제의 주제로 택하였다. 그리고 박배훈 · 류희찬 · 이기석(1998)의 연구를 토대로 수학적 과정 학습을 위한 수업 전략을 도출하였다. 이렇게 도출된 내용을 토대로 수학적 과정 학습을 위한 수업 전략을 기초로 하는 수학논술 과제를 개발하였다. 박배훈 외(1998)의 연구에서 도출한 수업전략은 아래와 같다.

첫째, 다양한 수학적 표현을 요구하는 과제를 포함하였다. 수학적 표현은 수학 내용을 표현하는 다양한 기호나 다이어그램, 구체적인 그림, 그래프, 식, 표 등의 물리적인 대상뿐만 아니라 수학을 행하는 주체의 정신적 실체인 이미지, 관념 등을 의미한다. 한 개념에 대한 다양한 표현을 구성하고 전환하는 능력은 성공적인 학습에 있어서 매우 중요하다.

둘째, 학생들이 자유롭게 자신의 생각을 발표하고 반박하고 정당화 하는 사회적 상호작용이 중요하다. 학생들에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있는 과제 또한 중요하다. 따라서 이런

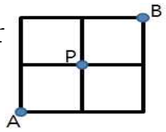
상황을 불러일으킬 수 있는 요소로 인지갈등 유발을 고려하였다. 인지갈등을 유발할 수 있는 과제는 학생들에게 타인과의 사회적 상호작용을 유발하며, 호기심과 혼자 계속해서 문제를 해결해 가는 상황을 유지시키는데 효과적이다. Piaget의 이론에 의하면, 인지적 불균형은 반영적 추상화를 강조한 재구성의 원천이 되며, 갈등을 일으키는 학습상황은 수학 학습의 원동력이 된다(우정호, 2000).

셋째, 수업에 잠재적으로 이용될 수 있으며, 수학적으로 덜 발달된 학생들도 그 나름대로 문제 해결의 일정단계를 수행할 수 있는 상황을 만들기 위해, 과제의 시작은 고등학교 수학과 교육과정의 틀을 벗어나지 않도록 구성하였다. 그리고 공부를 잘 하는 학생은 계속해서 탐구할 수 있는 문제를 제시하기 위해, 교육과정을 벗어나는 내용은 수학 논술 지문을 활용해 자세히 설명하도록 하였으며, 이를 통해 학생들의 상상력 및 창의성을 자극하여 확산적 사고가 가능하도록 구성하였다.

3. 수학논술 문항 개발

선행연구에서 이경화(1996)는 확률개념은 그 의미가 애매하여 이해하기 어려움을 지적하고, 교사에게 학생들의 사전 경험을 바탕으로 하여 적극적으로 불합리한 판단과 전략을 조정해 가면서 지도할 것을 주장하였고, 심리학 분야에서 다루어진 확률에 관한 오개념이 학생들의 반응과 어떻게 관련되는 지 확인해 볼 필요가 있음을 강조하였다.

연구 참여자들 또한 인터뷰에서 모두 학습 영역 중에서 확률과 통계 영역을 가장 어려워하고, 싫어한다고 대답하였다. 그 이유로 구한 답이 정답인지 다른 영역들 에 비해 확실하게 알 수 없어서, 내가 구한 답에 자신이 없어서, 구한 답이 왜 정답인지 다른 사람에게 명확하게 설명하기 힘들어서, 계산을 하고 나면 꼭 중복해서 세었거나, 빼먹은 것 같은 불안감이 들어서, 내 직관과 다른 결론이 나는 경우가 종종 있어서 등을 들었다. 실제로 사전에 학생들에게 다음과 같은 문제를 제시했을 때,

> 오른쪽 그림과 같은 길이 있다. A지점에서 출발한 민지가 최단거리로 B지점까지 간다고 할 때, P지점을 거쳐 갈 확률을 구하시오.
>
> 
>

모든 학생들은 확률을

$$\frac{P\text{점을지나가는경로의수}}{A\text{에서}B\text{까지가는전체경로의수}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$ 으로

계산하였다. 그런데 이 문제는 민지가 지나가는 모든 지점에서 오른쪽으로 갈지, 위로 갈지에 대한 가능성이 항상 일정하지 않으므로 실제 확률은 P점을 지나가는 경로의 수 총 4가지, 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$이므로 $4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$로 계산하는 것이 맞다. 이는 각 경우가 모두 같은 정도로 일어난다고 기대할 수 있을 때라는 전제조건을 만족시키지 못했음에도 불구하고, 실제로 경우의 수만을 가지고 계산한 오류를 범하고 있었다.

또한 많은 학생은 $a < c$이고 $b < d$일 때, $a+b \geq c+d$가 되는 현상이 실제로 확률을 계산할 때 나타날 수 있음을 알고 있었지만, 자신의 직관에 비추어보았을 때는 의아해 하는 모습을 보였다. 그리고 실제로 사회현상에서도 이러한 역설이 자주 나타난다는 사실에 흥미로워 했으며, 왜 이러한 현상이 발생하게 되는지 그 이유에 대해서 궁금해 하였다.

마지막으로 조건부 확률에서 많은 어려움을 느끼고 있었다. 많은 학생들이 폐암에 걸린 환자들 중에서 80%가 담배를 핀다는 명제를 제시하였을 때, 담배를 피우면 80%의 확률로 폐암에

걸릴 것이라고 생각하고 담배를 피우면 안 되겠다고 대답하였다. 이런 현상은 연구 참여자 중에서도 나타났고, 조건부 확률에서 표본공간을 잘못 인식하는 오류를 범하고 있었다.

이에 선행연구 및 인터뷰 내용을 토대로 본 연구를 위한 과제를 개발하였고, 개발된 수학논술 과제는 부록에 제시하였다. 이 때, 수학논술 과제의 신뢰성, 타당성 및 적용가능성을 높이기 위해 개발된 자료를 가지고 서울 소재 J, K, T 고등학교 3학년 학생 5명을 대상으로 예비실험을 실시하였고, 10년 이상의 교육 경력을 가지고 있으며, 고3 지도 경력 3년 이상, 수리논술 수업 또한 3년간 계속적으로 진행하고 있는 베테랑 교사들에 의해 문항 검토가 진행되었다. 수학논술 문항은 교육과정 내에서 학생들의 흥미를 갖도록 하기에 적절하지만, 평가를 위한 문항이 아니고 수업을 통해 학생들에게 이해시키기 위한 목적이라면, 제시문을 통해 보다 자세한 설명을 제공해 주어 학생들 스스로 어느 정도 이해할 수 있도록 문항을 수정하는 것이 필요하다는 지적 및 학생들에게 충분히 생각할 시간을 주는 것이 바람직하다는 지적을 받아, 이를 본 수업에 반영하였다.

4. 본 수업

예비실험을 실시하여 나온 문제점을 수정ㆍ보완하여 180분짜리 수업을 실시하였다. 본 수업에서는 120분 동안 수학논술 문제를 풀도록 하였고, 남은 60분 동안 자신이 풀어낸 내용을 가지고 다른 친구들과 토론을 할 수 있도록 하였다. 답안지에는 문제해결과정을 상세히 기술하도록 독려하였으며, 자신의 생각을 충분히 표현할 수 있도록 최대한 자유로운 분위기에서 문제를 해결하도록 하였다. 문제해결과정에서 교사의 개입은 없었으며 학생들은 진지한 태도로 참여하였다.

5. 자료수집

본 연구에서 수집한 자료는 교사의 관찰기록지, 교수실험 녹화자료, 학생 답안지이다. 연구자는 교수실험에서 학생들의 학습활동에 적극적으로 개입하지 않은 채 학생들의 토론활동 시에는 사회자로서의 역할을 하여 참여 관찰하였으며, 매 차시 학생들의 수행을 관찰기록지에 기록하였다. 모든 교수실험과정은 비디오로 녹화하고 이를 전사하여 분석 자료로 사용하였다.

6. 자료 분석 및 분석틀

이 연구에서는 수학논술 교수ㆍ학습 자료를 학생들에게 적용하였을 때 나타나는 수학적 과정을 분석하기 위한 것으로 학생들의 대화와 수업상황을 녹화한 동영상 파일, 학생들이 작성한 답안지, 연구자가 수업 중에 메모해 둔 관찰기록을 토대로 분석하였다.

수학적 과정 분석을 위해 본 연구에서 가장 핵심이 되는 부분은 수학적 과정의 3가지 구성 요소에 대해 다시 하위 능력 요소를 추출하는 것이다. 이 세분화된 하위 능력 요소들이 결국 분석의 중요한 기준이 될 것이기 때문이다. 본 연구에서는 정상권(2012)외 4명의 ‘과정 중심의 수학 교과 평가방안 연구’에서 도출해 낸 수학적 과정 평가 요소를 기준으로 하여 학생들에게서 나타난 수학적 과정을 분석하였다. 자세한 수학적 과정 요소별 하위 능력 평가 세부 요소 및 대응되는 약어들은 <표 Ⅲ-1>와 같다.

<표 Ⅲ-1> 수학적 과정 요소별 하위 능력 평가 세부 요소

	수학적 과정의 평가 세부 요소	약어
문	실세계 상황에서 수학적 문제를 구성하기	P1

제해결	다른 교과 관련 상황에서 수학적 문제를 구성하기	P2
	문제를 수학적 기호, 그림을 사용하여 다시 표현하기	P3
	문제해결에 필요한 조건의 확인 또는 보완하기	P4
	문제해결에 적절한 형태로 표현을 변환하기	P5
	문제해결에서 사용되는 개념들 간의 연결성을 인식하고 활용하기	P6
	문제해결에서 적절한 전략을 활용하여 문제를 해결하기	P7
	문제해결 과정과 결과의 타당성을 수학적인 방법으로 점검하기	P8
	문제해결을 위한 다양한 전략 또는 방법을 찾기	P9
	관련된 문제를 만들기	P10
	문제해결 전략 또는 결과를 새로운 문제에 적용하기	P11
	실세계 상황에서 주어진 문제를 해결하기	P12
	다른 교과 상황에서 주어진 문제를 해결하기	P13
추론	수학적 관계를 파악하기	R1
	수학적 관계를 찾아 표현하기	R2
	수학적으로 추측하기	R3
	수학적 추론에 근거한 정당화 하기	R4
	수학적 추론 과정을 점검하기	R5
	추론 과정과 결과를 해석하거나 평가하기	R6
	추론 과정과 결과를 변환하거나 확장하기	R7
의사소통	수학적 표현을 이해하고 사용하기	C1
	자신의 문제해결 또는 추론 과정을 논리적으로 설명하기	C2
	자신의 문제해결 또는 추론 과정을 반성적으로 점검하여 표현하기	C3
	다른 사람의 문제해결 또는 추론 과정에 대한 설명을 해석하거나 평가하여 표현하기	C4
	문제해결 또는 추론 과정을 수학적인 언어로 표현하기	C5
	문제해결 또는 추론 과정의 표현을 다른 방식으로 변환하기	C6
	문제해결 또는 추론 과정의 표현을 확장 또는 일반화하기	C7

Ⅳ. 결과 및 논의

결과를 분석함에 있어 우선적으로 수학논술 과제에서 제공한 각각의 문제들에 대해 어떠한 수학적 과정 요소들이 나타났는지를 문제별로 조사하였고, 수학적 과정 요소들의 발현여부를 표로 정리하였다. 이 후에는, 수학논술을 활용한 수업에서 나타난 수학적 과정과 관련된 전반적인 특징을 기술하였다. 마지막으로는 실제 전반적으로는 잘 드러나지 않았지만, 한 두 문제에서만 특별하게 나타난 수학적 과정 요소들을 분석하여 설명을 자세히 기술하였다.

수학논술을 활용한 수업에서 나타난 수학적 과정 요소들을 문제별로 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

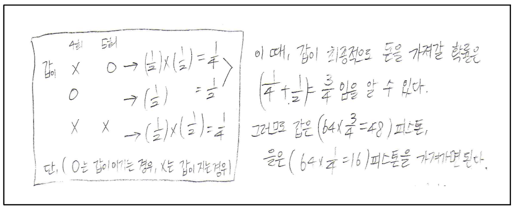
<표 Ⅳ-1> 문제별로 드러난 수학적 과정 요소

	문제1	문제2	문제3	문제4
P1	○		○	
P2				○
P3	○	○	○	○
P4	○	○		
P5	○	○	○	○
P6	○	○		
P7	○	○	○	○
P8	○	○		
P9		○		
P10				○
P11			○	
P12	○		○	
P13				○
R1	○	○		○
R2	○	○		○
R3			○	○
R4	○	○	○	○
R5			○	
R6				○

R7	○			
C1	○	○		○
C2	○	○	○	○
C3	○	○		
C4	○	○	○	○
C5		○		
C6			○	
C7	○			

1. 수학적 문제해결

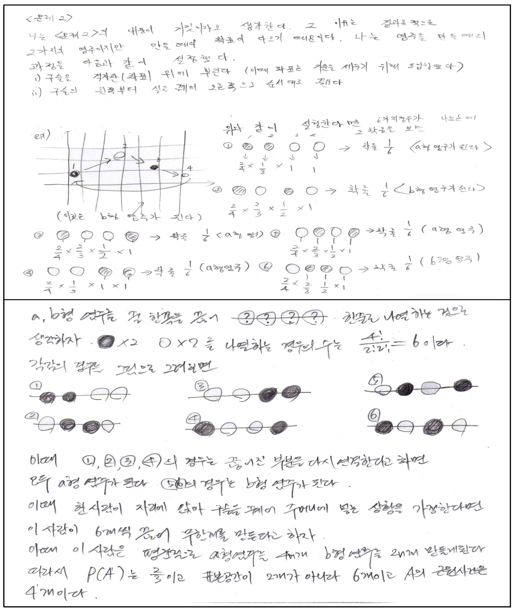
문제1에서 학생들은 [그림 Ⅳ-1]과 같이 도박이라는 실세계에서 나타날 수 있는 상황을 수학적으로 구성하기 위해 A, B가 이길 확률을 $\frac{1}{2}$로 정하고 현재의 멈춰진 상황에서 누가 어떻게 하면 3승을 하여 64피스톨을 가져갈 수 있을지에 집중하였으며, 각각의 경우가 발생할 가능성이 같은 상황임을 고려하여 A가 3승할 확률을 구하고, B가 3승할 확률을 구해, 그 확률의 비율로 64피스톨을 나누어야 한다고 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅳ-1] 드 메레 확률 문제 답안

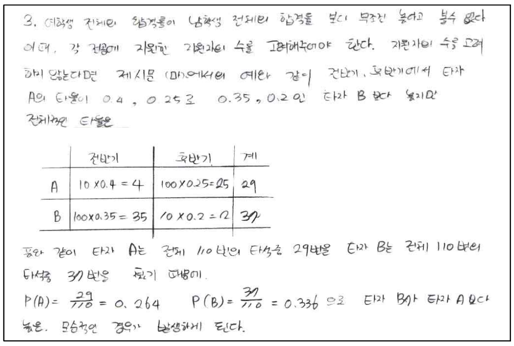
문제2에서 학생들은 [그림 Ⅳ-2]와 같이 제시문에 주어져 있는 내용이 참인지 거짓인지 자신의 주장을 뒷받침하기 위한 근거를 답안 작성과정에 제시하고자 하였다. 특히 모든 학생들은 자신의 문제해결 또는 추론과정을 다른 사람에게 이해시키기 위해 다른 방식으로 해석하려고 노력하였다. 또한 자신의 주장을 구체화하기 위해 기호, 그림을 사용하여 표현하기도 하였다.

특히 한 학생은 구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치할 때 a형 염주가 만들어지는 사건을 실제 상황에서 한 사람이 무한히 염주들을 만드는 상황을 가정하여 주어진 문제를 통계적 확률로 생각하여 해결하기도 하였다.



[그림 Ⅳ-2] 확률의 참 거짓 판별 문제 답안

문제3에서는 모든 학생들이 [그림 Ⅳ-3]과 같이 실제 생활에서 충분히 나타날 수 있는 문제라는 인식을 가지고 흥미롭게 접근하기 시작하였으며, 처음에는 단순하게 두 전공에서 모두 여학생의 합격률이 남학생보다 높았다면, 초등수학전공과 중등수학전공에 지원한 여학생 전체의 합격률은 남학생 전체의 합격률보다 높다고 볼 수 있을 것 같다는 판단을 하였으나, 실제 상황에서는 반대의 경우도 생길 수 있다는 사실을 금방 알아차릴 수 있었고, 학생들의 생각에 따라 다양한 반례들을 제시하기 시작하였다. 이 때, 문제를 표 및 수학적 기호를 사용하여 다시 표현하려 하였으며, 한 학생은 반대의 예를 가진 문제를 만들어 적용해보기도 하였다.



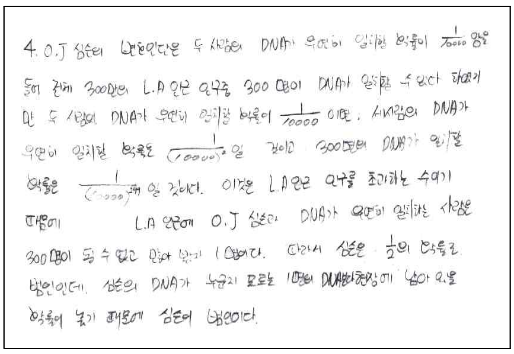
3. 여학생 전체의 합격률이 남학생 전체의 합격률 보다 무조건 높다고 볼수 없다 이때, 각 전공에 지원한 지원자의 수를 고려해주어야 한다. 지원자의 수를 고려하지 않는다면 제시문 (마)에서의 예와 같이 전반기, 후반기에서 타자 A의 타율이 0.4, 0.25로 0.35, 0.2인 타자 B보다 높지만 전체적인 타율은

	전반기	후반기	계
A	$10 \times 0.4 = 4$	$100 \times 0.25 = 25$	29
B	$100 \times 0.35 = 35$	$10 \times 0.2 = 2$	37

표와 같이 타자 A는 전체 110번의 타석중 29번을 타자 B는 전체 110번의 타석중 37번을 쳤기 때문에.
$P(A) = \frac{29}{110} = 0.264$ $P(B) = \frac{37}{110} = 0.336$ 으로 타자 B가 타자 A보다 높은. 모순적인 경우가 발생하게 된다.

[그림 Ⅳ-3] Simpson's Paradox 문제 답안

문제4에서 학생들은 [그림 Ⅳ-4]와 같이 재판 상황에서 흔히 나타날 수 있는 문제라는 인식을 가지고 흥미롭게 접근하기 시작하였으나, 검사 측과 변호사측의 주장을 읽고 난 후 주장 중 옳은 것을 택하는 상황에서는 많이 혼란스러워하는 모습을 보였다. 학생들은 보다 쉽게 문제를 이해할 수 있는 방법들을 찾기 시작하였고, 보다 간단한 문제로 바꾸려는 전략, 또 문제 자체를 간단한 식으로 표현해 보려는 전략들을 사용하여 문제를 구체화하고자 하였다. 이를 통해 학생들은 문제해결과정에서 필요한 적절한 전략을 선택할 수 있는 방법을 학습할 수 있었다. 그리고 결론을 부정하면 어떻게 되는지 확인하려는 시도도 나타났다. 또한 학생들은 긴 말로 설명되어 있는 것을 수학적 기호를 사용하여 다시 표현하려고 하였으며, 반대의 예를 가진 관련 문제를 만들기도 하였다.



4. O.J 심슨이 범인이라는 두 사람의 DNA가 우연히 일치할 확률이 $\frac{1}{10000}$ 임을 들어 전체 300만의 L.A 인근 인구중 300명이 DNA가 일치할 수 있다 하였지만 두 사람의 DNA가 우연히 일치할 확률이 $\frac{1}{10000}$ 이면, 세사람의 DNA가 우연히 일치할 확률은 $\frac{1}{(10000)^2}$ 일 것이고 300명의 DNA가 일치할 확률은 $\frac{1}{(10000)^{299}}$ 일 것이다. 이것은 L.A 인근 인구를 초과하는 수이기 때문에 L.A 인근에 O.J 심슨과 DNA가 우연히 일치하는 사람은 300명이 될 수 없고 많아 봤자 1명이다. 따라서 심슨은 $\frac{1}{2}$의 확률로 범인인데, 심슨의 DNA가 누군지 모르는 1명의 DNA보다 현장에 남아있을 확률이 높기 때문에 심슨이 범인이다.

[그림 Ⅳ-4] 조건부 확률 문제 답안

문제해결 과정을 마친 후 진행된 수업시간에서는 각 문제별로 나타나는 특징적인 수학적 문제해결과정 요소들을 확인할 수 있었다.

가. 문제해결과정과 결과의 타당성을 수학적인 방법으로 점검하기(P8)

특히 문제1에서 학생들은 A와 B가 이길 확률을 어떻게 정할 지에 대해 의문을 가지기 시작하였고, 결국 문제를 해결하기 위해서는 학생들 스스로 A와 B가 이길 확률이 정해져야 함을 알게 되었다. 이 때 학생들은 A와 B의 승률이 똑같이 $\frac{1}{2}$인지, 아니면 기존의 결과를 활용하여 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$인지를 고민하게 되었고, 이와 같은 조건의 확인과 보완이 결국 문제해결 상황에서 중요한 문제임을 학생들 스스로 인식할 수 있었다. 또한 학생들은 자신이 확인했던 조건들을 사용하여 문제를 해결하려는 시도를 하였고, 이 때, 오답자들은 A와 B의 승률을 지금까지 해온 결과를 사용하여 구하려는 시도를 하였으며, 다른 학생들은 이러한 사고가 어떻게 잘못되었는지를 오답자들에게 설명해 주었다. 이를 통해 오답자들은 자신의 사고과정에서 나타난 오류를 확인하고 그 오류를 수정할 수 있었으며, 다른 학생들은 결과의 타당성을 수학적인 방법으로 점검하는 과정 속에서 자신의 사고과정을 보다 정교화시켜 개념에 대한 이해를 확고히 할 수 있었다.

교사 : 64피스톨을 어떻게 나누어 가지면 좋을까요?

성훈 : 그럼 A가 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이고 B가 이길 확률도 $\frac{1}{2}$일 때로 가정하면 B는 두 번 연속 이겨야 하니까 $\frac{1}{2}$의 제곱으로 계산을 했고, 나머지 확률이 A가 이길 확률이므

로 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 로 계산을 했어요.

서현 : 나는 앞의 3게임에서 이기고 진 결과를 이용하여, A가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$, B가 이길 확률을 $\frac{1}{3}$로 생각할 수 있을 것 같아요. 그래서 A가 이길 확률은 $\frac{8}{9}$, B가 이길 확률은 $\frac{1}{9}$일 것 같아요.

가희 : 나는 확률을 안 따지고 경우의 수를 따져서 확률을 구해보았는데, 결국 A는 $\frac{2}{3}$가 되고 B는 $\frac{1}{3}$이 되지 않을까?

지호 : 그런데 만약에 매 회 A가 이길 확률이 $\frac{2}{3}$, B가 이길 확률이 $\frac{1}{3}$이 라면 B가 도박을 시작하려고 했을까? 다시 말해 도박이 시작되었다면, 기본적으로 각자가 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이라고 생각했기 때문에 시작되지 않았을까?

재민 : 그리고 시행의 횟수가 3번 밖에 되지 않는데, 그 결과를 가지고 통계적 확률로 사용 할 수 있을까?

서현 : 가희는 2:1로 나누어야 한다고 했는데, 저는 8:1로 나누어야 한다고 생각했거든요?

재민 : 그런데 단순히 경우의 수라고 하면 A가 이길 확률과 B가 이길 확률을 고려하지 않았으니까 잘못된 것 같아. 경우의 수를 여러 가지로 나누었을 때, 그 각각의 경우가 나올 가능성이 다를 수 있으니까, 확률을 $\frac{(\text{그사건이발생할경우의수})}{(\text{전체의경우의수})}$ 로 할 때는 그 각각의 경우가 발생할 가능성이 같을 때 하는 거고, 여기서는 가능성이 같다는 것을 알 수 없으니까 확률을 $\frac{(\text{그사건이발생할경우의수})}{(\text{전체의경우의수})}$ 로 말할 수 없지 않니?

나. 문제해결을 위한 다양한 전략 또는 방법을 찾기(P9)

문제2의 문제해결과정에서 나타났던 가장 큰 쟁점사항은 $\frac{a\text{형염주가만들어지는갯수}}{\text{전체염주가만들어지는갯수}}$에 대한 계산결과에 대한 해석이었다. 실제로 단순히 계산을 한 결과는 $\frac{1}{2}$임에도 불구하고, 많은 학생들이 이 결과에 대한 해석에서 a형 염주와 b형 염주가 만들어질 가능성에 많은 의심을 가지고 있었다. 그리하여 문제해결을 위한 적절한 형태로 문제를 변형하고자 하였으며, 이 때, 그림, 그래프 등 다양한 수학적 도구들을 활용하여 보다 논리적으로 추론이 가능하도록 다양한 형태로 문제의 변형을 시도하였다. 이렇게 문제해결을 위한 다양한 전략 또는 방법을 찾기 위해 적절한 형태로 표현을 변환에 봄으로써, 학생들은 주어진 다양한 수학적, 발견적 추론을 할 수 있는 기회를 제공받을 수 있었고, 또한 문제 상황을 보다 정교화 할 수 있었다.

동현 : 염주를 만들 때요. 좌표를 만들어요. 염주를 뿌려보면, 일자로 만들 수 있잖아요. 그 때는 생각해보면, A형 염주는 4가지가 나올 것 같고, B형 염주는 2가지가 나올 것 같아요.

재민 : 단적으로 6개만 놓고 본다면 6가지로 만들 수 있는 것이 A형은 4개, B형은 2개이니까 통계적으로 계속 n을 늘려간다고 해도 2:1을 비율을 유지할 것 같아요.

서현 : 저는 가희랑 먼저 이야기를 해 봤는데, 가희는 구슬을 꿰어서 염주를 만드는 과정은 생략하고 이미 만들어진 염주만을 생각했다고 했는데, 저는 구슬을 꿰어서 염주를 만드는 과정까지 생각을 해야 한다고 생각했어요. 실은 원래 일직선이잖아요. 그래서 구슬을 어떻게 집어넣는지를 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 구슬을 어떻게 집어넣는지를 생각을 해보면 A형 염주는 4가지, B형 염주는 2가지가 되는 것 같아요.

지호 : 같은 것이 있는 순열에서 배열할 수 있는

경우의 수는 ${}_4C_2$가지인데, 6가지를 놓고 보면 A형 염주가 4가지, B형 염주가 2가지 만들어 지므로 이와 같은 시행을 계속 반복하면 결국은 2:1의 비율로 A형 염주와 B형 염주가 만들어 질 것 같아요.

다. 관련된 문제 만들기(P10)

문제4에서 가장 재미있었던 특징은 많은 학생들이 이 상황을 보다 간단한 상황으로 만들려고 노력했다는 것이다. 물론 처음에는 문제 상황을 잘 이해하지 못해 간단한 문제 상황으로 만드는 것도 어려워했지만, 문제를 이해하고 난 후 바로 두 명의 학생이 추론과정 및 결과를 변환하여 보다 간단하면서 쉽게 이해할 수 있는 문제로 변형하여 제시하였다. 결국 문제를 구체화 시키는 활동이 간단한 문제를 만들려는 시도로도 나타났고, 이를 통해 다양한 상황으로의 수학적 지식의 확장을 이끌 수 있음을 확인 할 수 있었다.

가희 : 그림 수업시간에 배웠던 폐암 걸린 사람들 중에서 담배를 피울 확률이 80%라고 할 때, 사람들이 담배피면 폐암에 걸릴 확률이 80%이다. 라고 주장하는 것과 같은 오류네요?

지호 : 또 정품과 모조품 가방이 있을 때, 만약 정품은 90%의 확률로 정품으로 판정된다고 하면, 만약 이 가방이 정품이라고 판정되었을 때, 가방이 정품일 확률이 90%라고 말하는 잘못된 예도 있을 것 같아요.

요약하면, 수학논술을 활용한 수업의 문제해결 과정에서는 문제를 수학적 기호, 그림을 사용하여 다시 표현하기, 문제해결에 적절한 형태로 표현을 변환하기, 적절한 전략을 사용하여 문제를 해결하기 등은 거의 모든 문제해결과정에서 나타났다. 또한 문제의 성격에 따라 관련된 문제를 만들기, 문제해결 전략 또는 결과를 새로운 문제에 적용하기, 문제해결 과정과 결과의 타당성을 수학적인 방법으로 검증하기와 같은 개념을 깊게 이해하고 탐구할 때 가능한 특징들 또한 나타났다.

2. 수학적 추론

수학적 추론과 관련하여 문제1에서는 [그림 Ⅳ-1]와 같이 A와 B가 각각 상금을 차지하기 위한 조건은 곧 마지막까지 게임을 실시하였을 때, 이길 가능성에 비례한다는 수학적인 관계를 파악하여, 그 관계를 확률이라는 도구를 이용하여 잘 표현하였다. 또한 각 단계에서 A와 B가 이길 확률을 $\frac{1}{2}$로 수학적으로 추측하였으며, 위의 추론에 근거하여 결국 64피스톨을 3:1의 비율로 나누어야 한다고 수학적으로 정당화하였다.

문제2에서 또한 학생들은 [그림 Ⅳ-2]와 같이 a형 염주와 b형 염주가 만들어질 확률을 계산하기 위해 경우의 수와 확률 사이의 관계를 파악하고 이를 식으로 표현하였다. 이 때, 왜 확률이 $\frac{1}{2}$가 아닌지 수학적으로 추측하였고, 이를 근거로 하여 a형 염주가 만들어질 확률을 $\frac{2}{3}$으로 정당화 하였다.

문제3에서는 [그림 Ⅳ-3]과 같이 왜 Simpson's Paradox가 발생하는지 수학적으로 추측하기 시작하였고, 결국 지원자의 수를 고려해야 함을 추론해 낼 수 있었다. 이러한 추론은 어떻게 하면 Simpson's Paradox가 발생되지 않는 지에 대한 결정적인 힌트를 제공하였고, 결국 지원자의 수를 동일시하면 Simpson's Paradox가 발생되지 않음을 정당화 할 수 있었다.

문제4에서는 [그림 Ⅳ-4]와 같이 조건부확률에서 무고한 사람일 때, DNA가 우연히 일치할 확률과 DNA가 일치했을 때, 무고한 사람일 확률

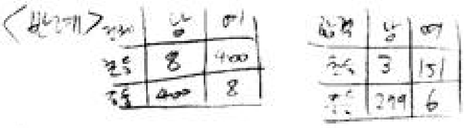
사이의 수학적인 관계를 파악하려는 시도가 주로 나타났다. 결국 위의 관계를 수학적으로 $P(DNA|무고)$와 $P(무고|DNA)$와 같이 표현해 봄으로써, 결국 주어진 지문에서 무고한 사람일 때, DNA가 일치할 확률을 DNA가 일치했을 때, 무고한 사람일 확률로 이해하여 잘못된 판결에 도달하였음을 정당화 할 수 있었다.

이 후 진행된 수학논술 과제를 활용한 수업시간에서도 각 문제별로 나타나는 특징적인 수학적 추론과정 요소들을 확인할 수 있었다.

가. 수학적 추론과정을 점검하기(R5)

문제3에서 대부분의 학생들은 역설적인 상황이 발생하는 것에 흥미로워 했으며, 자신이 반례로 제시한 내용을 가지고 이런 현상이 왜 발생하는지 점검하기 시작하였다. 결국 반례를 수학적으로 구체화 시켜 문제점을 찾고자 하였으며, 해결책으로 지원자의 수를 같게 해주어야 한다는 사실을 확인할 수 있었다. 또한 인원수의 차이를 일반화 하여 가중치라는 개념으로 설명하기도 하였다. 결국 학생들은 문제 상황에서 자신의 추론과정을 반성적으로 점검하고 수학적인 언어로 다시 표현할 기회를 제공받을 수 있었고, 이런 과정은 앞으로 주어진 과정 또는 결과를 해석하고 수학적 추론과정을 통한 사고의 확장에 밑거름이 될 수 있었다.

교사 : 이것도 한 번 성립하는지 생각해 볼까요?
학생들 : 항상 성립하지 않아요.
교사 : 그래요? 나는 항상 성립할 것 같은데. 왜 그렇게 생각을 했지요?
재민 : 가중치
교사 : 가중치? 가중치가 무엇인지 조금 더 구체적으로 설명해 주면 좋을텐데요.
성훈 : 사람 수가 달라요.
소연 : 각 사람의 개인 능력도 다를 수 있을 것 같아요.
재민 : 사건의 확률이 달라요. 하나는 1/11 이고 다른 하나는 10/11 이잖아요.
동현 : 전반기와 후반기를 비교했는데요. 물론 합치면 같지만. 전반기끼리는 수가 안 맞고, 후반기끼리 수가 안 맞잖아요. 그런 상황에서 통계적으로 많이 쳤다고 말할 수 있나요?
가희 : 남학생 수와 여학생 수가 같지 않아서 문제가 생긴 것이 아닐까요?
지호 : 맞아요. 하나의 예를 들면 다음과 같이 나타낼 수도 있어요.



나. 추론 과정과 결과를 해석하거나 평가하기(R6)

문제4에서 학생들은 변호사와 판사의 추론에서 나타난 오류를 발견해 내고자 하였으며, 결국 다양한 논리적 방법을 선택하여 무엇이 오류인지 그리고 그 오류가 어떻게 발생했는지도 설명해낼 수 있었다. 또한 문제상황의 수학적 관계를 파악하고 식으로 표현해 보는 활동을 통해 자신의 추론과정으로 명확히 하고, 주어진 결과를 해석하고 평가할 수 있었다. 결국 문제 상황을 구체화 하여 관찰하고, 추론과정의 결과를 해석하는 활동은 학생들에게 문제해결전략을 학습시킬 수 있고, 문제 상황을 보다 정교화 하여 올바른 수학적 추론과정을 이해시킬 수 있는 좋은 예임을 알 수 있었다.

서현 : 변호사의 주장은 300만 명이 있으면 그 중 300명이 일치할 가능성이 있다는 거잖아요. 제 생각에는 두 사람의 DNA가 일치할 확률이 $\frac{1}{10000}$ 라고 해서 그것만을 가지고 300만 명 중에 300명의 DNA가 일치

한다고 주장할 수는 없잖아요.

교사 : 왜 그렇죠?

서현 : 아마도 세 명이 동시에 DNA가 일치하기 위한 확률은 $(\frac{1}{10000})^2$일 것 같아서요. 결국 300명의 DNA가 일치하기 위한 확률은 $(\frac{1}{10000})^{299}$ 일 것 같은데요.

소연 : 저는 두 사람의 DNA가 일치할 확률을 조건부 확률로 생각해 보았어요. 그러니까 일반적으로 무고한 사람들 일 때, DNA가 일치할 확률이 $\frac{1}{10000}$이라고 했는데, 변호사가 주장한 것은 DNA가 일치하는 사람들 중에서 무고한 사람일 확률을 $\frac{1}{10000}$으로 생각해서 300만 명이 있을 때, 300명이 DNA가 일치할 수 있고, 그러므로 심슨은 300명 중 1명일 수 있다고 주장한 것 같아요. 결국 $P(DNA \mid \text{무고}) = \frac{1}{10000}$인 것을 $P(\text{무고} \mid DNA) = \frac{1}{10000}$로 잘못 오해해서 이런 오판이 나타난 것 같아요.

지호 : 결국 무고한 사람일 때, DNA가 일치할 확률을 구한 거죠. 이것을 재판정에서는 DNA가 일치할 때, 그 사람이 무고할 확률을 생각한 것 이구요. 확률자체가 틀려요. 표본공간 자체가 틀려요. 그런데, 두 확률을 같다고 생각한 것이기 때문에 잘 못 판단한 것 같아요.

다. 추론 과정과 결과를 변환하거나 확장하기 (R7)

문제1에서는 문제를 해결하고 난 후 한 명이 3:1로 분배하는 것과는 다르게 분배될 수 있는 상황이 발생할 수 있지 않을까? 하는 의문을 가지게 되었다. 이에 교사는 그런 상황이 어떻게 하면 발생할 수 있을지에 대해 질문을 던져 보았고, 한 학생이 새롭게 제기된 문제에 자신의 생각을 논리적으로 잘 설명하였으며, 수학적인 언어를 사용하여 창의적으로 해결하였다. 이런 상황은 학생들 스스로 추론과정에서의 결과를 변환하고 확장시키는 경험해 볼 수 있도록 하였으며, 이를 통해 학생들에게 고정되어 있던 수학적 사고 방법을 변화시켜 다양한 아이디어를 산출할 수 있는 기회를 제공할 수 있었다.

서현 : 그런데 실제로 1:1, 2:1로 나누어 가질 수 있지 않을까요?

교사 : 그럼 어떤 상황일 때, 가능할까요?

소연 : 1:1로 판돈을 나누어 가질 수 있는 상황은 자기 돈을 도로 가지고 가는 경우이므로 게임을 무효화 한다는 이야기가 아닐까요? 만약 게임 시작 전에 부득이한 상황이 발생하여 게임을 끝내지 못했을 경우 게임을 무효화 한다는 약속을 했다면, 실제로 게임이 끝나지 않았으므로 합리적인 배분일 수도 있을 것 같아요. 그러나 2:1로 판돈을 나누자고 한다면, 상식적으로 이기고 있던 사람이 수용하지 않을, 합리적이지 않은 분배방법 일 것 같아요.

요약하면, 수학논술 과제를 활용한 수업을 진행한 결과 수학적 관계를 파악하고 그 관계를 찾아 표현하기, 수학적으로 추측하기, 수학적 추론에 근거한 정당화하기 등 다양한 수학적 추론과 관련된 특징들이 자주 나타났다. 특히 교사가 주도하는 수업에서 주로 나타나는 외적 정당화보다 자신의 생각을 근거로 제시하거나 연역적 추론 및 주어진 조건에 따라 단계별로 해결하는 수학적 논리에 의한 정당화 과정이 많이 나타났다. 문제의 성격에 따라 추론 과정과 결과를 해석하거나 평가하기, 추론 과정과 결과를 변환하거나 확장하기와 같은 고차원적인 추론의 형태도 나타났다.

3. 수학적 의사소통

수학적 의사소통과 관련하여 문제1 풀이과정에서는 [그림 Ⅳ-1]와 같이 A와 B 각자가 이길 확률이 곧 상금을 나눌 비율임을 이해하고 확률을 계산하였으며, 수업진행과정에서 학생들은 왜 3:1로 분배해야 하는지를 논리적으로 설명할 수 있었고, 또한 왜 각자가 이길 확률을 $\frac{1}{2}$로 정해야 하는지 반성적으로 점검하여 표현하기도 하였다. 그리고 그 과정을 확률이라는 수학적인 언어로 잘 표현하였다.

문제2에서도 학생들은 [그림 Ⅳ-2]와 같이 a형 염주와 b형 염주가 만들어질 확률을 계산하기 위해 경우의 수와 확률이라는 수학적인 표현을 이해하고 사용하였으며, 왜 확률이 $\frac{1}{2}$가 될 수 없는지 경우의 수와 확률 사이의 관계를 들어 반성적으로 점검하여 표현하였고, 왜 확률이 $\frac{2}{3}$이 되어야 하는지를 논리적으로 설명하였다. 또한 그 정당화 과정을 확률의 정의를 사용하여 수학적으로 잘 표현하였다.

문제3에서 학생들은 [그림 Ⅳ-3]과 같이 Simpson's Paradox가 발생하는 원인으로 지원자의 수를 고려해야 함을 추론해 낼 수 있었고, 그 과정을 논리적으로 설명하였다. 또한 Simpson's Paradox가 발생되지 않는 방법을 분수를 사용하여 수학적 언어로 잘 표현하였다.

문제4에서는 [그림 Ⅳ-4]와 같이 조건부확률과 같은 수학적 표현을 이해하고 잘 사용하였으며, 주어진 지문에서 무고한 사람일 때, DNA가 일치할 확률을 DNA가 일치했을 때, 무고한 사람일 확률로 이해하여 잘못된 판결에 도달하였음을 논리적으로 설명할 수 있었다.

이 후 진행된 수업시간에서도 각 문제별로 나타나는 특징적인 수학적 의사소통과정 요소들을 확인할 수 있었다.

가. 다른 사람의 문제해결 또는 추론과정에 대한 설명을 해석하거나 평가하여 표현하기(C4)

문제2에서는 주어진 문제 상황을 해결하기 위해 서로 다른 결과가 나온 학생들에게 왜 이런 결과가 나오는지에 대한 평가를 요청하였다. 이때, 학생들은 상대방의 설명을 해석하고 평가하여 설명하였으며, 이 후 적절한 형태로 표현을 변환한 후에 변환된 문제 속에서 학생들은 결국 a형 염주와 b형 염주가 만들어질 가능성이 다르다는 사실을 확인할 수 있었으며, $\frac{a\text{형염주가만들어지는갯수}}{\text{전체염주가만들어지는갯수}}$와 같이 문제를 해결하기 위해서는 반드시 각각의 염주가 만들어지는 가능성이 항상 같은 경우에만 적용될 수 있다는 사실도 알 수 있었다. 이를 통해 학생들은 모순점을 지적하고 자신의 주장에 대한 근거를 제시하면서 논의하는 논쟁적 정당화 과정을 통해 상대방의 문제해결 및 추론과정에 대한 해석 및 평가를 할 수 있었으며, 각자의 추론을 수반한 학생간의 토론은 학생들에게 수학적 지식을 구체화, 정교화 하는데 많은 도움을 줄 수 있음을 확인할 수 있었다.

가희 : 그런데 결국 일렬로 구슬을 넣은 다음 실을 묶게 되면 첫 번째 뭐가 들어갔는지 나중에 뭐가 들어갔는지 알 수 가 없잖아요. 그래서 결국에는 2가지 경우만 나오는 것 같아요. 따라서 $\frac{1}{2}$이 답인 것 같아요.

지호 : 같은 것이 있는 순열에서 배열할 수 있는 경우의 수는 ${}_4C_2$가지인데, 6가지를 놓고 보면 A형 염주가 4가지, B형 염주가 2가지 만들어 지므로 이와 같은 시행을 계속 반복하면 결국은 2:1의 비율로 A형 염주와 B형 염주가 만들어 질 것 같아요.

가희 : 그런데 4가지가 결국 A형 염주 1개 아닌가?

재민 : 그런데 각각의 경우를 독립적으로 봐야하지 않나요?

가희 : 확률은 $\frac{\text{사건이발생할경우의수}}{\text{전체의경우의수}}$로 구하는 것 아니야?

성훈 : 음... 그럼 $\frac{1}{2}$인가?

가희 : 전체의 경우의 수 2개이고 사건이 발생한 경우의 수가 1개 이므로 확률은 $\frac{1}{2}$이잖아.

소연 : 확률의 정의가 $\frac{\text{사건이발생할경우의수}}{\text{전체의경우의수}}$로 구하는 것인데, 이때, A형 염주가 발생할 가능성하고 B형 염주가 발생할 가능성이 같지 않다고 판단해야 하는 것 아닌가요? 가능성을 판단하기 위해 염주가 만들어지는 상황을 생각 한 것 같고요.

나. 문제해결 또는 추론 과정의 표현을 다른 방식으로 변환하기(C6)

문제3에서는 Simpson’s paradox가 발생하는 원인을 분수의 덧셈에 대한 성질로 연결 지어 설명하기도 하였다. 일반적으로 분수의 덧셈은 $\frac{a}{x}<\frac{c}{z}$, $\frac{b}{y}<\frac{d}{w}$일 때, $\frac{a+b}{x+y}\geq\frac{c+d}{z+w}$일수도 있다는 사실을 활용하기 위해 분모를 남ㆍ 여 그리고 초등ㆍ중등으로 구분한 지원자수로 생각하고, 분자를 남ㆍ여 그리고 초등ㆍ중등으로 구분한 합격자 수로 나타내어 분수식에서는 일반적으로 항상 성립하지 않으므로, 주어진 문제 상황도 일반적으로 성립하지 않는다고 연결 지어 논리적으로 제시하였다. 이를 통해 개념들 간의 연결성을 인식하고 표현을 다른 방식으로 변환하는 활동은 수학적 개념들에 대한 통합적 이해를 도울 수 있으며, 보다 높은 수준의 확산적 사고를 가능하도록 하는 기초가 될 수 있음을 파악할 수 있었다.

지호 : 한번 다음과 같이 가정해 볼게요.

전체 지원자수	남	여
초등	x	z
중등	y	w

합격자 수	남	여
초등	a	c
중등	b	d

지호 : 문제 상황을 분수 형태로 나타내보면 결국 $\frac{a}{x}<\frac{c}{z}$이고, $\frac{b}{y}<\frac{d}{w}$일 때, $\frac{a+b}{x+y}<\frac{c+d}{z+w}$이 항상 성립하는가? 인데 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}<\frac{c}{z}+\frac{d}{w}$는 맞지만, 결론은 $\frac{a+b}{x+y}\geq\frac{c+d}{z+w}$일 수도 있어요.

석현 : 맞아요. 두 개의 확률을 비교할 때 그 분모가 같다면 당연히 높은 확률끼리 더한 것이 더 높게 나오겠지만, 분모가 서로 다르다면 두 확률을 더하면서 통분할 때 확률의 역전현상이 발생할 수 있을 것 같아요.

다. 문제해결 또는 추론 과정의 표현을 확장 또는 일반화하기(C7)

문제1에서 문제를 해결하고 난 후 한 명이 3:1로 분배하는 것과는 다르게 분배될 수 있는 상황이 발생할 수 있지 않을까? 하는 의문에 대해 또 다른 학생은 일반적인 승률을 이용하여 문제를 해결하려는 시도를 하였다. 이 때, 승률을 A, B 모두 $\frac{1}{2}$라 하지 않고, 한 사람의 승률을 a라 정의하면 다른 사람의 승률이 자연스럽게 $1-a$가 됨을 이용하여 기존의 수학적 해결방법을 사용해 자신의 생각을 논리적으로 잘 설명하였다. 이런 상황은 학생들 스스로 추론과정에서의 결과를 변환하고 확장시켜 일반화 과정을 경험해 볼 수 있도록 하였으며, 이를 통해 학생들에게 고정되어 있던 수학적 사고 방법을 변화시켜 다양한 아이디어를 산출할 수 있는 기회를 제공할 수 있었다.

가희 : 저는 4판째부터 갑자기 을이 더 높은 승

률을 가지는 상황을 생각해 보았어요. 만약 을의 새로운 승률을 a라고 하면, 갑의 새로운 승률은 $1-a$가 되고, 결국 앞의 문제의 풀이방법을 사용하면 갑 : 을로 배분해야 하는 비율은 $(1-a)(1+a):a^2$이 되요. 따라서 $(1-a)(1+a)=a^2$을 만족하는 a를 찾으면 1:1로 분배하는 상황을 만들 수 있고, a값을 조절하는 것에 따라서 다양한 분배비율을 만들 수 있을 것 같아요.

요약하면, 수학논술 과제를 활용한 수업을 진행한 결과 문제해결 또는 추론과정을 논리적으로 설명하기, 자신의 문제해결 또는 추론 과정을 반성적으로 점검하여 표현하기, 다른 사람의 문제해결 또는 추론 과정에 대한 설명을 해석하거나 평가하여 표현하기 등 다양한 수학적 추론과 관련된 다양한 특징들이 나타났다. 구체적으로 수학논술을 활용한 수업의 문제해결 과정에서 수용적, 논쟁적 그리고 정교화 된 합의 과정과 같은 다양한 의사소통이 이루어졌다. 연구 참여자의 답을 그대로 인정하는 수용적 정당화도 나타났지만, 대립되는 의견에 대해서는 모순점을 지적하고 자신의 주장에 대한 근거를 제시하면서 논의하는 논쟁적 정당화 과정 또한 종종 나타났다. 그리고 서로의 해결 과정을 통해 보다 수학적으로 가치 있는 답으로 정리하는 정교화 과정도 나타났다. 문제의 성격에 따라 문제해결 도는 추론 과정의 표현을 확장 또는 일반화 하는 의사소통도 나타났다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, <표 Ⅳ-1>에서와 같이 문제별로 분석틀에서 제시하고 있는 수학적 과정과 관련한 많은 요소들이 수학 논술 과정에서 나타남을 확인할 수 있었다. 그 중에서도 문제를 수학적 기호, 그림을 사용하여 다시 표현하기(P3), 문제해결에 필요한 조건의 확인 또는 보완하기(P4), 문제해결의 적절한 형태로 표현을 변환하기(P5), 문제해결에서 사용되는 개념들 간의 연결성인 인식하고 활용하기(P6), 문제해결에서 적절한 전략을 활용하기(P7), 수학적 관계를 파악하기(R1), 수학적 관계를 찾아 표현하기(R2), 수학적 표현을 이해하고 사용하기(C1) 과 같은 요소들은 수업 중 발생 빈도수가 높은 요소들이었다. 위의 빈도수가 높았던 요소들은 실제 어떠한 문제가 주어지더라도 문제를 해결하기 위해 고려해야 할 필수 요소들과 비슷함을 알 수 있다. 따라서 어떻게 보면 어떠한 문제가 주어지더라도 수학적 과정과 관련된 요소는 반드시 나타난다고 주장할 수 있을 것이다. 그러나 수학적 과정을 강조하고자 하는 취지는 결과뿐만 아니라 문제를 해결해 가는 과정을 중요하게 생각하고자 하는 것이고, 또한 교육과정 문서에서 수학적 창의성과 함께 수학적 과정을 강조하고 있다는 점에서 정형화 문제 속에서 매번 나타나는 수학적 과정 요소뿐만 아니라 다양한 수학적 과정 요소들까지 관찰하고자 함일 것이다. 따라서 수학논술을 활용한 수업을 통해 문제해결 과정과 결과의 타당성을 점검하고 문제해결을 위한 다양한 전략을 찾으며, 추론 과정의 결과를 해석하거나 평가하고, 문제해결 또는 추론과정의 표현을 확장 또는 일반화하기 등 정형화된 문제에서는 나타나기 어려운 수학적 과정 요소들 까지도 나타나도록 지도할 수 있음을 확인 할 수 있었으므로 결국, 학습자를 위해 알맞게 구성된 수학논술을 활용한 수업을 함으로써 수학논술이 '수학적 과정'과 관련된 다양한 특징들을 나타내도록 하는 교수・학습활동의 한 방안이 될 수 있음을 확인할 수 있었다.

둘째, 추론과정에서는 특징적으로 교사가 주도하는 수업에서 주로 나타나는 외적 정당화보다 생활 속에서의 자신의 경험을 근거로 제시하거나 연역적 추론 및 주어진 조건에 따라 단계별로 해결하는 수학적 논리에 의한 정당화 과정이 많이 나타났다. 이는 개념을 이해하고 이미 배운 지식을 활용하여 새로운 상황에 적용하는 개념형, 탐구형 과제가 직관, 경험 및 수학적 논리에 의한 내적 정당화를 더욱 촉구한다는 이미연(2007)의 연구 결과에 부합한다. 이를 통해, 학습자를 위해 알맞게 구성된 수학논술을 활용한 수업은 학생들에게 낮은 수준으로부터 높은 수준으로 수학적 추론능력이 향상되도록 하는데 기여할 수 있다고 판단할 수 있다.

셋째, 의사소통과정에서는 특징적으로 학생들의 답을 그대로 인정하는 수용적 정당화도 나타났지만, 대립되는 의견에 대해서는 모순점을 지적하고 자신의 주장에 대한 근거를 제시하면서 논의하는 논쟁적 정당화 과정 또한 종종 나타났다. 그리고 서로의 해결 과정을 통해 보다 수학적으로 가치 있는 답으로 정리하는 정교화 과정도 나타났다. 이는 다양한 풀이방법이 제공되는 문제들을 해결하는 과정에서 서로의 의견을 제시하고 모순점을 찾아 수정·보완해 가는 과정을 통해 수학적 상호작용이 일어나며, 학생들이 서로에게 피드백을 제공하는 과정에서 자신의 생각을 명확하게 전달하기 위해 논리적인 설명을 하려는 노력이 수반됨으로써 수학적 의사소통 능력이 향상된다는 장소진(2002)의 연구에도 부합한다. 결국 학습자를 위해 알맞게 구성된 수학논술을 활용한 수업을 함으로써 학생들에게 다양한 형태의 수학적 의사소통 과정을 습득시키는데 기여할 수 있고 학교 현장에서 수학적 의사소통 과정의 도입과의 연계측면에서 하나의 대안이 될 수 있다고 판단할 수 있다

이 결과를 바탕으로 본 연구에 대해 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 확률과 통계 영역으로 한정된 수학논술 과제를 가지고 수학적 과정이 나타나는 상황을 분석하였다. 실제 수학논술 과제는 다양한 학습영역에서 제작이 가능한데, 다른 영역에 대한 수학적 과정 분석은 이루어지지 않았다. 이에 수와 연산, 도형 등 다양한 학습영역에서 제시된 수학논술 과제를 통한 수학적 과정에 대한 후속 연구가 필요하다.

둘째, 주어진 문제에 따라 학생들의 수학적 과정에 대한 특성들이 다르게 나타났다. 문제 자체의 특성이 수학적 과정과 관련한 요소들을 나타나도록 하는데 어떠한 영향을 미치는지에 대한 연구가 이루어지지 않았다. 이에 대한 후속연구도 이루어져야 할 필요가 있다.

셋째, 수학적 과정을 평가할 수 있는 방안 마련이 필요하다. 이 논문에서는 제시된 문제에 대해 수학적 과정 요소들이 어떻게 나타났는지 체크하는데 그쳤지만, 실제로 평가의 관점에서 '어떤 수학적 과정이 잘 나타나야 좋은 평가를 받을 수 있는가?' 와 같이 수학적 과정 관련 평가틀 및 채점 기준표를 작성하여 적용해 볼 필요가 있다.

넷째, 수학논술 문항의 적절한 난이도를 유지하는 것도 필요하다. 학생들이 잘 알고 있는 내용을 문항으로 작성할 경우, 자칫 지루해 지기 쉽고, 어려운 문항으로 작성할 경우, 학생들 스스로 이해하고, 토론하는 데 한계가 있다. 따라서 현재 학습상태 및 흥미 등 다양한 학습요소를 정확히 파악하여 적절한 수학논술 문항을 작성할 필요가 있다.

참고문헌

고려대학교(2005). 2006학년도 고려대학교 수시

1차모집 논술고사 문항.
교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 서울: 교육부.
김도한 외 18명(2009). 2009년 **창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구**. 한국과학창의재단.
김상화, 방정숙(2010). 초등학교에서의 수학적 의사소통 목표와 성취요소 설정-D.R.O.C. 유형을 중심으로-. **수학교육 논문집, 24**(2), 385-413.
박배훈, 류희찬, 이기석(1998). **새로운 교육 평가 방안에 관한 연구**. 한국교원대학교 수학교육연구소.
박혜숙, 나귀수(2010). 수학과 교육과정에서 '수학적 과정'의 신설에 대한 소고. **수학교육 논문집, 24**(3), 503-523.
서울대학교(2007). 2007년 제2기 논술교육 역량 강화를 위한 중등교사 연수.
서울특별시교육연수원(2007). 2007 교과별 논술 수업설계서.
우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.
우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.
이경화(1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.
이미경 외(2004). **PISA 2003 결과 분석 연구: 수학적 소양, 읽기 소양, 과학적 소양 수준 및 배경변인 분석**. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2004-2-1.
이미경 외(2005). **2005년도 학업성취도 국제 비교 연구(PISA/TIMSS)**. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2005-2-1.
이미연(2007). **수학적 과제 유형이 수학적 의사소통에 미치는 영향**. 서울교육대학교 석사학위 논문.
이재학 외 3명(2001). **수학적 창의성 신장을 위한 고등학교 수학교육평가 방안에 관한 연구**. 한국교원대학교 교과교육공동연구소.
장소진(2002). **서술형 과제에 대한 동료집단 피드백이 수학적 의사소통에 미치는 영향**. 한국교원대학교 석사학위 논문.
정상권 외 4명(2012). **2011년 과정 중심의 수학교과 평가방안 연구**. 한국과학창의재단.
정재승(2003). **과학콘서트**. 서울: 동아시아.
노국향, 박경미, 최승현 (2001). **PISA 2000 수학 평가 결과 분석 연구**. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2001-9-3.
황선욱 외 12명(2009). **고등학교 적분과 통계**. 서울: 좋은책 신사고.
Gonzales, P., Williams, T.,Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D., & Brenwald, S. (2009). Highlights From TIMSS 2007: Mathematics and Science Achievement of U. S. Fourth- and Eighth-Grade Students in an International Context. Washington, DC: Institute of Education Sciences.
Creswell, J. W.(2003). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. 강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형(역)(2005). 연구설계: 정성연구, 정량연구 및 혼합연구에 대한 실제적인 접근, 서울:교우사.
Mullis, I., Martin, M., Ruddock, G., O'Cullivan, C., & Preuschoff, C. (2009). TIMSS 2011 Assessment Frameworks. MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
OECD. (2009). PISA 2009 Assessment Framework: Key competencies in reading, mathematics and science. OECD.
OECD. (2011). PISA 2012 Mathematics Framework. OECD.

Analysis of the Mathematical Processes in Mathematical Essay Lessons : Focused on the Probability and Statistics Domain

Kim, Kyu-Sang (Graduate School, Korea National University of Education)
Lee, Jae-Hak (Korea National University of Education)
Lee, Kwang-Ho (Korea National University of Education)

The purpose of this study is investigating the various properties related with mathematical processes in the mathematical essay lessons, analyzing the positive changes of students, and proposing an example that the mathematical essay lessons can be a model for changing traditional mathematical lessons. To carry out the research, mathematical essay questions were developed based upon the high school mathematics curriculum in probability and statistics domain.

Eight 12th graders were participated for the research. Variety of properties related mathematical problem solving, reasoning, and communication in the lessons were appeared. The research conclude that mathematical essays are helpful not only appearance of general properties related mathematics process, but also appearance of properties that would be low chance of developed.

* Key Words : mathematical process(수학적 과정), mathematical problem solving(수학적 문제해결), mathematical reasoning(수학적 추론), mathematical communication(수학적 의사소통), mathematics essay(수학논술)

논문접수 : 2014. 8. 8
논문수정 : 2014. 9. 17
심사완료 : 2014. 9. 19

<부록 1> 수학논술 과제 - 확률과 통계 영역

(가) 확률의 역사는 도박의 역사이다. 16세기에는 카르다노가 도박꾼을 위한 책을 썼는데, 이 책에서 한 개의 주사위를 사용하는 문제를 푸는 어떤 법칙에 대한 완전한 표를 제시하고 있다. 우연의 법칙을 수학화 하려고 했던 이러한 초기의 시도에도 불구하고 수학으로서의 확률론의 탄생은, 브로신과 루이 14세의 조신이었던 드 메레가 주사위 문제와 분배 문제를 파스칼에게 제기했던 1654년으로 생각되고 있다. 파스칼은 이 문제를 페르마에게 전했고, 두 사람은 곧 그 문제를 해결했다. 두 사람의 연구가 확률의 수학적 이론을 세우는데 있어서 중요한 고비가 되었던 것으로 간주되고 있다.

(나) 수학적 확률이란 선험적 확률이라고도 한다. 3개의 동전을 던질 때, 일어나는 모든 경우는, 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면,$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$의 8가지이고, 그 어느 경우가 나타나는지는 같은 정도로 기대할 수 있다. 다라서 이들 중에서 2개가 앞면, 1개가 뒷면인 경우는 $\{HHT, HTH, THH\}$의 3가지로서, 그 확률은 $\frac{3}{8}$이라고 생각할 수 있다. 이와 같이 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n가지 있고, 그들은 어느 두 경우도 동시에 일어나지 않고, 각 경우가 모두 같은 정도로 일어난다고 기대할 수 있을 때, 사건 E가 일어나는 경우의 수가 r가지 이면, $p=\frac{r}{n}$을 사건 E가 일어나는 수학적 확률 또는 선험적 확률이라고 한다. 그리고 $0 \leqq r \leqq n$이므로 $0 \leqq p \leqq 1$이 된다.

(다) 수학적 확률에 대응하는 말로서 통계적 확률(경험적 확률)이 있다. N회의 시행에서 어떤 사건 E를 관측한 횟수를 r이라고 하자. $N \to \infty$ 일 때, $\frac{r}{N}$(사건 E의 상대도수)가 일정한 값 p에 한없이 가까워졌을 경우 p를 사건 E의 통계적 확률(경험적 확률)이라고 한다.

(라) 확률과 관련된 유명한 패러독스 중의 하나가 심슨의 패러독스(Simpson's paradox)이다. 예를 들어 어느 시즌의 프로야구 경기의 결과가 다음과 같다고 하자. 타자 A는 야구 시즌의 전반기에 10번의 타석에 나와 0.4의 타율을, 후반기에는 100번 타석에 나와 0.25의 타율을 보였다. 이에 반해 타자 B는 전반기와 후반기에 각각 100번, 10번 타석에 나와 타율이 각각 0.35, 0.2였다. 전반기와 후반기 모두 타자 A의 타율이 높지만, 전체적인 타율은 A는 0.264이고, B는 0.336이므로 타자 B가 더 높다. 이처럼 심슨의 패러독스란 각 부분에 대해 성립한 성질이 그 부분들을 종합한 전체에 대해서는 성립하지 않는 모순적인 경우를 말한다.

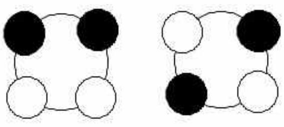
(마) $O.J.$ 심슨 사건에서 사용되어 큰 주목을 받았던 DNA테스트 역시 확률 문제를 내포하고 있었다. 아내의 피살 현장에서 채취된 DNA는 심슨의 것과 일치했다. 통상 DNA분석에서 두 사람의 DNA가 우연히 일치할 확률은 1만분의 1이라고 한다. 검사측은 심슨이 99.99%의 확률로 살인자라고 몰아붙였지만, 변호사 측은 로스앤젤레스 인근의 인구가 300만명 이므로 이중 약 300명이 DNA가 일치할 수 있기 때문에 심슨이 살인자라는 결론은 99.7%$(\frac{1}{300})$ 오판이라고 주장했다. $O.J.$ 심슨의 변호인단은 아주 중요한 문제를 착각하고 있었지만, 안타깝게도 결국 재판부는 $O.J.$ 심슨 변호사측의 손을 들어주는 오판을 저지르고 말았다.

[문제 1] 제시문 (나)에서 드 메레는 도박을 할 때, 수학적으로 생각하여 상당한 이익을 보았다. 어느 날, 그는 도박에 관하여 궁금한 점이 생겨 파스칼에게 편지를 보내 물어 보았다.

> A, B 두 사람이 32피스톨(옛날의 스페인 금화)씩을 걸고 내기를 하고 있다. 승부에서 1번 이기면 1점을 얻고, 먼저 3점을 얻는 사람이 내기 돈 64피스톨을 몽땅 갖기로 하였다. 지금 A가 2점, B가 1점을 딴 시점에서 어떤 사정으로 부득이하게 시합을 중지하게 되었다면, 64피스톨을 어떻게 분배하는 것이 가장 합리적일까?

만약 여러분이 파스칼이라고 가정하고, 64피스톨을 어떻게 분배하는 것이 합리적인지에 대해서 논리적으로 설명하시오.

[문제2] 제시문 (다)를 읽고, 아래 내용이 참, 거짓인지 판단하시오. 만약 참이라면 그 주장에 대한 근거를 제시하고, 거짓이라면 올바르게 서술되지 않은 부분을 설명하고, 올바르게 고치시오.

> 오른쪽 그림과 같이 검은 구슬 두 개와 흰 구슬 두 개를 꿰어 염주를 만드는 경우를 생각해 보자. 구슬 색의 배치에 따라 다음과 같이 두 가지 종류의 염주를 만들 수 있다.
>
> 
>
>
> 구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치할 때 a형 염주가 만들어지는 사건을 A라 하자. 표본 공간 S가 두 개의 근원사건으로 이루어져 있으며 사건 A는 한 개의 근원사건으로 이루어져 있으므로 사건 A가 일어날 확률 P(A)는 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$ 이다.

[문제3] 한국교원대학교 수학교육과에는 초등수학전공과 중등수학전공이 있다. 이 두 전공의 합격률을 조사하였더니 두 전공에서 모두 여학생의 합격률이 남학생의 합격률보다 높았다. 그렇다면, 초등수학전공과 중등수학전공에 지원한 여학생 전체의 합격률은 남학생 전체의 합격률보다 높다고 볼 수 있는가? 자신이 판단한 바를 논리적으로 설명하시오.

[문제4] 제시문 (바)의 밑줄 친 부분에 대하여 제시문 (마)의 결과를 비교하여 어떠한 중요한 문제를 착각하였는지 논리적으로 설명하시오.