대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 3, 491 ~ 502. Sep 2014

예비교사들은 0.99⋯〈1라는 주장을 어떻게 반박하는가?

이 지 현*

이 연구는 예비교사들이 0.99⋯가 1보다 작다는 주장을 어떻게 반박하는지를 관찰함으로서 왜 0.99⋯=1가 참이라고 정당화하는지를 분석하였다. 일부 예비교사는 1-0.99⋯의 값을 무한소라고 생각하고 있었다. 표준 실수의 입장에서 1-0.99⋯의 값은 무한소가 아닌 0이라고 생각했던 예비교사들도 이것을 실수에 대한 가정으로부터의 논리적 결론으로 정당화하기보다는 유한과 무한은 다르다는 직관적 정당화에 안주하였다. 예비교사들이 0.99⋯<1의 반박에서 드러낸 인식의 한계는, 표준 실수 체계만이 수학적으로 옳은 유일한 수체계라는 믿음과 무관하지 않다. 0.99⋯<1이지만 표준 실수체계와 마찬가지로 무모순인 비표준 실수체계가 존재한다는 사실은, 평범한 중학생이 제기하는 0.99⋯가 1이냐 아니냐의 질문도 학교수학 수준의 상식적 설명 혹은 예비교사들의 직관적인 정당화만으로는 대답할 수 없는 것임을 보여주고 있다.

Ⅰ. 서 론

‘정당화된 참인 믿음(justified true belief)’이란, Plato의 Theaetetus에서 등장하는 지식의 고전적 정의이다(Chappell, 2013). 즉 ‘어떤 명제가 참임을 안다’는 것은 그 명제가 참이라는 것뿐만 아니라 왜 참인지도 정당화할 수 있음을 의미한다.

학교수학에서는 유리수를 순환하는 무한소수, 무리수를 순환하지 않는 무한소수로, 실수개념을 무한소수에 의존하여 도입한다. 그러나 많은 학생들이 무한순환소수 0.99⋯가 1과 같다는 것이 참임을 인정하지 못한다. 많은 수학교육연구들이(Tall,Schwarzenberger,1978; Sierpińska, 1987; Richman,1999; Choi, Do, 2005; Dubinsky, Weller, McDonald, Brown, 2005) 0.99⋯=1의 수용과 관련된 인식론적 장애와 가능한 처방방안에 대하여 논의해왔다. 수학 교사의 교과지식을 진단한 연구들(Krauss, Baumert, Blum, 2008; Buchholtz, Leung, Ding, Kaiser, Park, Schwarz, 2013)에서도 0.99⋯=1의 인지 여부 및 이것의 정당화 방법을 묻는 문항을 찾아볼 수 있다. 외국의 사례 연구들(Weller, Arnon, Dubinsky, 2009; Burroughs, Yopp, 2010; Yopp, Burroughs, Lindaman, 2011)에 의하면, 상당수의 (예비)교사들도 0.99⋯=1임을 정확하게 알고 있지 않을 뿐만 아니라 수학적인 정당화에 실패하고 있음을 확인할 수 있다. Buchholtz 외(2013)의 예비중등교사의 교과지식에 대한 국제비교연구결과에 따르면, 0.99⋯=1라는 사실에 대하여 한국의 예비 중등 수학교사들은 독일(48.5%), 홍콩(26.7%), 중국(40.6%)의 예비교사들보다 매우 높은 정답률(84.7%)을 보였으며, 무한등비급수에 의한 증명· 순환소수를 유리수로 고치는 알고리즘과 같은 학교수학에서의 정당화를 올바르게 제시한 예비교사의 비율 역시 가장 높게 나타났다. 이러한 연구 결과는 우

* 인천대학교, jihyunlee@incheon.ac.kr

리나라의 중등예비교사들은 0.99…=1라는 사실 및 이에 대한 학교수학의 정당화를 잘 알고 있음을 보여주고 있다. 하지만 0.99…=1에 대한 수학교사의 교과지식은 이것으로 충분한 것일까?

그러나 학교수학에서 제시하는 0.99…=1에 대한 여러 설명은, 0.99…은 1보다 작다는 많은 학생의 직관은 왜 옳지 않은가라는 질문에 대한 대답이 되지 않는다(Sierpińska, 1987; Richman, 1999; Ely, 2010). 조한혁과 최영기(1999)는 영재 중학생들이 교과서의 설명대로 0.99…=1임을 알고 있으면서도 여전히 0.99…가 1보다 작다는 생각을 가지고 있었으며, 0.99…=1라는 결과는 단지 교과서 및 교사의 권위에 복종하여 수용하고 있음을 보고하였다. 0.99…=1에 대한 학교수학의 가장 엄밀한 논증은 바로 무한등비급수로 설명하는 것이지만, 무한등비급수의 형식적 계산에 익숙한 학생이라 할지라도 무한등비급수와 0.99…=1과의 관계를 이해하기는 쉽지 않다(박선화, 1998, Eisenmann, 2008, Richman, 1999). 이와 같은 선행 연구의 결과는 교사가 0.99…=1에 대한 학교수학에서의 여러 논증을 제시하더라도 여전히 일부 학생들은 0.99…는 1보다 작다는 생각을 고집할 수 있음을 시사한다. 그렇다면 이와 같이 0.99…는 1보다 작은 수라는 학생들의 주장에 수학교사들은 어떻게 대처하는가? 윤혜근(2008: pp.58-60)은 현직 교사 24명을 대상으로 0.99…가 1과 같다는 것을 도저히 수용하지 못하는 학생을 지도하기 위한 방법을 질문하였는데, 조사에 참가한 교사 중 70%가 아무 응답도 하지 못하였음을 보고하고 있다.

이 연구는 예비교사들에게 0.99…=1에 대한 학교수학의 통상적인 정당화 방법을 묻는 대신, 0.99…가 1보다 작다는 가상적인 학생의 논리를 어떻게 반박하는지를 관찰함으로서 예비교사들이 왜 0.99…=1는 참이라고 설명하는지를 분석한다. 또한 예비교사들의 0.99…<1에 대한 논박의 한계와 그것에 내재된 의미를 비표준해석학의 관점에서 논의하고자 한다.

Ⅱ. 예비교사들의 0.99…〈1에 대한 반박

이 연구의 설문에 참여한 예비교사 9명은「수리논리와 논술」을 수강중인 4학년 여학생들로서, 이들은 미적분학·집합론·해석학·위상수학 등 수학전공 및 수학교과교육론·수학교육과정과 교재연구 등의 과목을 모두 수강하였다. 연구자는 조한혁, 최영기(1999)가 제시한 0.99…가 1보다 작다고 생각하는 학생과 교사와의 가상적인 대화 상황을 [문항 1]과 [문항 2]로 제시하고, 약 40분의 시간동안 예비교사들에게 이와 같은 학생의 논리에 대하여 교사로서 어떻게 설명하겠는지를 서술하도록 하였다. 예비교사들은 학생에게 제시할 설명을 그대로 구어체로 쓰거나 아니면 어떻게 설명할 것인지를 대략적으로 기술하였으며, 문제에 대한 자신의 솔직한 의견을 제시한 경우도 있었다.

만약 0.99…가 1보다 작다면, 1과 0.99…의 차 ϵ는 1/10, 1/100, 1/1000…보다 작으므로 임의의 $\frac{1}{n}$보다 작은 양수, 즉 무한소가 된다. 결국 0.99…는 1보다 작다는 학생의 직관이 왜 옳지 않은지에 대해 대답하기 위해서는, 우리가 다루는 수 체계에 왜 이와 같은 무한소가 존재할 수 없는지를 설명해야 한다. 다음은 연구자가 조한혁, 최영기(1999: p.607)의 가상적 대화를 발췌하여 제시한 [문항 1]이다.

[문항 1] 수학적 사고력이 우수한 어떤 중학생이 0.99…=1을 배우고 난 후 교사를 찾아가 다음과 같이 질문하였습니다.

학생 : 유한소수의 크기는 각 자리의 수의 크기에 의하여 비교할 수 있습니다. 예를 들어 0.9는 1보다 작으므로 분명히 다릅니다. 마찬가지로 0.99는 1보다 작고, 이런 식으로 아무리 소수점 아래에 9를 많이 쓴다고 할지라도 역시 1보다 작습니다.

교사 : 너에게는 약간 이상하게 들릴 수도 있지만 유한소수에서 성립하는 모든 관계가 무한소수에서도 성립한다고 할 수는 없단다. 실제로 많은 예를 통하여 유한과 무한의 차이를 볼 수 있고, 이에 대한 인식이 수학의 중요한 문제였으며 많이 연구되어 왔단다.

학생 : 무한이라는 것도 결국은 유한에서 계속 끊임없이 가서 도달되는 것이 아닙니까? 그러면 유한에서 성립하는 것도 결국 차곡차곡 단계를 거쳐 똑같은 방식으로 무한에서도 성립하지 않을까요?

교사 : 무한이라는 것이 경험적으로 설명할 수 없어 만족스러운 설명을 할 수 있을지 자신이 없지만, 이런 예를 들어보자.
1/9=0.111…, 2/9=0.222…, …, 8/9=0.888… 이므로, 마찬가지로 9/9=0.999…가 되는 것이 자연스럽지 않겠니?

학생 : 그렇지만 지금까지 제가 배운 것과 다른 것 같습니다. 1을 9로 나누면 0.111…이 되고 8을 9로 나누면 0.888…이 되지만, 9를 9로 나눈 것은 당연히 1이 됩니다.

교사 : 그러면 1/3=0.333…이니까 양변에 3을 곱하면 1=0.999…가 되지 않겠니?

학생 : 1과 0.9의 차이는 0.1이고, 1과 0.99의 차이는 0.01이고 마찬가지로 1과 0.999…의 차이는 0.000이 계속되지만 결국 끝자리는 1입니다. 그러므로 1과 0.999…는 다릅니다(조한혁, 최영기, 1999: p.607).

[질문] 위의 대화와 관련하여, 여러분이 교사라면 이러한 학생의 질문에 어떻게 대답하겠습니까?

위 대화에서, 학생은 1과 0.9의 차이는 0.1이고, 1과 0.99의 차이는 0.01이라는 유한소수에서의 관찰을 근거로, 1과 무한소수 0.999…의 차이는 0이 무한히 반복되며 가장 마지막 자리만 1인 수 $0.\underbrace{00\cdots}_{\infty}1$라고 주장하고 있다. 그러나 완비순서체(complete ordered field)로 정의되는 표준 실수체계는 당연히 아르키메데스 성질을 만족하므로[1]), 무한소가 존재할 수 없을 뿐더러 이와 같은 기호 $0.\underbrace{00\cdots}_{\infty}1$ 에 해당하는 실수는 없다. 그러나 많은 학생들은 이와 같은 $0.\underbrace{00\cdots}_{\infty}1$ 혹은 수열 $\frac{1}{n}$의 마지막 항이 바로 가장 작은 양수라고 생각한다(Burn, 1990). Ely(2010)의 사례연구에서, 무한소의 존재를 믿었던 대학생 Sarah는 '무한히 작은 양수'를 무한소라는 용어대신 이와 같이 마지막 자리에만 1이 있는 무한소수로 표현하여 사고할 수 있었다. 역시 윤혜근(2008: pp.44-47), 박선화(1998: pp.146-147)의 조사에서도 많은 학생들이 1과 0.99…의 차를 $0.\underbrace{00\cdots}_{\infty}1$로 표현하고 있음을 살펴볼 수 있다.

1과 0.999…의 차이 값을 구체적으로 언급한 예비교사 4명 중[2]), 예비교사 Y와 M은 다음과 같이 1과 0.99…의 차이는 소위 무한대 자리의 숫자만 1인 무한소수 $0.\underbrace{00\cdots}_{\infty}1$로 지시할 수 있는 무한소라고 생각하고 있었다.

---

1) 실수의 Archimedes 성질은 완비성 공리로부터 증명되며, 다음과 같이 진술할 수 있다.

임의의 양의 실수 $x>0$에 대하여, $\frac{1}{n}<x$인 적당한 자연수 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다.

2) 이 네 예비교사 외의 다섯 명의 응답은 다음과 같다. 1-0.9=0.1, 1-0.99=0.01,…과 같은 메모만 남겼을 뿐 답을 완결하지 못한 한 명 외 세 예비교사는, "무한소수와 유한소수는 다르다", "무한은 유한의 연장이라는 특징도 있고 무한이 갖는 독특한 특징도 있다. 무한의 크기 비교가 유한에서 성립하는 것처럼 성립하는 것은 아니다"라며 예비교사 R이나 P의 응답과 같이 무한과 유한의 차이를 설명하려 하였다. 다른 한 예비교사는 순환소수를 유리수로 고치는 알고리즘으로 설명하겠다고 썼다.

[$1-0.99\ldots=\underbrace{0.00\cdots1}_{\infty}$(무한소)]

- 너의 말도 어느 정도 맞지만, 한없이 작은 수는 무시할 수 있으니까 0.99⋯=1이라고 할 수 있지 않을까?(예비교사 Y)
- 무한이라는 개념이 너가 생각하는 무한보다 훨씬 더 끝없는 것을 의미해. 너가 생각하는 그 어떤 수나 크기보다 큰 것이고, 그 끝을 말할 수 없듯이 1과 0.99⋯의 차이는 그 끝자리가 1인건 알지만 그 끝을 가늠할 수 없을 만큼 엄청난 게 무한이니까 1과 같다고 해도 손색이 없게 되는 거야. 너가 이 사실이 이해가 안 되는 것은 무한이라는 개념을 알고 있다고 생각하지만, 넌 아직 그 의미가 제대로 받아들여지지 않았기 때문에 0.99⋯와 1이 같다는 점을 이해하지 못하는 것 같구나(예비교사 M).

예비교사 Y는 1과 0.99⋯의 차이는 0이 아닌 ‘한없이 작은 수’라고 표현하였는데, 그는 연구자에게 ‘0.99⋯≒1, $\frac{1}{n}$≒0’라는 기호를 보여주면서, 이제까지 자신은 0.99⋯=1과 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$에 이와 같은 ‘근사값 기호’가 생략되어 있다고 생각해왔다고 고백하였다. Y와 마찬가지로 1과 0.99⋯의 차이를 무한소로 보았던 Peirce는 새로운 등호 ≐(equality up to an infinitesimal)을 제안하여 1≐0.99⋯라고 하였으며(Błaszczyk, Katz, Sherry, 2013: p.48), 이점에서 Y의 기호는 Peirce가 제안한 대안적 기호와 매우 유사하다. 이와 같이 예비교사 Y와 M은 1과 0.99⋯의 차이는 무한소이지만 그럼에도 불구하고 무한소 차이는 무시될 수 있다는 논리로 0.99⋯=1임을 정당화하고 있다. 그러나 학생들은 같은 이유로 0.99⋯가 1보다 작다고 생각한다(윤혜근, 2008: pp.45-47; 박선화, 1998: pp.146-147).

위 대화에서 가상의 학생은 ‘유한에서 성립하는 것은 무한에서도 성립한다’ 를 근거로 1과 0.99⋯의 차이가 무한소임을 추론하였다. 사실 이 근거는 Leibniz가 발견술로 사용한 연속성 원리[3]이며, Cauchy를 위시한 많은 수학자들이 연속성의 원리를 상당한 기간 동안 자명한 법칙으로 받아들였다. 두 예비교사 R과 P는 1과 0.99⋯의 차이가 무한소 $\underbrace{0.00\cdots1}_{\infty}$라는 학생의 주장을 다음과 같이 반박하였다.

[1-0.99⋯=0, 즉 무한소는 존재하지 않는다.]

- **0.0000...** 해서 **0**이 계속되고 끝자리가 1이라고 했는데 무한이기 때문에 **0.000...** 은 끝나지 않아. 결국 끝자리가 1이라는 말이 모순인 거야. 무한의 문제를 유한과 같이 생각해서 이런 오류가 발생한 거야(예비교사 R).
- 학생은 이처럼 **0.1, 0.01, 0.001,⋯** 차이가 줄어들기 때문에 아무리 계속가도 **0.0000...1**로 끝에 1이 남는다고 했는데, 이 규칙이 무한에서도 보장된다고 할 수는 없다고 대답을 해주고 싶다(예비교사 P).

이와 같이 예비교사 R과 P는 ‘무한’과 ‘유한’은 다르며, 무한에서는 한없이 작은 차이 $\underbrace{0.00\cdots1}_{\infty}$은 존재할 수 없으며 0이 된다는 논리로 무한소가 없음을 설명하였는데, 비슷한 논리를 다음과 같은 Tom의 설명에서도 찾아 볼 수 있다.

Tom : 0.99⋯는 무한대에 도달하기 전까지는 1과 같지 않지만, 무한대에 도달하면 1과 같다. 왜냐하면 1과 0.99⋯의 차이는 무한히 작아지기 때문이다. 마치 평행하지 않은 두 직선이 반드시 언젠가는 만나게 되듯이, 계속 어떤 수를, 설령 매우 작은 수라 할지라도 그것을 계속 더해간다면⋯ (Sierpińska, 1987:p.379)

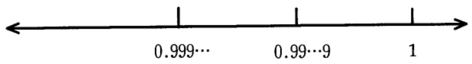
3) Leibniz의 연속성 원리는 다음과 같다: 유한에서 성립하는 것은 무한에서도 성립하고, 그 역도 성립한다 (Katz, Sherry, 2012:p.1555).

Tom은 순환소수를 유리수로 고치는 알고리즘이 아닌, 위와 같이 무한에 도달가능하다는 상상에 의존하여 0.99⋯=1라는 결과를 받아들였다. Sierpińska(1987)는 “계속 가면 언젠가는 무한에 도달할 수 있다.”라는 Tom의 무한 개념을 ‘가무한적 실무한(potentially actual infinity)’으로 분류하였다. 사실 이러한 설명은 상당수 교사들의 0.99⋯=1에 대한 흔한 직관적인 정당화이기도 하다. 윤혜근(2008: p.59)은 24명의 중학교 교사를 대상으로 0.99⋯=1의 설명 방법을 조사하였는데, 45.8%의 교사들이 “(0.99⋯는) 계속 1로 가고 있으며 언젠가는 1이 된다”는 직관적인 설명을 제시하였다. 연속성 원리에 근거하여 1과 0.99⋯의 차이가 무한소라는 가상의 학생의 주장이 수학적 근거가 아닌 무한에 대한 형이상학적 근거에 의존하는 논증이라면, 무한에 도달하면 0.99⋯는 1과 같아진다는 교사들의 설명 역시 같은 비판을 피하기 어렵다. Tall과 Schwarzenberger(1978)은 결국 이와 같은 논증이 애매하며 앞뒤가 맞지 않는 설명(mathematical double talk)에 불과하다고 지적하였다.

[문항 2]의 상황에서, 교사는 수직선 위에서 1-0.99⋯$=h>0$라 할 때, h보다 작은 $\underbrace{0.00\cdots 1}_{n}$을 찾을 수 있다는 아르키메데스 원리의 직관적 설명을 시도하지만, 학생은 0.99⋯는 계속 진행되는 수이므로 그 차는 일정한 값일 수 없다고 반박한다.

[문항 2] 교사는 학생의 질문에 대해 깊이 고민하다가, 모든 수가 수직선상에서 한 점에 대응된다는 점에 착안하여, 이 문제를 수직선 위에서 설명하기로 마음을 먹었다.

교사 : 1과 ‘0.999⋯’를 수직선에 나타내보자. 모든 수는 수직선에 한 점으로 나타낼 수 있으므로, ‘0.999⋯’가 수라면, 분명히 수직선상에 한 점으로 나타낼 수 있을 거야. 0.9보다는 0.99가 1에 가까이 있고, 마찬가지로 9가 계속될수록 1에 가까워진다는 것을 관찰할 수 있어. 만약 너의 말대로 1과 ‘0.999⋯’가 다른 수라면, 그 차이를 h라고 하자. 그런데 다음 그림과 같이 9가 충분히 많으면, 1과 0.99⋯9의 차이인 0.00⋯1을 h보다 작게 할 수 있단다.



[그림 Ⅱ-1] [문항 2]에서 교사의 설명
(조한혁, 최영기, 1999: p.608)

그런데 ‘0.999⋯’가 0.99⋯9보다 크므로 위의 그림이 잘못된 그림이 되어버리지. 그래서 1과 0.999⋯의 차이는 없다고 할 수 있단다.

학생 : 선생님의 설명은 옳은 것 같아 보이지만 아직도 납득이 안가는 부분이 있습니다. 0.999⋯는 계속 진행되는 수인데 어떻게 1과 그 수의 차이를 일정한 값인 h라 놓을 수 있나요(조한혁, 최영기, 1999: p.608)?

[질문] 위 대화와 관련하여, 여러분이 교사라면 이러한 학생의 질문에 어떻게 대답하겠습니까?

1과 0.99⋯의 차이 h를 무한소라고 보았던 예비교사 Y는, 이 h는 1과 어떠한 유한소수 $\underbrace{0.99\cdots 9}_{n}$의 차이 $\underbrace{0.00\cdots 1}_{n}$보다도 작게 할 수 있는 변수라고 설명하였다. 한편, 예비교사 R, P, L은 [문항 1]에서의 반응과 같이 ‘가무한적 실무한’의 입장에서 h는 상수가 아니라 학생이 주장하듯이 변수이며, 따라서 무한에 도달하면 무한소가 아닌 0이 된다는 설명을 다시 반복하였다.

- h 역시 변하는 값이라고 생각하면 되지. 그리고 0.99⋯가 계속 진행되는 수라고 생각하면, 0.00....에 끝자리가 1이라는 너의 말에 오류가 있다는 것을 알겠니?(예비교사 R)
- 일정한 값인 h라고 놓는 게 아니라 미지수의

개념으로 봐달라고 하고 싶다. 그리고 그 h가 0이 될 때까지 9의 개수를 한없이 늘릴 수 있다고 설명할 것이다(예비교사 P).

- 0.9, 0.99, 0.999, … 이렇게 차례대로 수직선 위에 나타내보면 1과 점점 가까워지다가 같은 점이 된다고 설명한다(예비교사 L).

그러나 세 예비교사는 0.99…<1을 주장하는 학생의 논리가 타당성이 있으며, 이에 어떻게 대응을 해야 할지 잘 모르겠다고 하였다[4]. 예비교사 S은 [문항 1· 2]에서 0.99…가 1보다 작다는 학생의 주장을, 유한과 무한의 차이도 명확하게 설명하지 않은 채 단순히 유한과 무한이 다르다는 단언으로 기각하는 것은 불충분하다는 의견을 다음과 같이 피력하였다.

교사의 설명과 논리도 이해가 가지만, 학생의 질문과 같이 의구심이 드는 것은 맞는 것 같다. 또한 문제를 보면서 무한이라고 하는 0.99…라는 수가 정말 실수가 맞는지도 모르겠다. 1 보다 작은 수 중 가장 큰 수를 0.99…라고 생각하기 쉬운데, 끝없이 나아간다는 것이 과연 유한과 어떤 차이를 가지고 있는지 모르겠다. 예전에 수업실연 때 무한과 유한의 차이로 인해 생기는 증명논리의 모순[5]에 대해 왜 그런지 그 타당한 이유가 없이 그냥 넘어간 적이 있었는데, 유한이라는 수와 무한이라는 수의 다른 점이라고 하는 것을 명확히 볼 수 있었으면 좋겠다(예비교사 S).

문항 1· 2을 조사한 다음 강의시간, 연구자는 만약 이와 같이 0.99…=1에 대한 반론을 제기하는 학생이 고등학생이라면, 무한등비급수로 0.99…=1을 충분히 설명할 수 있다고 생각하는지를 다시 질문하였다. 네 예비교사는 고등학생이라면 무한등비급수에 의하여 0.99…=1임을 충분히 설명할 수 있을 것이라고 낙관하였으나, 응답하지 않았던 2명 외 세 예비교사는 무한급수공식으로도 문항 1· 2와 같은 반론을 제기하는 학생에게 0.99…=1을 납득시키기는 어렵다고 생각하고 있었다.

- 설명이 옳은 것 같아 보이지만 여전히 직관적으로 납득이 되지 않아 의문을 가질 것 같다. 예비교사인 나 자신도 0.99…=1임이 직관적으로 와 닿지 않는다. 다양한 형식적인 조작을 통해 0.99…와 1이 같다는 것을 자연스럽게 정의함으로서 '그런 거구나'라고 생각하게 되었다. 학생이 0.99…는 1보다 작다고 하면 확실히 아니라고는 말 못하겠다(예비교사 J).
- 이렇게 무한등비급수 방법으로 0.99…=1을 설명하면, 이해하고 받아들일 수는 있을 것 같다. 그런데 그것은 이해된다고 하면서, 그 동안 자기가 배워왔던 것들로는 0.99…≠1 이지 않냐며 납득 못하겠다고 말할 수도 있을 것 같다(예비교사 P).

0.99…가 1과 같은가 아니면 다른가? 라는 질문은 우리가 생각하는 (실)수 체계에 무한소가

4) 본문에서 설명한 범주에 포함되지 않은 두 예비교사의 응답은 다음과 같다. 예비교사 H는 "h가 일정한 값이 아니더라도 크기 비교는 가능하다"라고 하였다. 한편, 예비교사 M은 다음과 같이 0.99…=1에 대한 다른 논증을 제시하겠다고 답변하였다: "1/3=0.33…, 양변에 3을 곱하면, 1=0.99….인 것은 수학적인 수식이니까 믿을 수 있겠니?"

5) 예비교사 S는 지난 학기의 수학교육과정과 교재연구 강의에서, 김남희 외(2011: pp.282-285)에서 소개한 0.99…=1에 대한 다양한 설명 및 무한과 관련된 여러 오개념의 사례를 수업실연형식으로 발표한 경험이 있었다. 여기서 이 예비교사가 '유한과 무한의 차이에 의한 증명 논리의 모순'이라고 언급한 맥락은 다음과 같다. 0.99…라는 순환소수를 1로 고칠 때에는 0.99…를 유한 합처럼 간주하여 $x=0.99\cdots$라고 두고 계산하여 결과를 얻을 수 있지만, 같은 조작을 $x=1+2+2^2+2^3+\cdots$에 적용하면 모순적인 결과를 얻는다. S는 "두 경우 모두 무한으로 연속적인 합을 하나의 문자로 놓고 계산하는 것인데, 하나는 맞고 하나는 모순이라는 것을 제대로 설명하기가 어려웠다"고 하였다. 이와 관련하여 Monaghan(1988)은, 학생들은 무한급수의 수렴, 발산 여부와 관계없이 모든 무한급수는 계속 더해가는 과정이 끝나지 않으므로 '최종적'인 값을 얻을 수 없다고 생각하는 경향이 있음을 지적하고 있다.

있느냐 없느냐라는 질문과 같다. 그러나 앞에서 살펴본 바와 같이 몇몇 예비교사는 1-0.99⋯의 값을 무한소로 생각하고 있었으며, 1-0.99⋯의 값을 무한소가 아닌 0으로 생각한 예비교사들도 이것을 완비순서체라는 실수의 성질보다는 언젠가 무한에 도달할 수 있다는 믿음, 혹은 유한과 무한은 다르다는 단순한 주장으로 정당화하고 있었다. 연구자는 어쨌든 0.99⋯=1은 참이기에 예비교사들이 이와 같은 설명의 부족함에 대하여 별다른 문제의식을 가지고 있지 않다는 점도 관찰할 수 있었다. 과연 학생들이 이와 같은 교사의 설명을 듣고 무한소의 존재성에 대한 강한 직관을 포기할 수 있다고 기대하기는 어렵다. [문항 1·2]에서 0.99⋯<1의 반박과정에서 드러난 예비교사들의 논리적 한계는, 이 예비교사들이 설령 0.99⋯=1에 대한 학교수학수준의 정당화를 잘 설명할 수 있을지라도 0.99⋯=1이 왜 참인지를 정말 수학적으로 이해했다고 보기는 어렵다는 점을 보여주고 있다.

Ⅲ. 예비교사들의 0.99⋯〈1에 대한 반박은 왜 성공하지 못하는가?

완비순서체로 정의된 표준 실수 체계에서는 무한소가 존재하지 않는다. 그러나 표준 실수와 달리 무한소를 포함하는 수 체계는 수학적으로 불가능한 것일까? 이와 관련하여 Medvedev (1998)의 논의를 중심으로 비표준 해석학의 역사를 살펴보고자 한다.

고대 그리스 수학에서는 무한소의 존재를 부정하는 아르키메데스 원리에 상응하는 실진법을 공식적으로 인정하였음에도 불구하고, 무한소 논증 역시 발견술로서 자유롭게 사용되어 많은 결과를 산출하였다. 17세기 Kepler, Cavalieri, Roberval 등 여러 수학자들이 기초 미적분학의 많은 결과를 무한소를 이용한 비형식적 추론으로 발견하면서 전성기를 맞은 무한소 해석학은 실진법을 대체하는 양상을 보이기도 하였다. 특히 Leibniz는 무한소를 허수와 마찬가지로 이상적인 수로 간주하였을 뿐만 아니라, 연속성 원리를 제안하였다(Katz, Sherry, 2012). 그러나 무한소해석학은 초기부터 누적된 무한소 개념에 대한 비논리적 접근으로 위기에 직면하였다. 마침내 19세기의 해석학의 산술화 과정에서, Weierstrass, Dedekind, Cantor는 실수를 무한소를 배제한 완비순서체로 엄밀하게 정의하는 데 성공하였으며, 그 후부터 이와 같은 실수 체계는 연속체(continnum)를 기술하는 유일한 '표준' 수체계의 위치를 차지하게 되었다. 그러나 1960년대에 이르러 수학자 Robinson은 보통의 실수 (standard real number)뿐 아니라 무한소 (infinitesimal)와 infinite number[6]를 포함하는 비표준 실수체계(nonstandard real number system 혹은 초실수 체계: hyperreal number system)를 창안하였다(Vakil, 2011). 이러한 Robinson의 발견으로 Weierstrass의 실수체계에서 배제된 무한소 개념과 Leibniz의 연속성 원리[7]와 같은 무한소 논증이 수학적으로 엄밀하게 정당화되었다(Medvedev,

---

6) 순서체 $\mathbb{F} = <F, +, \cdot, 0, 1, \le>$에서, 자연수 $n \in N$을 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}$와 동일시하자. $\mathbb{F}$의 원소 x가, 모든 양의 정수 n에 대하여 $|x| \le \frac{1}{n}$일 때 x를 무한소(infinitesimal), 적당한 정수 n에 대하여 $|x| \le n$이면 x를 *finite number*, 모든 정수 n에 대하여 $|x| \ge n$이면 x를 *infinite number*라 한다(Keisler, 1994, p.209)

7) Leibniz의 연속성 원리는 비표준해석학의 transfer principle(고전 해석학에서 참인 명제는 비표준 해석학에서도 참이며, 또 그 역도 성립한다)로 정당화되었다(Medvedev, 1998: p.663; Katz, Sherry, 2012 : p.1556; Błaszczyk, Katz, Sherry, 2013: p.61).

1998).

20세기 중후반 Robinson의 비표준 해석학이 정립되기 전, 많은 수학사 학자들은 표준 해석학의 관점에서 무한소는 모호할 뿐만 아니라 모순적인 개념이며, 무한소 논증은 엄밀하지 않은 발견술이라고 기술하였다. 그러나 현대 비표준 해석학의 전개는, 무한히 작은 혹은 무한히 큰 양이 이와 같이 모순적인 개념으로 취급되었음에도 불구하고 어떻게 초기 미적분학의 역사에서 기초가 될 수 있었는지를 설명하고 있다 (Medvedev,1998). Medvedev(1998)는 비표준해석학의 정립으로 표준해석학의 관점에서만 서술되어 온 고전 해석학의 역사에 상당한 수정이 필요하다고 지적하고 있다.

최근 여러 수학교육 연구자들이(K. Katz, M. Katz, 2008; 2010a; 2010b; Ely, 2010; Norton, Baldwin, 2012) 비표준해석학의 관점에서 0.99… <1이라는 학생들의 직관을 수학적으로 엄밀하게 정당화할 수 있다는 점에 주목하고 있다. K. Katz 와 M. Katz(2010b)는 표준 실수로서 0.99… =1임은 잘 알려져 있으나, 0.99…=1에 대한 학생들의 혼란은 표준 실수의 관점이 아닌 실수 혹은 극한 개념이 엄밀하게 정의되기 이전 학생들이 생각할 수 있는 수 체계의 관점에서 이해되어야 한다고 주장하였다.

학교수학에서는 실수를 엄밀하게 정의하지 않으며, 많은 학생들이 직관적으로 생각하는 실수 혹은 수란 통상적인 사칙연산(+, -, ×, ÷) 및 순서관계(<)를 생각할 수 있는 대상, 즉 순서체(ordered field)의 원소이며, 표준 실수체계 뿐만 아니라 비표준 실수체계 역시 순서체이다. 실수의 엄밀한 정의를 배우기 전에 학생들은 0.99… =1를 접하므로, 이러한 학생들이 유리수와 실수, 또 실수와 비표준 실수의 정확한 차이를 인지하기는 어렵다(K. Katz, M. Katz, 2008). K. Katz 와 M. Katz(2010b)는 실수의 정의가 명시되기 이전, 중고등학생들이 생각할 수 있는 수의 관점에서는 0.99…의 해석은 사실 애매하며 0.99…를 1보다 무한소만큼 작은 비표준 실수로도 해석할 수 있음을 설명하고 있다. 따라서 실수 체계에서는 무한소가 존재하지 않음에도 불구하고, 학생들의 입장에서는 무한소를 포함하며 0.99…<1인 수 체계의 가능성을 논리적으로 생각할 수 있다.

Ely(2010)는 한 대학생 Sarah의 무한소개념을 Leibniz와 Robinson의 무한소 개념과 비교 하여, 이 학생의 무한소개념이 표준 실수와 동등하게 무모순인 비표준 실수 개념으로 조직될 수 있는 지식의 단편이었음을 분석하고 있다. Sarah의 무한소 개념은 표준 실수 개념과는 모순되나, 자신의 사고에서는 수학적· 인지적으로 무모순일 뿐만 아니라 표준 개념과 동등한 적용가능성을 가진 것이었다. 이 점에서 Ely는 이와 같은 학생의 무한소 개념은 표준 개념의 입장에서 정정되어야 할 오개념(misconception)이 아닌 비표준 개념(nonstandard conception)이라고 보았다. 학생들의 무한소 개념이 단순한 오개념이 아니라, 비록 표준개념과 다를지라도 마찬가지로 수학적으로 무모순인 비표준개념이라는 Ely의 해석은, 무한소 개념을 부정하는 표준 실수 개념의 교수에도 불구하고 대학에서 수학을 전공한 몇몇 예비교사의 사고 속에서도 왜 무한소 개념이 끝내 '정정'되지 않은 채 끈질긴 자생력을 가질 수 있는지를 설명하고 있다. Sarah와 같이 비표준 개념을 가진 학생들은 자신의 체계에서는 0.99… =1와 같은 결과를 인정할 수 없으나, 시험을 위하여 0.99…=1과 같은 결과를 강제로 암기하게 된다. Ely(2010)는 결국 이러한 학생들이 수학을 그 이유를 납득하지 못함에도 불구하고 무조건적으로 어떤 결과들을 강요하는 독단적인 학문으로 생각하게 될 수밖에 없다는 점을 지적하고 있다.

Ⅳ. 결론 및 논의

19세기 해석학의 산술화 이후, Wierstrass의 complete Archimedean ordered field는 연속체를 기술할 수 있는 수학적으로 정당한, 절대적으로 참인 유일한 수 체계로 간주되어왔다(Medvedev, 1998; Błaszczyk, Katz, Sherry, 2013). 그러나 비표준 실수체계의 발견으로 Wierstrass의 실수 체계는 유일한 수 체계로서의 위치를 상실하였으며, 이에 대해 Putnam은 다음과 같이 말하고 있다.

> 만약 epsilon-delta 논증을 발견하지 못하였더라면, 그 대신 무한소를 공리화 할 수 있었을 것이다. 즉, 미적분학이 Wierstrass 방식으로 정당화되지 않았다면, Robinson이 최근 발견한 무한소를 포함하는 초실수 체계에 기반한 접근과 같이, 표준 해석학의 접근과 동등하게 무모순인-어쨌든 다른 방식으로 정당화될 수 있었을 것이다(Putnam, 1975: pp.529-530).

Sierpińska(1987), 박선화(1998: pp.145-147), 윤혜근(2008: pp.44-47)은 0.99⋯=1를 수용하는 상당수의 학생들이 학교수학에서 통상적으로 제시하는 증명이 아닌 다른 논리에 의존하여 0.99⋯=1임을 수용하고 있음을 보고하고 있다. 연구자는 예비교사들이 0.99⋯=1에 대한 학교수학의 공식적인 설명 방법을 알고 있는지를 확인하는 대신, 0.99⋯가 1보다 작다는 주장을 반박하게 함으로서, 이 과정에서 드러나는 예비교사들이 0.99⋯=1을 수용하는 '다른' 이유를 분석하고자 하였다.

'0.99⋯가 1과 같은가?'라는 질문은 '수 체계에 무한소가 존재할 수 있는가?'라는 질문과 같다. 일부 예비교사는 1-0.99⋯의 차이를 무한소라고 생각하고 있었으며, 이러한 무한소는 무시될 수 있기에 0.99⋯=1이라고 설명하였다. 한편, 표준 실수의 입장과 동일하게 1-0.99⋯의 차이가 무한소가 아닌 0이라고 본 예비교사들은 유한과 무한은 어쨌든 다르므로 무한에서는 유한에서 벌어지지 않았던 일이 일어날 수 있다는 단순한 형이상학적 혹은 심리적· 직관적 신념에 의존하여 무한소가 존재한다는 주장을 반박할 수 있다고 생각하고 있었다. 또 이와 같은 논리적으로 부족한 반박에도 불구하고 여하간 0.99⋯=1는 '참'이라는 생각으로 별다른 문제의식을 느끼지 않는다는 점도 관찰할 수 있었다. 예비교사들의 이와 같은 반응은, 이들이 표준 실수 체계에서 0.99⋯=1가 참이라는 사실을 완비순서체라는 실수의 가정에 의한 논리적 결과로 이해했다기보다는, 단순히 0.99⋯=1를 절대적으로 옳은 것으로 수용하고 있음을 시사한다. 한편, 이와 같이 0.99⋯=1은 절대적으로 참이라는 인식은 Wierstrass의 실수 체계만이 연속체를 기술할 수 있는 수학적으로 옳은 유일한 수체계라는 표준 실수에 대한 독단적 신념과 무관하지 않다. 학생들이 교과서 혹은 교사의 권위에 의존하여 0.99⋯=1임을 받아들이듯이(박선화, 1998; 조한혁, 최영기, 1999; 윤혜근, 2008; Ely, 2010), 교사들은 표준 실수 체계만이 수학적으로 정당한 유일한 수체계라는 학문적 도그마에 의존하여 0.99⋯=1이 참이라고 믿고 있는 것일 수도 있다.

예비교사들의 0.99⋯<1의 반박과정에서 발현된 교과지식은, 대학에서 배운 학문수학과 연결되지 못한 채 학교수학에서 배웠던 상식 수준에 그대로 정체되어 있었다. Buchholtz외(2013)의 예비중등교사의 교과지식에 대한 국제비교연구에서도, 1과 0.99⋯사이에는 다른 실수가 존재할 수 없음을 완비성공리에 의하여 정당화하는 등 0.99⋯=1라는 사실을 학교수학 이상의 수학적 관점에서 설명할 수 있었던 예비교사는 소수에 지나지 않았다. 많은 예비교사들은 학창시절 공부한 학교수학으로 자신이 충분한 교과내용지식을 가지고 있다고 생각한다(Ball, 1988). 그러나

0.99⋯=1이 야기하는 교수학적 문제와 관련하여, 무한소를 포함하나 표준 실수체계와 마찬가지로 무모순인 비표준 실수체계의 존재는 평범한 중학생들이 제기하는 0.99⋯가 1이냐 아니냐의 의문도 학교수학에서의 0.99⋯=1에 대한 통상적인 설명 혹은 예비교사들이 제시한 것과 같은 직관적인 정당화만으로는 대답할 수 없는 질문임을 보여주고 있다. 예비교사교육에서는 이러한 문제의식을 제기함으로서 예비교사들이 학교수학과 학문수학사이의 단절을 극복할 수 있는 동기를 부여할 수 있을 것이다. 본 논문이 0.99⋯=1로 야기되는 교수학적 문제를 성찰하는 데 필요한 교과지식의 진단과 개발, 더 나아가 0.99⋯=1를 어떻게 가르칠 것인가에 대한 논의의 토대가 되기를 기대한다.

참고문헌

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

박선화(1998). **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

윤혜근(2008). **유리수와 소수 단원에서 교사의 지도방법과 학생오류에 대한 인식 조사**. 이화여자대학교 석사학위논문.

조한혁, 최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. **학교수학,** 1(2), pp. 605-615.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40–48.

Błaszczyk, P., Katz, M., Sherry, D.(2013). Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking. *Foundations of Science, 18*(1), pp. 43-74.

Buchholtz, N., Leung, F. K., Ding, L., Kaiser, G., Park, K., & Schwarz, B. (2013). Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint. *ZDM, 45*(1), 107-120.

Burn, B.(1990). Filling Holes in the Real Line. *The Mathematical Gazette, 74*(469), pp. 228-232.

Burroughs, E. A., & Yopp, D. (2010). Prospective elementary mathematics teachers' conceptions of decimals with single repeating digits. *Investigations in Mathematics Learning, 3*(1), 23–42.

Chappell, T.(2013). Plato on Knowledge in the Theaetetus, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*(Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.). http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/plato-theaetetus/

Choi, Y., Do, J. (2005). Equality involved in 0.999... and (-8)⅓. *For the Learning of Mathematics, 25*(3), pp.13–15,36.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS analysis: part 2. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), pp. 253–266

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999... < 1?, *The Teaching of Mathematics, 11*(1), pp. 35–40.

Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), pp. 117–146.

Katz, K., Katz, M.(2008). A strict non-standard inequality.999...<1. arXiv preprint arXiv:0811.0164.

Katz, K., Katz, M. (2010a). Zooming in on infinitesimal 1－.9. in a post-triumvirate era. *Educational Studies in Mathematics, 74*(3), pp.

259 – 273.

Katz, K., Katz, M. (2010b).When is 0.999⋯less than 1?. The *Montana Mathematics Enthusiast, 7*(1), pp.3 – 30.

Katz, M., Sherry, D.(2012). Leibniz's laws of continuity and homogeneity. *Notices of the American Mathematical Society, 59*(11), pp. 1550-1558.

Keisler, H. J.(1994). The hyperreal line. *In Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*, ed. by P. Erlich, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 207-237.

Krauss, S., Baumert, J., Blum, W.(2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs, *ZDM Mathematics Education, 40*, pp. 873 – 892

Medvedev, F. A.(2008). Nonstandard analysis and the history of classical analysis, *The American Mathematical Monthly, 105*(7), pp. 659-664.

Monaghan, J.(1988) Real mathematics, *The Mathematical Gazette, 72*, pp. 276-281.

Norton, A., Baldwin, M.(2012) Does 0.999... really equal 1?. *Mathematics Educator, 21*(2), pp. 58-67.

Richman, F. (1999). Is 0.999... = 1?. *Mathematics Magazine, 72*(5), pp. 396 – 400.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), pp. 371 – 396.

Tall, D. O., Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82*, pp. 44 – 49.

Vakil, N. (2011). *Real analysis through modern infinitesimals*. New York: Cambridge University Press.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9*(1), 5－28.

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999⋯=1. *Journal of Mathematical Behavior, 30*, 304－318.

How Do Pre-Service Teachers Disprove 0.99…〈1?

Lee, Jihyun (Incheon National University)

This paper analyzed pre-service teachers' justification of 0.99…=1 from their disproof of 0.99…<1. Some pre-service teachers thought of the difference between 0.99… and 1 as an infinitesimal. On the contrary, the others claimed that the difference between 0.99… and 1 was zero as the standard real, but were content with their intuitive justifications. The pre-service teachers' limitation revealed in the process of disproving 0.99…<1 can be closely related to the orthodox view: the standard real number system is the only absolutely true number system. The existence of nonstandard real number system in which 0.99… is less than 1, shows that the plain question of whether or not 0.99… equals 1, cannot be properly answered by common explanations of textbooks or teachers' intuitive justification.

* Key Words : 0.99…=1, Content knowledge(교과지식), Real number system(표준 실수체계), Infinitesimal(무한소), Nonstandard real number system(비표준 실수체계).

논문접수 : 2014. 7. 19
논문수정 : 2014. 8. 10
심사완료 : 2014. 8. 19