대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 3, 409 ~ 444. Sep 2014

모델링 활동을 통한 메타수준 학습에 대한 연구

박 진 형* · 이 경 화**

수학교육 연구 공동체에서는 모델링 활동을 통한 수학 학습에 대한 논의들이 지속되어 왔다. 모델링 활동은 대안적인 수학 교수 학습 방법으로 논의되어 왔으나, 모델링 활동을 통하여 이루어지는 수학 학습은 어떠한 성격을 갖는지, 그리고 이는 어떠한 과제 설계와 수업 실행을 통하여 달성할 수 있는지에 대한 합의점은 도출되지 못한 실정이다. 모델링 활동을 통한 수학 학습을 시도해 온 선행 연구들의 논의로부터, 본 연구에서는 모델링 활동이 메타수준의 수학적 담론 생성과 메타규칙의 변화를 포함하는 메타수준 학습을 촉진할 수 있을 것으로 판단하였다. 이에 본 연구에서는 메타수준 학습을 촉진할 수 있는 모델링 과제 설계와 수업 실행 방안을 도출하고, 이를 실행하여 수학 교수 학습에서 모델링 활동의 잠재력을 확인하는 데 목적을 둔다.

Ⅰ. 들어가는 글

모델링 활동은 대안적인 수학 교수 학습 방법으로 수학교육 연구 공동체에서 폭 넓은 주목을 받아왔다(English & Sriraman, 2010). 모델링에 대한 관점은 단일하지 않지만(Lesh & Fennewald, 2010), 여러 연구자들은 공통적으로 학생들이 문제 상황으로부터 모델을 구축하고, 문제를 해결하며, 모델을 문제 상황에 비추어 재해석하는 활동의 교육적 의의를 논의해왔다(Gravemeijer, 1999; Lesh & Doerr, 2003).

이러한 모델링 활동은 학생들의 수학적 사고를 발달시킬 수 있는 방안으로 논의되어 왔다(손홍찬 & 류희찬, 2005; 신은주 & 이종희, 2004; Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013; Lesh & Doerr, 2003; Park, Park, Park, Cho & Lee, 2013). 모델링 활동을 통하여 학생들은 자신들의 비형식적 활동을 형식적 추론으로 발달시킬 수 있고 (Gravemeijer, 1999), 수학적 사고를 점검하고 수정, 개선할 수 있으며(Lesh & Harel, 2003), 자신들의 행동을 내면화할 수 있음이 알려져 있다 (Park et. al., 2013).

이처럼 모델링 활동을 통한 학생들의 수학 학습에 대한 여러 논의가 이루어져 왔음에도 불구하고, 모델링 활동을 통하여 이루어지는 수학 학습의 성격은 무엇인지, 그리고 이를 달성하기 위한 구체적인 방안이 무엇인지에 대한 합의점은 여전히 도출되지 못한 실정이다(Grootenboer, 2010). 그러므로 모델링 활동이 학생들에게 어떠한 수학적 탐구의 기회를 제공할 수 있는지, 그리고 이를 지원하기 위한 방안은 무엇인지를 분명히 하여, 수학 교수 학습에서 모델링 활동의 잠재력을 확인하는 연구가 필요하다고 판단된

* 서울대학교 대학원, demxas0@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr (교신저자)

다.

선행 연구자들은 인간 활동의 압축과 이에 대한 조작을 통하여 새로운 수학적 대상이 생성된다는 점을 논의해온 바 있으며(Sfard, 1991, 2008), Sfard(2008)는 새로운 수학적 대상의 생성이나, 이에 대한 인간 활동을 규제하는 규칙인 메타규칙의 변화를 포함하는 학습을 메타수준 학습으로 정의한 바 있다. 모델링 활동은 학생들이 자신들의 활동을 조직화하여 압축하는 과정을 지원하며(Gravemeijer, 1999), 이에 대한 반성을 통한 활동의 수정, 개선을 촉발함으로서 압축된 활동에 대한 조작의 기회를 제공한다는 점에서(Lesh & Harel, 2003) 수학적 대상의 생성과 이에 대한 새로운 조작의 방법을 학습하는 과정을 촉진할 수 있을 것으로 기대된다.

이에 본 연구에서는 우선 모델링 활동을 통한 메타수준 학습 가능성과, 학생들의 메타수준 학습을 염두에 둔 모델링 과제의 설계 및 수업 실행 방안을 이론적으로 모색한다. 또한, 본 연구에서는 이러한 이론적 방안을 구체화한 모델링 과제와 수업을 실행함으로서, 모델링 활동을 통한 학생들의 탐구 과정에서 메타수준 학습이 일어나는지, 일어난다면 어떻게 일어나는지에 대하여 확인하는 데 목적을 둔다.

Ⅱ. 이론적 배경

이 장의 목적은 크게 네 가지이다. 첫째, 메타수준 학습에 대한 선행 연구들의 논의를 되짚어 봄으로서, 본 연구에서 논의하고자 하는 메타수준 학습의 의미를 분명히 한다. 둘째, 수학 교수학습에서 모델링 활동의 잠재력에 대하여 논의해 온 선행 연구들을 검토함으로서, 모델링 활동을 통한 메타수준 학습의 가능성을 이론적으로 타진한다. 셋째, 이상의 선행연구 검토 결과를 토대로 메타수준 학습을 촉진할 수 있는 모델링 과제 설계 및 수업 실행 방안에 대하여 이론적으로 논의한다. 넷째, 본 연구에서 이론적으로 논의한 사항들을 확인하기 위한 소재로 확률 영역을 택한 근거와, 확률 영역의 탐구에서 모델링 활동을 통한 메타수준 학습의 의미를 분명히 한다.

1. 메타수준 학습

여러 연구자들은 메타수준 학습에 대하여 주목해왔다(Nachliele & Tabach, 2012; Sfard, 2008). Sfard는 메타수준 학습을 메타규칙의 변화와 학생들이 참여하고 있는 수학적 담론에 대한 메타수준 담론의 생성을 포함하는 학습으로 정의한 바 있다(Nachliele & Tabach, 2012; Sfard, 2007, 2008).

Sfard(1991, 2008)에 따르면, 메타수준의 담론은 담론에 대한 담론이다. 예를 들어서, 자연수는 인간의 세기(counting) 활동이 압축(condensation)과 물화(reification)의 과정을 거치면서 생성된다(Sfard, 1991, 2008). 이 가운데 물화의 단계에서는 압축된 ‘세기’ 활동을 메타적인 관점에서 그 자체로 ‘수’라는 새로운 조작의 대상으로 고려하게 되는 바, Sfard(2008)는 이를 존재론적 전환으로 해석한다. 이러한 점에서, 자연수에 대한 담론은 ‘세기’에 대한 담론에 비하여 상대적으로 메타수준의 담론으로 논의된다(Sfard, 2008). 세기 활동으로부터 자연수가 생성되는 과정과 유사하게, 자연수에 대하여 나눗셈이라는 연산을 새로이 수행함으로서 생성되는 양의 유리수에 대한 담론은 자연수에 대한 담론에 비하여 상대적으로 메타수준의 담론이다(Sfard, 1991). 이처럼 Sfard는 수학적 담론이 위계적인 여러 층위들로 이루어져 있음을 논의하였다(Sfard, 1991, 2008).

Sfard(1991, 2008)는 압축된 인간 행동이 새로운 수학적 대상의 지위를 가지기 위해서는 이에 대한 조작이 이루어져야 한다는 점을 강조하였다. 예를 들어, 자연수에 대한 나눗셈 연산이 압축되는 것에 이어서, 압축된 바에 대한 연산이 이루어지는 과정에서 양의 유리수가 수학적 대상으로 고려될 수 있다. 즉, 자연수들 사이에 수행된 나눗셈 연산의 결과인 양의 유리수에 다시 연산이 수행되는 시점에서 양의 유리수는 수학적 대상으로 물화된다(Sfard, 1991, 2008).

또한, Sfard(2007, 2008)는 상위 수준 담론의 생성 과정에서 인간 주체의 활동이 언제(when), 어떻게(how) 수행되어야 하는지를 규제(constraint)하는 메타규칙의 변화가 수반된다는 점을 강조하였다. Sfard는 수학적 담론의 규칙들을 수학적 대상들의 행위를 규제하는 대상수준의 규칙과 이에 대한 인간 활동을 규제하는 메타수준 규칙으로 범주화 한 바 있다(Sfard, 2007, 2008). 예를 들어, '2-1=1'은 수학적 대상들 사이의 관계를 규정하는 바, 대상수준의 규칙이다. 다른 한편으로, '자연수 체계 내에서는 큰 수에서 작은 수를 뺄 수 있다'와 같은 규칙은 인간 주체가 연산을 수행할 수 있는 조건(when)을 규정한다는 점에서 메타수준의 규칙이다. 이때, 자연수에 대한 담론에서는 큰 수에서 작은 수만을 뺄 수 있으나, 정수에 대한 담론에서는 더 작은 수에서 큰 수를 빼는 것이 가능한 바, 메타수준의 학습은 대상수준의 규칙이 아닌, 이러한 메타규칙의 변화를 수반하는 학습이라는 것이다.

메타수준 학습에 대한 이러한 선행 연구들의 논의로부터, 메타수준 학습은 한편으로 학생들로 하여금 자신들의 활동을 압축하고, 이에 대한 반성을 통하여 자신들의 압축된 활동에 대한 조작의 생성을, 다른 한편으로 수학적 대상들에 대한 인간 활동을 규제하는 메타규칙 변화의 의식을 꾀하는 것이 핵심임을 확인할 수 있다.

선행 연구들에 따르면, 이러한 메타수준의 학습은 담론적 갈등(discursive conflict)으로부터 촉발됨이 알려져 있다(Sfard, 2008). Sfard에 따르면, 담론적 갈등이란 담론의 참여자들이 동일한 기표(signifier)를 각기 다른 규칙에 기반을 두고, 서로 다른 방식으로 사용함으로서 촉발되는 갈등이다(Sfard, 2008). 한편으로, 널리 연구되어 왔던 인지적 갈등(cognitive conflict)이 학생의 오류에서 비롯한다면, 다른 한편으로 담론적 갈등은 각 주체가 서로 다른 층위의 담론에서 합의된 다른 규칙에 기반을 둔 의사소통 과정에서 촉발된다. 예를 들어서, 자연수에 대한 담론에서는 '두 수를 곱한 결과는 원래의 두 수보다 항상 크다'라는 진술이 참인데 반하여, 양의 유리수에 대한 담론에서는 이 진술이 거짓인 바, 이처럼 한 층위의 담론에서는 잘 정의된 규칙이 다른 층위에서는 상충되는 경우에 담론적 갈등이 발생할 수 있다(Cobb, 2009).

Nachliele & Tabach(2012)에 따르면, 이러한 담론적 갈등의 해소와 메타수준 학습은 학생들의 '반성적 실천(reflective practice)'을 촉진함으로써 지원할 수 있다. 이들에 따르면, 반성적 실천이란 학생들이 서로 다른 층위에 자리한 담론들 사이의 관계를 반성하는 것이다. 앞서 확인한 예를 통하여 살펴보면, 자연수에 대한 논의와 양의 유리수에 대한 논의를 함께 반성하고, 이러한 상충되는 규칙들을 의식하도록 함으로서, 담론적 갈등을 해소하고 상위 수준의 조작으로의 이행을 지원할 수 있다는 것이다.

이러한 메타수준의 학습은 학생들에게 새로운 수학적 대상이나 절차를 학습하도록 하는 과정과 관련된다는 점에서 수학교육의 핵심적인 이슈로 논의되어 왔으나, 여전히 도전적인 연구 분야로 알려져 있다(Nachliele & Tabach, 2012; Sfard, 2008). 이러한 점에서, 본 연구에서 모델링 활동을 통하여 메타수준 학습을 시도하는 것

은 이러한 교수학적 문제 해결의 실마리를 모색한다는 점에서도 의의를 갖는다.

2. 모델링 활동을 통한 수학 학습

여러 선행 연구자들은 모델링 활동을 통한 수학적 사고의 발달에 대하여 논의해온 바 있다 (Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013; Gravemeijer, 1999; Lesh & Harel, 2003; Park et. al., 2013). 연구자들은 공통적으로 현실적인 문제 상황으로부터 학생들의 모델링 활동이 출발한다는 점을 지적해왔다(Gravemeijer, 1999; Lesh & Doerr, 2003). Gravemeijer(1999)는 현실적인 문제 상황이 점진적인 수학화의 출발점이 될 수 있으며, 동시에 학생들에게 경험적으로 현실적인 맥락의 탐색이 중요하다는 점을 강조한 바 있다. 또한, 이러한 문제 상황에 대한 학생들의 모델링 활동은 점차 수학적인 추론으로 이행할 수 있다(Gravemeijer, 1999; Lesh & Harel, 2003).

선행 연구들은 학생들이 모델을 통하여 문제 상황을 탐구하고, 모델을 문제 상황에 비추어 재해석하고 수정하는 과정에서, 자신들의 수학적 사고에 대한 반성이 촉진될 수 있다는 점을 확인한 바 있다(Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013; Park et al, 2013). Ärlebäck, Doerr, & O'Neil (2013)에 따르면, 문제 상황으로부터 모델을 수립하는 모델 개발 활동은 학생들이 자신의 사고를 표현하는 과정을 지원하며, 모델을 통하여 문제 상황을 탐구하는 모델 탐구 활동은 학생들이 수학적인 사고를 수정, 개선할 수 있는 기회를 제공함을 확인하였다. 또한, Park et. al.(2013)은 학생들이 모델을 문제 상황에 비추어 재해석하는 과정이 학생들의 행동의 반성과 내면화를 촉진할 수 있음을 확인한 바 있다. 나아가, Gravmeijer(1999, 2008)는 이러한 탐구과정에 대한 반성을 통하여, 학생들이 문제 상황에 대하여 구축한 모델(model of)이 수학적 추론에 대한 모델로(model for) 이행할 수 있으며, 이 과정에서 학생들의 활동의 압축과 물화가 일어날 수 있을 것이라는 점을 이론적으로 논의한 바 있다 (Gravemeijer, 1999).

이러한 연구 결과들은 모델링 활동이 학생들로 하여금 자신들의 수학적 추론을 반성하여 사고를 점검하고, 수정하며 개선하는 것을 지원할 수 있음을 지적한다는 점에서, 학생들이 자신들의 활동을 사고의 대상으로 삼게 하는 반성적 사고를 촉발할 수 있는 잠재력을 가지고 있음을 시사한다(Lesh & Doerr, 2003). 또한, 모델링 활동과 이 과정에서 구축한 모델이 학생들의 활동의 압축과 물화, 그리고 메타 수준에서의 조작을 지원한다는 점에서. 모델링 활동이 학생들로 하여금 메타 수준의 담론 생성을 경험할 기회를 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

Sfard(2008)에 따르면, 메타수준 학습은 학생들에게 새로운 수학적 대상과 절차를 학습하도록 한다는 점에서 중요하면서도 어려운 과정이라는 점이 논의되어 왔다. 특히, Sfard의 관점에서 메타수준 담론 생성 과정의 핵심 가운데 하나는, 수학적 활동의 압축과 물화가 이러한 활동에 대한 상위 수준 조작의 내면화와 함께 이루어진다는 점이다(Sfard, 1991; 정연준, 2013). 이에 비추어볼 때, 모델링 활동은 토대 담론에 자리한 문제 상황에 대한 모델 생성과 더불어, 구축된 모델에 대한 반복적인 재해석과 수정, 개선을 필요로 하는 바, 조작의 압축과 압축된 조작에 대한 반성을 통한 상위 수준 조작을 함께 촉발할 수 있을 것으로 예상된다(Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013; Park et al, 2013). 이러한 점에서 모델링 활동은 토대 담론으로부터 학생들의 활동을 촉발하고, 모델 구축 과정에서 활동의 압축을 촉진하며 이와 함께 이루어지는 모델의 수정 개선 과정에서 학생들로 하여금 활동의 반성과

상위 수준 조작을 함께 시도하도록 함으로서 메타수준 학습을 지원할 수 있을 것으로 판단된다.

이상의 선행연구들로부터 연구진은 모델링 활동이 학생들의 메타수준 학습을 촉진할 수 있을 것으로 고려하였다. 이하에서는 모델링 활동을 통한 메타수준 학습을 시도하기 위한 모델링 과제 및 수업 설계 방안을 도출하고, 이를 실행하여 모델링 활동을 통한 메타수준 학습이 일어나는지, 일어난다면 어떻게 일어나는지를 확인하도록 한다.

3. 모델링 과제 및 수업 설계 방안

모델링 활동은 다음과 같은 단계들을 포함한다는 점이 알려져 있다(Borromeo Ferri, 2006; Galbraith & Stillman, 2006): (1) 문제 상황을 단순화하고 조직화하는 단계, (2) 모델을 구축하는 단계, (3) 모델을 활용하여 문제를 해결하며, 문제 해결 결과를 문제 상황에 비추어 해석하고 모델을 수정, 개선하는 단계.

이에 이 절에서는 메타수준 학습을 촉진하기 위한 과제 설계와 수업 실행 방안을 이상의 모델링 활동의 각 단계에 비추어 논의하고자 한다. 구체적으로, 이 절에서는 모델링 활동의 출발점이 되는 문제 상황, 이로부터 촉발된 모델의 구축, 그리고 모델을 활용한 문제 해결과 모델의 수정 개선을 어떻게 시도하는 것이 메타수준 학습을 촉진하는 데 적절할 것인가에 대하여 논의한다.

가. 모델링 문제 상황

모델링 활동을 통한 수학 학습을 꾀한 선행연구들에서는 공통적으로 현실적인 문제 상황이 출발점이 되어야 한다는 점이 강조되어 왔다(Gravemeijer, 1999; Lesh & Doerr, 2003). 모델링 활동의 문제 상황은 크게 (1) 문제 해결에 필요한 정보가 과다하거나 부족한 상황, (2) 문제 해결에 필요한 정보만이 제공되는 상황으로 범주화 가능하며(Maaß, 2010), 많은 모델링 관련 논의들은 주로 학생들로 하여금 첫 번째 유형의 도전적인 복잡한 문제 상황을 출발점으로 채택해왔다(e.g., Kaiser & Schwarz, 2006; Lesh, Middleton, Caylor, & Gupta, 2008). 예를 들어, Lesh, Middleton, Caylor, & Gupta(2008)는 학생들에게 문제 상황과 관련된 대량의 자료를 제공하여 이를 공학 도구를 활용하여 다루면서 자료의 패턴을 찾고, 문제 상황을 구조화하는 모델링 활동에 참여하도록 한 바 있으며, 이는 문제 해결에 필요한 정보가 과다한 과제를 활용한 사례이다. 다른 한편으로 Kaiser & Schwarz (2006)는 학생들이 문제 상황과 관련된 여러 정보들을 직접 탐색하면서 모델링을 수행하도록 한 바 있으며, 이는 문제 해결에 필요한 정보가 부족한 과제를 활용한 사례이다. 마지막으로, Van den Heuvel-Panhuizen(2003)은 우리의 교과서에 일반적으로 제시되는 문장제 문제와 유사한 형태의 문제 상황으로부터, 앞서 예로 든 두 연구에 비해서는 다소 소박한 모델을 수립하여 탐구하도록 한 바 있으며 이는 문제 해결에 필요한 정보만을 제공한 과제를 활용한 사례이다.

선행 연구들에 따르면, 문제 상황을 단순화하고, 구조화하며 이에 포함된 정보가 문제 해결에 충분한지의 여부를 판단하는 과정은 학생들에게 대단히 어렵다는 점이 알려져 있으며(Galbraith & Stillman, 2006), 이는 모델 구축과 이를 활용하는 탐구에 필요한 수학적 지식의 숙달만으로는 달성하기 어렵다는 점이 확인된 바 있다(Blomhøj & Kjeldsen, 2006). 이로 인하여, 일부 연구자들은 이러한 모델 수립에 필요한 역량의 함양과 수학적 대상, 절차 등의 탐구를 함께 시도한 바 있으나, 이들을 동시에 추구하는

것 또한 쉽지 않다는 점이 확인되었다(Blomhøj & Kjeldsen, 2006). 특히, 학생들이 주어진 상황에 대한 모델을 구축하기 위한 선행 지식을 충분히 갖추고 있더라도, 학생들에게는 문제 상황을 기술할 수 있는 모델을 수립하는 과정이 대단히 도전적이라는 점이 확인된 바 있다(박진형, 이경화, 2013). 이러한 선행 연구결과들에 비추어볼 때, 모델링 활동을 통한 수학 교수 학습의 출발점인 문제 상황을 복잡하게 구성하는 것은 학생들로 하여금 수학적 대상이나 절차에 대한 탐구 이외에 여러 가지 도전적인 국면을 야기할 가능성이 높다.

Anderson, Reder & Simon(1996)은 설사 복잡한 현실의 문제를 해결하는 능력의 함양을 목표로 한 수업을 실행하더라도, 이를 달성하기 위한 교수 학습이 반드시 복잡한 상황에서 출발할 필요가 없다는 점을 지적한 바 있다. Gravemeijer(1999)에 따르면, 모델링 활동을 통한 수학 학습 과정에서 현실적인 문제 상황의 핵심적인 역할은 학생들의 비형식적 활동과 능동적인 참여를 촉발하는 것이며, 학생들의 모델링 활동은 문제 상황에 대한 모델 구축에서 자신들의 조직화 활동에 대한 모델 구축으로 옮겨가야 한다. 이에 본 연구에서는 문제 해결에 필요한 정보가 과다하거나 부족하여 학생들에게 다소 복잡한 문제 상황보다는, 문제 해결에 필요한 정보만이 제공되는 간단한 문장제 문제의 상황으로부터 출발하는 모델링 과제를 설계함으로서 학생들의 상위 수준 조작의 배경이 될 수 있는 비형식적인 활동과 능동적인 참여를 촉발하는 것이 학생들의 메타수준 학습을 촉진하는 데 적절할 것으로 판단하였다.

나. 모델의 구축

여러 선행 연구자들은 공통적으로 학생들의 탐구 과정에서 다루어지는 모델의 중요성을 논의해왔음에도 불구하고, 이들 연구자들이 사용하고 있는 모델이라는 용어가 의미화 하는 바는 각기 다르다(Lesh & Fennewald, 2010). 이러한 선행 연구자들이 모델이라는 단어를 통하여 의미화 하는 바는 크게 (1) 문제 상황의 메커니즘을 기술하는 모델(Blum, Alsina, Biembengut, Bouleau, Confrey, Galbraith, Ikeda, Lingerfjard, Muller, Niss, Verschaffel, Wang, Hodgson, & Henn, 2002; Lesh & Doerr, 2003)과 (2) 학생들의 조직화된 활동을 의미화 하는 모델(Gravemeijer, 1999)로 범주화할 수 있다.

모델링 활동을 통한 수학 학습을 시도한 여러 연구자들은 주로 전자의 관점에서 학생들에게 "문제 상황에 포함된 대상, 자료, 관계, 조건 등을 수학으로 번역한 것(Blum et. al., 2002, p. 153)"에 해당하는 모델을 수립하는 것을 목표로 하는 과제를 제공하고, 이 과정에서 수학 학습이 수반된다는 점을 지적해왔다(e.g., Blomhøj & Kjeldsen, 2006; Lesh & Harel, 2003).

다른 한편으로, 학생들의 조직화된 활동을 의미화 하는 모델의 구축과 활용을 강조하는 입장의 연구자들은, 학생들로 하여금 현실적인 문제에 대한 자신들의 탐구 과정을 조직화하게 함으로서, 학생들은 우선 문제 상황에 대한 모델을 구축할 수 있으며, 교수자는 이를 학생 자신들의 조직화 활동에 대한 모델로 발달시키는 과정을 지원해야 한다는 점을 강조한 바 있다(Gravemeijer, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). 예를 들어, Gravemeijer(1999)는 현실적인 문제 상황에 대한 학생들의 탐구는 문제 상황에 대한 모델링 활동에서 출발하여, 점차 자신들의 추론 과정에 대한 모델로 발달하도록 지원해야 한다는 점을 강조한 바 있다. 이러한 관점에서 학생들이 탐구 과정에서 수립하게 되는 모델은 한편으로 문제 상황에 대한 모델이며(model of situation), 다른

한편으로 자신들의 조직화 활동과 추론에 대한 모델(model for reasoning)로서 기능한다 (Gravemeijer, 1999).

주목할 부분은 모델링 활동이 학생들의 활동의 압축과 물화를 지원하고 상위 수준의 탐구를 촉진하기 위해서는, 학생들이 구축한 모델이 의미화 하는 바가 문제 상황보다는 학생들의 탐구 과정이 되어야 한다는 점이다(Gravemeijer, 1999). 모델링 활동의 교육적 의의를 논의해온 여러 연구자들은 공통적으로, 학생들이 모델링 과제를 해결하는 과정에서 구축한 모델이 한편으로 문제 상황을, 다른 한편으로 문제 상황에 대한 자신들의 사고와 추론을 함께 의미화 한다는 점을 지적한 바 있다(Gravemeijer, 1999; Lesh & Doerr, 2003). 복잡한 현실의 문제 상황에 대한 메커니즘을 기술하는 모델을 수립하는 활동을 강조한 연구자들 역시, 학생들의 수학적 탐구는 문제 상황 속에서 도출되는 것이 아니라 학생들이 모델을 구축하는 과정에서 경험한 사고를 수정하고 개선하는 과정에서 촉발된다는 점을 강조하였다(e.g., Lesh & Doerr, 2003). 특히, Gravemeijer (1999)는 탐구 초기에 학생들이 구축하게 되는 모델은 문제 상황을 의미화 하게 되나, 점진적으로 학생들의 수학적 활동, 수학적 사고를 의미화 하는 모델로 그 기능이 변화하도록 지원할 수 있다는 점을 강조한 바 있다.

이러한 실증적인 연구 결과와 더불어, 수학학습에 대한 수학교육 연구 공동체의 대부분의 논의가 수학적 대상이나 절차, 규칙 등의 생성이 문제 상황 그 자체에 내재하던 바를 도출하는 것이 아니라, 이에 대한 인간 활동의 조직화로부터 발생한다는 데 동의하고 있으므로(홍진곤, 2012), 모델링 활동을 통하여 문제 상황을 최적화된 방식으로 기술하는 모델을 구축하는 활동보다는, 문제 상황으로부터 촉발된 학생들의 활동을 조직화하는 과정을 촉진하는 데 초점을 두는 것이 학생들의 수학 학습을 지원하는데 타당하다고 판단된다.

이에 본 연구에서는 학생들로 하여금 문장제 문제의 형태로 된 확률 탐구 과제를 해결하도록 하고, 이 과정에서 문제 상황과 더불어 자신들의 탐구 과정을 조직화하여 모델화 하는 것을 촉진하는 것이 모델링 활동을 통한 메타수준 학습을 달성하는 데 중요하다고 판단하였다. 이를 위하여, 본 연구에서는 교사가 학생들로 하여금 문제 상황을 조직화하고, 자신들의 풀이과정을 친구들에게 설명하고, 다양한 방식으로 표현하고, 자신의 풀이 과정을 정당화 하도록 함으로서, 학생들로 하여금 문제 상황과 더불어 자신들의 수학적 사고와 활동을 조직화하여 이에 대한 모델을 구축하는 과정을 지원하는 것이 적절할 것으로 판단하였다(Gravemeijer, 1999). 이처럼 교사가 학생들의 의사소통을 강조한 것은, 인간 활동의 압축이 의사소통의 효과성 추구로부터 촉발된다는 Sfard(2008)의 관점을 반영한 것이다. 또한, 본 연구에서 학생들의 탐구 활동 조직화를 통한 모델 구축은 교사의 개입을 통하여 시도한다는 점에서, 교사의 역할이 중요하다.

다. 모델을 활용한 문제해결과 모델의 수정, 개선

선행 연구들에 따르면, 메타수준의 학습은 한 단계의 비약으로 이루어지기 보다는, 점진적으로 이루어진다는 점이 알려져 있다(Nachliele & Tabach, 2012). 또한, 학생들이 구축한 모델은 점진적으로 수정, 개선되는 과정에서 학생들의 반성적 사고와 활동의 압축을 지원할 수 있다는 점이 논의되어 왔다(Gravemeijer, 1999; Park, et. al., 2013). 이러한 점에서 본 연구에서는 단 하나의 과제를 해결하는 과정을 통하여 메타수준 학습을 달성하고자 시도하기보다는, 여러 유사

한 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 구축한 모델이 함께 수정되고 개선되도록 하며, 이를 통하여 학생들의 활동이 메타 수준의 담론에 자리한 활동으로 상승하도록 하는 것이 적합하다고 판단하였다.

상황의 변이(variation)를 통한 학습을 강조한 Marton(2006)의 논의는 모델링 활동을 통한 메타 수준 학습을 꾀하는 일련의 과제들을 설계하는데 시사점을 제공한다. Marton(2006)은 단일한 상황보다는 각기 다른 여러 상황들을 비교하면서, 각 상황에서 촉발된 사항들의 차이를 의식하는 과정에서 더욱 풍성한 학습이 이루어질 수 있다는 점을 지적한 바 있다. 즉, 학습자로 하여금 수학적 대상이나 절차와 관련된 일련의 문제상황들 사이의 차이를 의식하도록 함으로서, 한편으로 학습한 바가 적용 가능한 상황들을 연결하며, 다른 한편으로 학습한 바를 다른 상황에서 수정하고 개선하여 확장할 수 있다는 것이다(Marton, 2006). 그에 따르면, 이러한 일련의 문제 상황들은 서로 고립된 것이 아니라 주요한 측면들을 공유한 상황들이어야 하며, 학생들은 각기 다른 상황들 사이의 핵심적인 차이를 명확히 함으로서, 각 상황과 관련하여 학습한 사항들의 차이를 분명히 하고, 각각의 학습한 내용들을 명료화할 수 있다.

이에 본 연구에서는 상황의 변이를 통한 학습에 대한 Marton의 논의를 토대로 일련의 문제상황들을 구성하는 것이 다음과 같은 두 가지 측면에서 모델링 활동을 통한 메타수준 학습을 지원하기에 적합하다고 판단하였다. 첫째, 학생들이 상황의 어떠한 요인들이 변화함에 따라 상위 수준 조작 방법이 변화하는지를 확인하게 함으로서 학생들로 하여금 자신들의 압축된 행동에 대한 상위 수준 조작이 언제, 어떻게 적용할 수 있는지를 의식하는 과정을 촉진할 수 있을 것으로 고려하였다. 둘째, 일련의 유사한 상황들로 문제 상황들을 구성함으로서, 초반부 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 활동을 조직화함으로서 구축한 모델을 다음 문제를 해결하는 과정에서 수정, 개선하는 탐구에 참여하도록 하는 것이 가능할 것으로 판단하였다. 모델을 문제상황에 비추어 재해석하고, 모델을 수정, 개선하는 과정에서 학생들의 반성적 사고와 사고의 수정, 개선이 촉발될 수 있다는 점이 논의되어 온바(Ärlebäck, Doerr, & O'Neil, 2013; Lesh & Harel, 2003), 상황의 변이를 고려한 과제 설계는 학생들이 자신들의 압축된 행동들을 반성하여 상위 수준의 조작을 수행하는 활동으로 자신들의 탐구를 진전시키는 과정을 지원할 수 있을 것으로 본다. 지금까지 논의된 모델링 과제 설계 및 수업 방안을 토대로 한 구체적인 모델링 활동의 설계는 Ⅲ장에서 상세하게 다룬다.

4. 확률 영역의 메타수준 학습

우리나라뿐만 아니라 대부분의 학교수학에서 확률은 시행에 따른 모든 결과들을 체계적으로 세어 전체 결과의 수와 특정한 사건이 일어날 결과의 수를 센 후에, 이들 사이의 비율을 구함으로써 도출하는 고전적인 라플라스의 확률 정의에 기반을 두고 있다(Chernoff & Zazkis, 2011). 이러한 고전적인 확률의 정의와 담론 발달에 대한 Sfard의 관점에서, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리는 시행에 따른 결과의 수 사이의 비를 구하여 도출된 '확률'들에 다시 상대적으로 상위 수준의 연산을 수행하는 것이므로 결과의 수 사이의 비율을 통하여 확률을 구하는 절차에 비하여 상대적으로 메타수준의 담론에 자리한 연산을 포함한다. 즉, 확률에 대한 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 탐구는 학생들로 하여금 시행에 따라 일어날 수 있는 결과들과 결과의 수를 체계적으로 구하고, 일어날 수 있는 결과의 수들 사이의

비율을 구하는 활동의 결실인 확률을 상위 수준에서 조작의 대상으로 다루게 되는 과정을 포함하는 바, 학생들이 이미 참여하고 있는 담론에 비하여 상대적으로 메타수준의 담론에 참여하도록 하는 것이다. 또한, 결과의 수들 사이의 비를 통한 확률 도출은 등확률(equiprobability)을 만족하는 모든 결과를 구할 수 있을 때에만 수행할 수 있으나, 확률들 간의 연산이 이루어질 수 있는 상위 수준의 담론에서는 그 외의 상황에서도 확률을 구할 수 있으므로, 확률의 연산이 수행가능해지는 시점에서는 학생들이 확률을 언제, 어떻게 구할 수 있는지를 규정하는 메타규칙이 수정된다. 이러한 점에서 학생들로 하여금 확률들 사이의 연산을 포함하는 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 탐구하도록 하는 과정은 확률에 대한 메타수준 학습을 시도하는 것으로 고려할 수 있다.

이러한 확률 탐구 과정에서 학습자의 활동은 수형도로 조직화될 수 있다는 점(Chernoff & Zazkis, 2011; English, 2005; Maher & Ahluwalia, 2014)이 알려져 있으며, 확률 탐구에서 수형도의 다양한 기능에 대한 논의가 이루어져 왔다(Ahlgren & Garfield, 1991; English, 2005; Steinbring, 1991). 즉, 수형도는 학생들이 시행에 따라 일어날 수 있는 결과들을 파악하고 결과의 수를 세면서 표본공간을 생성하는 과정의 조직화로부터 다양한 비형식적인 형태로 구축된다는 점이 알려져 있으며(English, 2005; Maher & Ahluwalia, 2014), 수형도는 확률적 상황에 대한 모델링의 유용한 도구(Ahlgren & Garfield, 1991)임과 동시에 확률들 사이의 연산 방법을 도출하는 과정을 지원할 수 있음이 논의된 바 있다(Steinbring, 1991).

이러한 선행 연구들로부터, 연구진은 학생들로 하여금 확률 탐구 과정을 조직화하게 함으로서, 학생들이 문제 상황과 더불어 시행에 따른 결과의 수와 결과들을 파악하는 과정을 의미화하는 나름의 모델을 구축할 수 있을 것으로 기대하였으며(Maher & Ahluwalia, 2014), 학생들은 일련의 과제들에서 모델을 수정, 개선하면서 상위 수준의 조작인 확률들 간의 연산에 대한 탐구에 참여할 수 있을 것으로 예상하였다. 구체적으로, 선행 연구들에서 확인한 바와 같이 확률적인 문제 상황에 대한 학생들의 탐구는 수형도와 유사한 다양한 표상들로 조직화될 수 있다는 점이 알려져 있는 바, 교사가 학생들로 하여금 문제 상황을 조직화하고, 자신들의 풀이과정을 친구들에게 설명하고, 다양한 방식으로 표현하고, 자신의 풀이 과정을 정당화 하도록 함으로서, 학생들은 수형도와 유사한 비형식적인 표상들을 문제 상황과 자신의 수학적 활동에 대한 모델로서 구축하여 활용할 수 있을 것으로 기대된다. 또한, 수형도는 한편으로 시행에 따라 일어날 수 있는 결과와 결과의 수를 체계적으로 모두 구하는 활동을(English, 2005; Maher & Ahluwalia, 2014), 다른 한편으로 이에 비해 상대적으로 메타수준의 담론에 자리한 확률간의 연산 도출을 지원할 수 있으며(Steinbring, 1991), 학생들로 하여금 확률들 사이의 연산 방식인 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 탐구하도록 하는 과정은 확률에 대한 메타수준 학습을 시도하는 것으로 고려할 수 있음을 확인하였다. 이러한 점에서, 연구진은 학생들로 하여금 확률적인 문제 상황과 이에 대한 수학적 활동을 조직화하여, 각자 나름의 모델을 수립하고, 이러한 모델을 활용하여 확률적인 문제를 해결함으로서, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 언제, 어떻게 적용할 것인지에 대하여 탐구하도록 하는 것이 모델링 활동을 통한 메타수준 학습을 시도하는 본 연구의 소재로 적합할 것으로 판단하였다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구의 목적은 학생들의 모델링 활동에서 메타수준 학습이 일어나는지, 일어난다면 어떻게 일어나는지를 확인하는 데 있다. 사례 연구 방법은 연구자가 이해하고자 하는 사례나 현상을 심층적으로 분석하여 최대한의 논점과 시사점을 도출하는 것을 목적으로 한다는 점에서, 본 연구의 목적에 부합하는 것으로 판단되었다 (Stake, 1995). 이에 본 연구에서는 사례 연구 방법(Stake, 1995)을 사용하였다. 본 연구에서는 다음과 같은 절차로 연구 참여자를 선정하고, 사례에 대한 자료를 수집, 분석하였다.

1. 연구 참여자

Stake(1995)에 의하면, 사례 연구는 단일한 사례로부터 최대한의 논점을 이끌어내는 데 그 목적이 있다. 이에 본 연구에서는 긴 시간의 탐구적인 활동에 익숙하고, 이 과정에서 의사소통에 적극적인 연구 참여자를 선정하는 것이 모델링 활동을 통한 메타수준 학습의 가능성을 확인하고, 이 과정에 대한 심층적인 이해를 시도하는 본 연구의 목적에 적합할 것으로 판단하였다.

본 연구에서는 학교 정규과정 이외에 별도의 탐구 중심 수업에 참여하고 있는 학생들을 대상으로 수업을 실시하였다. 연구 참여자는 서울시의 G고등학교 토요과학교실에서 6개월간 격주로 한 학급에서 수업을 받아온 고등학교 1학년 학생 15명으로, 중상위권 정도의 수학적 성취를 보여주었으며 소그룹 활동에서 자신의 의견을 적극적으로 표현하는 데 익숙한 학생들이었다. 본 연구에서 학생들의 탐구 활동은 3명씩 다섯 개의 조로 나뉘어 이루어졌다. 이 학생들은 본 수업에 3시간 동안 참여하였다.

이 수업에 참여한 학생들의 모델링 활동 가운데, 1조(3명)와 2조(3명) 학생 6명(JH, HJ, EA, WJ, ES, EL)의 모델링 활동을 본 연구의 사례로 분석하였다. 각 조별 구성원과 학생들의 성별 및 전체 연구 참여자(15명) 내에서 이 학생들의 상대적인 학업 성취도는 다음의 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구 참여자 정보

조	학생	성별	상대적인 학업 성취도 수준
1조	JH	여	상
	HJ	여	중
	EA	여	상
2조	WJ	남	중
	ES	여	중
	EL	여	상

Sfard(2008)에 따르면, 메타수준의 학습은 담론 참여자들 간의 활발한 의사소통으로부터 촉발되는 바, 조별 구성원들 사이의 의사소통이 활발히 이루어진 두 조의 학생들의 탐구 과정을 본 연구의 사례로 선정하는 것이, 모델링 활동을 통하여 이루어진 메타수준 학습에 대한 이해를 도모하는 본 연구에 가장 적합할 것으로 판단하였다. 본 연구에서는 1조와 2조 학생들의 모델링 활동을 사례로, 모델링 과정에서 메타수준 학습이 어떻게 이루어지는지에 대하여 확인하였다.

이 학생들은 중상위권 수준의 수학적 성취를 보여주었으며, 평균적인 사회 경제적 배경을 가졌다. 연구 참여자들은 토요과학교실 수업을 받으면서 다양한 과학 및 수학 수업을 통해 새로운 내용의 수학수업에 거부감이 없었다. 또한 6개월 동안 격주로 한 학급에서 과학 실험과 수학 수업에 참여해왔으며, 조별 활동에서 자신의 의견을 자유롭게 표현하는 데 익숙한 학생들이었다. 이 학생들은 독립인 두 사건 A, B가 동시에 일어날 확률을 곱셈정리를 통하여 구할 수 있다는 점과, 배반인 두 사건 A, B에 대하여 A 또는 B가 일어날 확률을 덧셈정리를 통하여 구

할 수 있다는 점을 중학교에서 학습하였다. 중학교 수학에서는 독립사건과 배반사건에 대하여 명시적으로 다루지 않으며, 독립이거나 배반이 아닌 복합 사건은 다루지 않는다. 또한, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 확률 간의 연산으로 다루기보다는, 경우의 수 단원의 덧셈정리, 곱셈정리와 관련지어 비형식적이고 직관적인 수준에서 간단하게 다룬다. 또한, 학생들은 두 정리를 함께 적용하는 문제는 다룬 바 없다. 다시 말해서, 덧셈정리나 곱셈정리를 한번 활용하면 되는 문제들만 비형식적으로 다루어 보았다. 이로 인하여, 이들 학생들은 확률을 곱하거나 더하는 정리가 존재한다는 점은 기억하고 있으나, 이들 정리가 왜 성립하는지, 이들은 언제 적용할 수 있는지에 대해서는 명확히 파악하고 있지 못함을 담당 수학교사와의 면담을 통하여 확인할 수 있었다.

2. 자료의 분석

본 연구에서는 학생들의 수학적 모델링 활동을 분석하기 위하여 다음과 같은 절차로 사례 연구 방법(Stake, 1995)을 사용하였다. 우선 연구진과 수업을 진행하는 교사가 함께 과제를 설계하고, 이를 바탕으로 2013년 10월 12일에 3시간의 수업을 실시하였으며, 연구진에 포함되지 않은 6년 경력의 교사가 수업을 진행하였다. 연구진은 학생들의 활동에 개입하지 않고 탐구과정을 관찰하였다.

활동지에는 자신들의 생각을 최대한 자세히 표현하도록 하였으며, 생각을 수정할 필요가 있을 때는 이전의 기록한 내용을 지우지 않도록 볼펜을 제공하였다. 또한 Maaß(2006)에 의하면, 학생들을 몇 개의 소그룹으로 나누어 각 조별로 과제에 대하여 논의하도록 하고 각자 논의를 반영하여 개별적으로 과제를 수행하는 것이 모델링 수업에서 효과적임이 알려져 있으므로, 학생들의 모델링 활동은 3명이 1조를 이루어 토론하며 이루어졌으며 각 학생별로 활동지를 제공하여 모델링 활동을 기록하도록 하였다.

또한 본 연구에서는 학생들의 수학적 사고와 학생들의 대화, 그림, 식, 제스쳐 등의 다양한 표상체와의 밀접한 관련성을 가정하고, 연구진의 현장노트, 비디오 자료와 녹취록, 학생들의 대화, 제스쳐, 그리고 학생들의 활동지에 기록된 그림, 식 등을 분석하였다. 연구진은 이러한 다면적인 자료 수집이 본 연구의 내적인 타당도와 신뢰도를 높일 수 있을 것으로 판단하였다 (Creswell, 2009; Stake, 1995).

본 연구에서는 위와 같은 절차에 따라 수집한 자료들과 함께 학생들이 구축한 모델의 기능과 기능의 변화를 확인하는 데 초점을 두었다. 본 연구는 모델링 활동을 통한 메타수준 학습의 가능성을 확인하고 이는 어떻게 일어나는지를 확인하는 데 목적을 두는 바, 연구진은 학생들이 구축한 모델의 기능과 기능의 변화를 확인함으로서 모델링 활동이 학생들의 탐구와 어떻게 관련되는지를 확인하고 구축된 모델이 어떠한 방식으로 학생들의 탐구를 지원하는지를 확인할 수 있을 것으로 판단하였다. 구체적으로, 연구진은 학생들이 탐구 과정에서 구축한 수형도들을 확인하고, 이들이 확률 탐구에서 어떠한 역할을 수행하는지를 범주화하는 과정을 거쳐 범주들 간의 관계로부터 각 장면에서 드러난 수형도의 기능과 그 변화를 확인하였다(Creswell, 2009; Stake, 1995).

또한 본 연구에서는 학생들이 구축한 모델의 기능과 그 변화에 대한 연구자 해석의 내적 타당도와 신뢰도를 높이기 위하여 연구자 삼각측정(Stake, 1995)과 동료 점검(Creswell, 2009)을 활용하였다. 연구자 삼각측정은 학생들이 구축한 모델의 기능과 변화에 대한 해석을 확증하고,

동시에 부가적인 해석을 얻기 위하여 여러 명의 연구자가 검토하는 방식으로 이루어졌으며, 동료점검은 다른 연구자들에게 해석 결과에 대한 의견을 구하는 방식으로 이루어졌다(Creswell, 2009; Stake, 1995). 또한, 본 연구는 서울대학교 생명윤리심의위원회(Institutional Review Board)로부터 심의면제 승인(No. E1309/001-011)을 받고 진행되었다.

3. 과제 설계 및 수업의 주안점

본 연구에서 설계한 과제의 목표는 학생들로 하여금 항아리에서 공을 꺼내는 확률적인 맥락에 기반을 둔 4개의 복합사건의 확률 문제를 해결하는 과정에서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 언제, 어떻게 적용할 것인지에 대하여 탐구하도록 하는 것이다.

우선, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리는 주로 복합사건에 대한 확률을 구하기 위하여 활용되며, 학교수학에서의 복합사건은 대부분 주사위 두 개를 던지는 것과 같은 두 차원(two-dimensional)의 문제나, 하나의 동전을 두 번 던지는 것과 같은 두 단계(two-stage)의 문제와 관련된다(Polaki, 2005). 복합사건의 확률은 한편으로 시행에 따라 일어날 수 있는 모든 결과의 수와, 해당 사건이 일어날 결과의 수 사이의 비율을 통하여 도출하는 것이 가능하며(e.g., English, 2005), 다른 한편으로, 복합사건을 몇 개의 단순사건(simple event)들로 범주화한 후, 여기에 확률의 덧셈정리나 곱셈정리를 적용하여 구하는 것이 가능하다(e.g., Polaki, 2005). 이에 본 연구에서는 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 학생들의 탐구를 위한 소재로 복합사건의 확률을 선정하였다.

이러한 복합사건의 확률과 관련된 문제 상황들 가운데, 항아리와 관련된 문제 상황은 다소 인위적이라는 비판을 받아왔지만 (Borovcnik & Bentz, 1991), 학생들의 확률적 사고와 관련하여 항아리 문제 상황을 활용한 다양한 연구들이 이루어져 왔다(see, Falk, Yudilevich-Assouline, & Elstein, 2012). 특히, Steinbring(1991)은 항아리에서 공을 꺼내는 문제 상황이 수형도의 구축으로 이어질 수 있다는 점을 언급한 바 있으며, Biehler(1991)는 항아리 문제 상황이 확률에 대한 연산의 출발점이 될 수 있다는 점을 주장하였다. 또한, 항아리 문제 상황은 항아리의 개수와 이에 포함된 공의 구성에 변화를 주면서 다양한 유형의 확률적인 문제 상황을 구성할 수 있음이 확인된 바 있다(Falk, Yudilevich-Assouline, Elstein, 2012; Steinbring, 1991). Steinbring(1991)은 이처럼 확률 문제의 수치에 변이를 주면서 탐구하도록 하는 것이 학생들의 모델구축을 이끌 수 있음을 주장한 바 있다. 이러한 논의로부터, 연구진은 항아리에서 공을 꺼내는 맥락을 기반으로 항아리에 포함된 공의 구성에 변화를 줌으로서, 서로 고립되지 않고, 공통점을 갖는 일련의 문제들을 개발하는 것이(Marton, 2006), 학생들로 하여금 문제 상황의 변이를 통하여 확률의 곱셈정리와 덧셈정리에 대한 적용 방안을 의식적으로 탐구하게 하고자 하는 본 연구의 목적에 적합할 것으로 판단하였다. 이상의 논의로부터 본 연구에서 개발한 과제는 다음의 <표 Ⅲ-2>와 같다.

선행 연구들에 따르면 확률적인 문제 상황에 대한 학생들의 탐구는 수형도와 유사한 다양한 표상들로 조직화될 수 있다는 점이 알려져 있는 바(Maher & Ahluwalia, 2014), 연구진은 위 <표 Ⅲ-2>의 과제들을 해결하는 과정에서 학생들이 수형도와 유사한 여러 비형식적인 표상들을 문제 상황과 자신의 수학적 활동에 대한 모델로서 구축하여 이를 수정, 개선하며, 이에 비추어 문제 상황을 재해석하면서 확률 문제에 대한 탐구가 이루어지게 하고자 하였다. 선행 연구들에

<표 Ⅲ-2> 확률 과제

1. 항아리 A에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어있고, 항아리 B에는 흰 공 1개, 검은 공 3개가 들어있다. 두 항아리에서 동시에 공을 하나씩 꺼낼 때, 항아리에서 꺼낸 두 공의 색이 같을 확률이 얼마인지 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오.
2. 항아리에 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어있다. 이 항아리에서 공을 하나씩 2번 꺼낼 때, 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 나올 확률이 얼마인지 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오. (단, 항아리에서 꺼낸 공은 항아리에 다시 넣는다.)
3. 항아리에 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어있다. 이 항아리에서 공을 하나씩 2번 꺼낼 때, 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 나올 확률이 얼마인지 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오. (단, 항아리에서 꺼낸 공은 항아리에 다시 넣지 않는다.)
4. 항아리 A에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어있고, 항아리 B에는 흰 공 1개, 검은 공 3개가 들어있다. 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 항아리 A에서, 뒷면이 나오면 항아리 B에서 공을 하나 꺼낸다. 동전을 던졌을 때, 항아리에서 흰 공을 꺼내게 될 확률을 구하고, 풀이가 성립하는 이유를 설명하시오.

따르면, 학생들은 모델을 구축하는 과정에서도 수학적인 탐구에 참여할 수 있으며(Lesh & Doerr, 2003), 학생들은 확률적 탐구 과정에서 각기 나름의 방식으로 수형도와 유사한 모델을 구축하고 이를 활용하여 문제를 탐구할 수 있음이 알려져 있다(Maher & Ahluwalia, 2014). 이에 본 연구에서는 교사가 수형도를 제공하여 학생들이 활용하게 하기보다는, 교사의 개입을 통하여 학생들이 자신들의 탐구를 조직화하고, 이 과정에서 각자 나름의 모델을 구축하여 이를 활용하게 하고자 하였다. 이를 위하여, 교사는 학생들로 하여금 자신의 풀이 과정을 상세하게 표현하고 정당화하도록 하며, 시행에 따른 결과들을 조직화하고 이로부터 확률을 도출할 수 있는 방안의 모색을 촉구하고자 하였다. 이러한 교사의 개입은 한편으로 학생들의 모델 구축과 이를 활용한 탐구를 촉진하고, 다른 한편으로 학생들의 활동의 조직화와 이에 대한 반성을 촉진할 것으로 예상하였다.

우선, 과제 1에서는 학생들이 덧셈정리와 곱셈정리를 함께 활용할 수 있도록 하는 과제를 설계하였다. 즉, 학생들은 과제 1과 같은 두 차원의 문제 상황에서 덧셈정리와 곱셈정리 가운데 하나를 한 번 적용하는 문제만을 다루어보았으므로, 연구진은 두 차원의 시행에서 이들 두 정리를 함께 활용하게 하는 과제 1을 출발점으로 고려하였다. 학생들은 이 두 정리를 함께 적용한 경험이 없으므로, 연구진은 학생들이 과제 1에서 각 정리를 언제, 어떻게 활용할 것인가에 대하여 탐구하게 될 것으로 기대하였다. 연구진은 학생들이 덧셈정리와 곱셈정리가 무엇인지를 이미 학습하였으므로, 교사가 학생들에게 다양한 해법을 탐색하게 함으로서 학생들이 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하는 탐구에 참여할 수 있을 것으로 판단하였다. 또한, 학생들 사이의 의사소통을 통하여 이 정리들을 어떻게 적용하는 것이 적절할 것인가에 대해 논의하게 할 계획이었으며, 교사는 이러한 정리들을, 결과의 수를 세어서 확률을 구하는 접근 방식에 비해 상대적으로 고등의 절차로 다루고, 학생들이 과제 1~3에 이르는 동안 덧셈정리와 곱셈정리들을 활발히 활용하도록 격려하고자 하였다. 학생들이 이러한 덧셈정리와 곱셈정리를 전혀 상기하지 못하는 경우에는 교사가 학생들이 중학교에서 배운 사항들을 간단히 상기하도록 하고, 이를 토대로 탐구에 참여하도록 할 계획이었다.

과제 2에서는 두 단계의 복원문제로 문제 상황을 변화시켰다. 특히, 이러한 두 단계의 시행에서 시행에 따른 결과들의 대칭성으로 인한 확률 도출의 어려움이 알려져 있는 바(see, Borovcnik & Kapadia, 2014), 이에 대한 논의가 집중적으로 이루어질 것으로 예상하였다. 즉, 과제 2에서는 공1, 공2의 순으로 두 공을 꺼내게 되는 결과와 공2, 공1의 순으로 두 공을 꺼내게 되는 결과를 중복된 결과로 볼 것인가의 문제가 이슈가 될 것으로 예상하였다. 연구진은 학생들이 이러한 문제적인 상황을 해결하기 위하여 시행에 따른 모든 결과들을 확인해야 하며, 이 과정에서 학생들이 수형도와 같은 모델을 적극적으로 활용하여 탐구할 것으로 예상하였다.

또한, 선행 연구에서는 학생들이 복원문제보다 비복원 문제에서 더 어려움을 겪는다는 점이 알려져 있는 바(Jones, Langrall, Thornton, & Mogill, 1997), 과제 2에서는 복원 문제를, 과제 3에서는 두 단계의 비복원 문제에 대하여 탐구하도록 설계하였다. 이 과제에서는 또한 표본공간 변화로 인한 조건부 확률과 관련된 논의가 이루어질 수 있을 것으로 예상하였다. 그리고 이어지는 과제 4의 문제 상황은 동전을 던진 후에 항아리에서 공을 꺼낸다는 점에서 두 단계의 시행이며, 항아리에서 공을 꺼내는 두 번째 단계에서는 두 항아리 가운데 한 쪽에서 공을 꺼내는 두 차원의 시행을 포함한다.

이처럼 문제 상황들이 조금씩 변화하는 가운데, 학생들이 새로운 유형의 확률 문제 상황에 덧셈정리와 곱셈정리를 적용하는 과정에서 겪는 어려움이 수형도와 같은 모델로 조직화된 결과들의 세기 과정에 대한 반성을 통하여 해결 가능할 것으로 판단하였다. 즉, 연구진은 학생들이 각 정리를 적용하기 위하여 복합사건을 단순사건으로 범주화하고, 각 단순사건의 확률들 사이에 어떠한 연산을 수행할 것인가를 판단하는 과정에서 결과들을 조직화해야 하는 바, 이 과정에서 학생들이 구축한 모델이 탐구의 생산성을 증가시키는 데 기여할 수 있을 것으로 예상하였다. 또한, 연구진은 학생들에게 익숙한 두 차원의 시행에서(과제 1), 두 단계의 시행으로(과제 2), 복원 사건에서 비복원 사건으로(과제 3), 이어서 두 차원이면서 동시에 두 단계의 시행으로(과제 4) 조금씩 심화되는 문제들을 설계함으로서, 학생들이 선행하는 문제의 해결 과정에서 구축하고 활용한 모델을 이어지는 문제를 해결하는 과정에서도 수정, 개선하여 적용할 것으로 예상하였다. 즉, 연구진은 모델의 구축과 수정, 개선이 단일한 문제 내에서 뿐만 아니라, 선행하는 문제의 해결 과정에서 구축한 모델을 다음 문제에 유사하게 적용하는 과정에서도 이루어질 수 있을 것으로 판단하였으며, 이는 학생들이 자신들의 활동을 반성하고 상위 수준의 조작을 수행하는 것을 촉진할 수 있을 것으로 판단하였다. 이를 위하여 학생들이 어려움을 겪는 경우에는, 교사가 학생들로 하여금 시행에 따른 결과들을 조직화하고 이로부터 덧셈정리와 곱셈정리의 적용 방안을 도출하게 하고자 하였으며, 이는 수형도와 같은 모델을 활용한 탐구를 촉발할 것으로 예상하였다.

과제 4에서 연구진은 의도적으로 학생들이 담론적 갈등에 직면하도록 하는 과제를 설계하였다. 즉, 학생들의 탐구 과정에서 상위 수준의 조작으로의 이행은 쉽사리 이뤄지지 않는 다는 점이 논의되어 온 바(Sfard, 2007, 2008), 연구진은 학생들로 하여금 담론적 갈등에 직면하도록 함으로서, 상대적으로 메타수준의 담론에 자리한 확률 연산으로서의 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 탐구를 촉발할 것으로 예상하였다. 구체적으로, 과제 4에서는 시행에 따른 모든 결과들 가운데 A항아리에서 흰 공이 나오는 결과들과 B항아리에서 흰 공이 나오는 결과들이 각기

일어날 정도가 다르므로, 시행에 따라 일어날 수 있는 전체 결과의 수와 흰 공이 나오는 결과의 수들 사이의 비율을 구하는 방식으로는 올바른 확률을 도출하기 어렵다. 다른 한편으로, 확률의 곱셈정리를 활용하여 A항아리에서 흰 공이 나올 확률과 B항아리에서 흰 공이 나올 확률을 각기 구하고, 확률의 덧셈정리를 활용하여 이들 사이의 확률을 더하면 올바른 확률을 도출할 수 있다. 이러한 점에서, 연구진은 과제 4에 대한 탐구 과정에서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리가 확률에 대한 연산으로서, 시행에 따른 결과의 수 사이의 비를 구하는 활동에 비해 상대적으로 메타수준의 담론에 자리한 활동으로서 탐구될 수 있을 것으로 기대하였다. 즉, 학생들은 중학교에서 경우의 수 단원의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 조합적 증명(combinatorial proof)을 통하여 학습하였으며, 이러한 관점에서는 확률의 덧셈정리와 곱셈정리가 결과의 수 사이의 비를 통한 확률 도출에 비해 메타수준의 담론에 자리한다고 보기 어렵다. 그러나 과제 4에 대한 탐구 과정에서는 확률의 덧셈정리와 곱셈정리가 단순히 시행에 따른 결과를 다른 방식으로 세는 대안적 세기 활동이 아니라, 각 결과가 일어날 정도가 같지 않더라도 확률을 도출하는 것을 가능하게 하는 확률에 대한 연산으로 다루어짐으로서, 시행에 따른 결과의 수 사이의 비를 통한 확률 도출 활동에 비해 메타수준의 수학적 활동으로 논의될 수 있을 것으로 연구진은 예상하였다. 연구진은 학생들이 과제4에 대한 탐구 과정에서 시행에 따른 결과의 수 사이의 비를 통하여 도출할 수 있는 확률 $\frac{4}{9}$와 확률의 연산을 통하여 올바르게 도출한 확률 $\frac{17}{40}$ 가운데 어떠한 해법이 타당한가에 대하여 논의할 것으로 예상하였으며, 이러한 두 확률들은 각기 다른 층위의 담론에 자리한 활동을 통하여 도출된 상반된 결과이므로, 연구진은 본 과제가 학생들로 하여금 담론적 갈등에 직면하도록 함으로서, 상대적으로 메타수준의 담론에 자리한 확률 연산으로서의 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 탐구를 촉발할 것으로 예상하였다.

이와 더불어, 위의 과제를 활용한 수업 전반에서 교사는 학생들로 하여금 자신의 풀이 과정을 상세하게 표현하고 정당화하도록 함으로서, 학생들의 활동의 조직화와 이에 대한 반성을 촉진하고자 하였다. 또한, 학생들의 탐구 과정에서 시행에 따른 결과들을 조직화하고 이로부터 확률을 도출할 수 있는 방안을 모색하게 하였으며, 이 과정에서 학생들이 수형도와 유사한 여러 비형식적인 표상들을 문제 상황과 자신의 수학적 활동에 대한 모델로서 구축하여 탐구에 활용할 것으로 판단하였다. 또한, 학생들이 구축한 모델은 과제 1~과제 3에 이르는 각기 다른 유형의 확률적인 문제 상황들을 의미화하면서 수정될 것으로 예상하였다.

또한, 교사는 각 문제의 풀이 방법을 비교하게 하여 각 수학적 절차들이 언제 적용 가능한지의 여부를 분명히 파악하도록 하고자 하였다. 또한, 결과의 수를 세어서 이들 사이의 비율을 도출하여 확률을 구하는 접근에 비하여 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 좀 더 상위의 접근 방식으로 다룸으로서 학생들에게 이미 익숙한 접근방식 뿐만 아니라, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활발히 활용함으로서 익숙해지게 하고자 하였다. 이와 더불어, 교사는 이상의 두 가지 접근 방법의 관련성을 파악하는 것이 중요하다는 점을 학생들이 의식하고자 하는 데 초점을 두었으며, 학생들 사이의 의사소통이 활발하게 이루어지는 분위기를 조성하고자 하였다.

Ⅳ. 연구 결과

연구 결과, 학생들의 탐구 활동이 수형도로 조직화되는 장면이 확인되었다. 또한, 학생들은 수형도를 문제 상황과 자신들의 조직화 활동에 대한 모델로서 활용하면서, 시행에 따른 전체 결과의 수를 체계적으로 세는 활동에서 출발하여, 확률들 간의 연산을 수행하는 과정에 대한 탐구에 참여할 수 있었다. 특히, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 처음으로 함께 활용하게 한 과제 1과, 담론적 갈등을 촉발할 수 있을 것으로 기대하였던 과제 4에서 학생들이 모델을 활용하여 확률의 덧셈정리와 곱셈정리의 적용 방안 탐색과 관련된 메타수준 학습에 참여하는 과정이 확인되었다. 구체적으로, 과제 1에 대한 탐구 과정에서는 학생들이 문제 상황과 체계적인 세기의 조직화로부터 모델을 구축하는 과정과, 모델을 활용하여 학생들 사이의 의사소통이 활성화되는 장면이, 과제 4에 대한 탐구 과정에서는 학생들이 구축한 모델이 의미화 하는 활동의 수준이 상승하는 장면이 확인되었다. 이에 이 장에서는 학생들이 모델링 활동을 통하여 메타수준 학습을 시도하는 과정을 (1) 모델을 구축하는 장면 (과제 1), (2) 모델을 통하여 덧셈정리가 언제, 어떻게 적용 가능한지에 대하여 의사소통하는 장면 (과제 1), (3) 모델이 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 모델로 발달하는 장면(과제 4)의 순으로 제시한다.

1. 에피소드 1 : 모델의 구축

학생들은 과제 1을 해결하기 위하여 두 가지 전략으로 접근하였다. 첫 번째 전략은 시행에 따른 모든 결과들을 체계적으로 나열하고, 모든 결과의 수와 두 항아리에서 같은 색의 공이 나올 결과의 수 사이의 비를 구하여 확률을 도출하는 것이었다. 두 번째 전략은 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 활용하여 확률을 구한 것이었다. 본 연구에서는 첫 번째 전략은 학생들의 조합적 추론과 밀접하게 관련되어 있다는 점에서 (English, 2005) 조합적 전략으로, 두 번째 전략은 확률에 연산을 수행하였다는 점에서 확률적인 전략으로 부르도록 한다. 이 장에서는 과제 1을 조합적 전략을 활용하여 해결한 학생들의 탐구 과정을 분석하는 데 초점을 둔다. 본 연구에서는 학생들이 자신들의 탐구 과정을 조직화하여 각자 나름의 모델을 구축할 수 있을 것으로 고려하였으며, 이를 통하여 학생들의 탐구가 더욱 촉진될 수 있을 것으로 예상하였다. 과제 1에 대한 탐구 과정에서는 학생들의 탐구가 조직화되는 과정이 확인되었으며, 이 과정에서 구축된 모델이 학생들의 확률 탐구를 어떻게 지원할 수 있는지가 부분적으로 확인되었다. 이에 이 장에서는 학생들의 탐구 과정에서 문제 상황과 체계적인 세기 활동에 대한 모델로서 수형도가 구축되는 과정을 분석하고, 수형도가 과제 1에 대한 탐구 과정에서 어떠한 역할을 하는지 확인한다.

과제 1에 대한 해결 과정에서 각 학생들이 활용한 전략은 다음의 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 과제 1에 대한 학생들의 풀이 전략

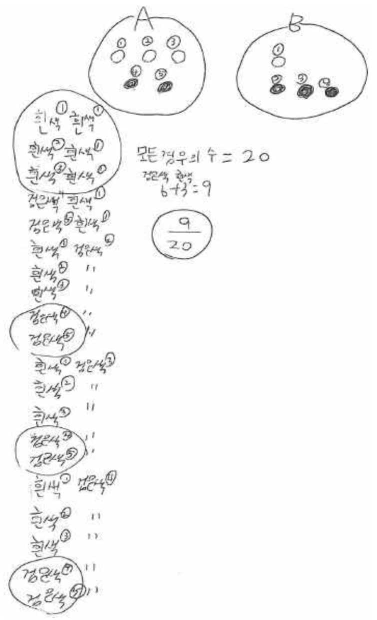
조	학생	전략
1조	JH	조합적 전략
	HJ	
	EA	
2조	WJ	
	ES	확률적 전략
	EL	

확률적 전략을 활용한 학생들은 확률의 덧셈정리와 곱셈정리만을 활용하여 과제 1을 적절히 해결하였다. 이들의 탐구 과정에 대해서는 다음

절에서 상세하게 다룬다. 다른 한편으로, 조합적 전략을 활용한 학생들의 탐구 과정에서는 문제 상황과 체계적인 세기 활동에 대한 모델로서의 수형도가 구축되는 장면이 포착되었다. 교사는 학생들이 자신들의 탐구 과정을 조직화하도록, 학생들로 하여금 각자의 풀이 과정을 상세하게 작성하고, 정당화하며, 탐구 과정을 서로 의사소통하도록 하였다(<표 Ⅳ-2>).

위의 <표 Ⅳ-2>는 학생들의 풀이과정 조직화와, 문제 상황과 학생들의 탐구 과정에 대한 모델 수립을 촉진하기 위하여 교사가 학생들의 탐구 과정에 개입한 부분들 가운데 일부를 제시한 것이다. 교사는 학생들로 하여금 풀이를 상세하게 작성하고, 서로 의사소통하게 하며, 풀이를 정당화 하도록 함으로서 학생들이 자신의 탐구 활동을 조직화하는 과정을 지원하였음이 확인된다.

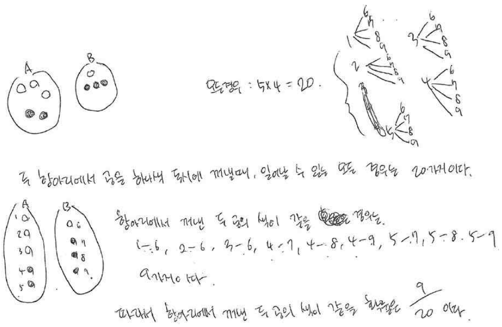
이러한 교사의 적극적인 개입 과정에서 조합적 전략을 활용한 학생들의 풀이가 조직화 되는 장면이 확인되었다. 이들은 항아리를 나타내는 다이어그램을 그리고, 이에 포함되어 있는 공을 문자로 라벨링한 후에 모든 결과들을 체계적으로 나열하였다([그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2]). 학생들은 시행에 따른 결과들을 나열하는 과정에서 반복되는 항과 패턴을 확인하고 전체 결과들을 범주화하였으며, 이 과정에서 학생들이 시행에 따른 결과들을 세는 활동이 조직화되는 장면이 확인되었다([그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2]).



[그림 Ⅳ-1] WJ의 풀이

<표 Ⅳ-2> 학생들의 탐구 조직화를 위한 교사의 개입

번호	화자	전사
17	교사	각자 풀이가 어떤지, 여기 적기도 했지만 친구한테 설명을 해주는 거야, 알았죠?
50	교사	나와서 발표 하는 건 쓰는 것뿐만 아니라 왜 그렇게 계산하는지도 설명해야 하니까 알았지? 그런 설명까지도 다 준비 하는 거야~
52	교사	셋이 서로 이야기 끝났어?
54	교사	그러면 셋이 조금씩 다른가?
56	교사	[서로의 풀이가] 똑같은 건 왜 어떤 부분이 같은 거 같아?
58	교사	어떻게? 설명 좀 해줄래? 어디까진 똑같아?
75	교사	음~그 예시에서 밑에 좀 적어줄래? 그 20가지가 어떻다, 방금 선생님한테 설명한 것 있잖아, 그럼 다 비슷한 건가?
91	교사	음…그러면 지금 이게 항아리에서 공을 뽑는 거잖아, 자세히 설명해볼래? 이 그림이 그걸 어떻게 설명하는지



[그림 Ⅳ-2] EA의 풀이

[그림 Ⅳ-1]에서는 WJ가 모든 결과를 나열하는 과정에서 반복되는 항들이 ‘〃’ 기호를 통하여 대체되면서, 세기 활동이 조직화되는 과정이 확인되었다. WJ는 (A항아리에서 꺼낸 공, B항아리에서 꺼낸 공)으로 순서쌍을 나열하였으며, 첫 여섯 개의 결과를 나열하면서 패턴을 확인하여, 일곱 번째부터는 중복되는 항을 ‘〃’기호로 대체하였다. 이를 통하여, WJ는 일어날 수 있는 모든 결과의 수가 20이며, 이들 가운데 두 항아리에서 꺼낸 공의 색이 같은 결과의 수는 9임을 확인하고 $\frac{9}{20}$라는 확률을 도출하였다.

위 문제를 해결하는 과정에서, 결과를 세는 과정을 표상하는 방식과, 조직화 한 정도는 학생에 따라 달랐다. 예를 들어, EA의 세기 과정과 이에 대한 표상은 WJ에 비하여 더 조직화되어 있음이 확인된다([그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2]). WJ는 모든 공의 번호와 공의 색을 함께 작성한 반면([그림 Ⅳ-1]), EA는 공의 번호만을 작성하였다([그림 Ⅳ-2]). 또한, WJ는 모든 결과들을 나열하였고, 이들 가운데 중복되는 항들을 ‘〃’기호로 대체한 반면, EA는 시행에 따른 모든 결과들을 A항아리에서 꺼낸 공에 따라 크게 5가지 경우로 범주화하고, 각 범주별로 B항아리에서 나올 수 있는 결과를 제시하였다. 즉, EA는 WJ가 ‘〃’기호로 대체한 반복되는 항들을 세는 과정을 압축하여(condensed), 범주화하고, 각 범주별로 결과들을 수형도로 표현하였다. 이러한 점에서 EA의 수형도는 WJ의 수형도에 비하여 더욱 압축되고 조직화되었으며 탈맥락화 되었다. 확률 탐구에서 모델과 문제 상황의 맥락 사이의 관련성이 갖는 의미와 역할에 대해서는 세 번째 절에서 자세히 논의한다.

WJ와 EA의 세기 활동이 표상되는 방식과 조직화 된 정도에는 각기 차이가 있었으나, 조합적 전략을 활용한 WJ와 EA가 구축한 수형도는 확률 문제 해결에서 공통적으로 두 가지 역할을 수행하였다. 첫째, 수형도는 학생들의 표본공간 구축을 지원하였다(English, 2005). 구체적으로, 수형도는 학생들이 시행에 따른 모든 결과를 체계적으로 나열하고, 범주화하는 과정을 지원함으로서(See, Tarlow, 2010) 표본공간의 구축을 지원하였다. 둘째, 수형도는 학생들이 시행에 따른 모든 결과의 수와 더불어 결과가 무엇인지를 함께 파악하는 과정을 지원하였다. 즉, 학생들은 수형도에 작성된 결과들을 문제 상황에 비추어 해석함으로서, 각 순서쌍이 문제에서 무엇을 의미하는지를 파악하고, 이를 토대로 각 경우에 해당하는 결과의 수를 파악하였다. 예를 들어, WJ는 전체 결과의 수를 파악하기 위하여 작성한 수형도에서 각 순서쌍을 문제의 상황에 비추어 해석하고, 두 공의 색이 같은 결과들만을 별도로 표시하여 그 결과의 수를 구하였다([그림 Ⅳ-1]). EA역시 풀이의 오른쪽 위에 작성된 수형도에서, 각 순서쌍들 가운데 두 숫자가 모두 같은 색의 공을 의미하는 순서쌍들만을 확인하고 이들의 개수를 구하여 확률을 도출하였다([그림 Ⅳ-2]).

요약하면, 이 절에서는 조합적인 전략을 활용한 학생들의 탐구 과정에서 문제 상황과 학생들의 세기 활동에 대한 모델로서의 수형도가 구축되는 장면이 확인되었다. 문제 상황과 학생들의

<표 Ⅳ-5> 확률의 덧셈정리 적용 과정에 대한 논의

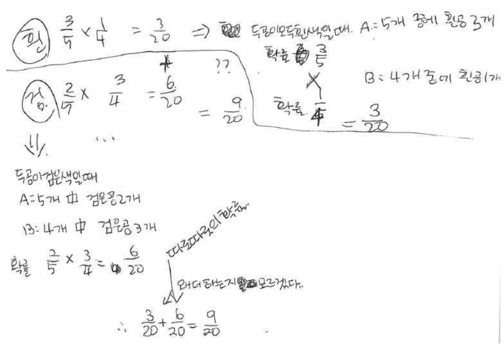
번호	학생	전사
25	EL	이거 더하는 게 맞아?
26	ES	뭐가?
27	ES	몰라, 이렇게 해야 하는 거 아니야? 곱하고 더하고?
28	EL	응 나도 그렇게 했어
29	ES	그치?
30	EL	응
31	EL	근데 왜 더해??
32	ES	답은 다 같아(조합적 전략의 풀이와 확률적 전략의 풀이가)
33	WJ	그거 맞는 거지 왜?
34	EL	(속삭인다)왜 더해~?
35	ES	그건….
36	EL	상세하게 적어야 해
37	ES	딱히…난 몰라 이거 왜 그런지

활동에 대한 모델인 수형도는 학생들의 세기 활동을 압축된 형태로 의미화하고 있음이 확인되었으며, 학생들은 자신들이 구축한 모델을 문제 상황에 비추어 해석함으로서, 전체 결과들 가운데 두 공의 색이 같은 결과들을 확인하고 확률을 도출하였음이 확인되었다. 다음 절에서는 1번 과제에서 확률적인 전략을 활용한 학생들의 탐구를 확인한다. 특히, 조합적 전략을 활용한 학생들에 의해 제기된 모델이 학생들의 의사소통을 지원하고, 확률의 덧셈정리가 적용되는 방식에 대한 탐구를 지원하는 장면을 확인한다.

2. 에피소드 2 : 모델을 통한 의사소통

이 장에서는 과제 1에서 확률적 전략을 활용한 학생들의 탐구과정과 더불어 두 조의 학생들이 모델을 활용하여 의사소통하는 과정을 확인한다. 특히, 이 과정에서 학생들이 수형도를 활용하여 각기 다른 두 전략의 관련성을 파악하고, 확률의 덧셈정리가 성립하는 근거를 확인하는 장면에 초점을 둔다.

2조의 EL과 ES는 확률적 전략을 활용하여 1번 과제를 다음과 같이 해결하였다([그림 Ⅳ-3]).



[그림 Ⅳ-3] EL의 풀이

[그림 Ⅳ-3]에 드러난 바와 같이, EL은 두 공이 모두 흰 색일 확률과 모두 검은 색일 확률을 각각 확률의 곱셈정리를 활용하여 구한 후, 확률의 덧셈정리를 적용하여 이들을 더하였다. 그러나 EL과 ES는 풀이 과정에서 확률의 덧셈정리를 적용한 과정에 의문을 제기하였다(<표 Ⅳ-3>).

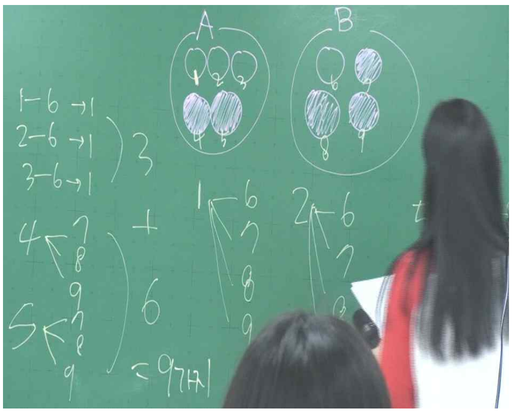
이상의 조별 탐구에 이어서 교사는 전체 토론을 진행하였다. 교사는 조합적 전략을 적용한 학생들의 풀이가 확률의 덧셈정리 적용 과정에 대해 2조 학생들이 제기한 의문을 해소하는 데 단서를 제공할 수 있을 것으로 기대하고, 우선 조합적 전략을 적용한 학생들부터 풀이를 발표

<표 Ⅳ-4> EL의 발표 내용

번호	학생	전사
210	EL	그러니까 그게 헷갈려서 이렇게 생각해봤어요, 경우의 수로, 그런데 경우의 수 이거이거 따로 따지고 이거이거 따로 따졌을 때 이게 나와서 , 그냥, 이걸 먼저 더하고([그림 Ⅳ-6], (첫 번째 그림의 타원)) 이렇게 하나 ([그림 Ⅳ-6], 두 번째 그림의 타원 전체경우-20으로 나눔), 20분의 3해서 둘이 따로 구해서(3/20, 6/20)더한 값이 똑같아서…([그림 Ⅳ-6], 마지막 그림의 타원) 여기서 경우의 수 구했을 때, 1에서 몇 가지 하고, 2에서 몇 가지 해서 더했잖아요, 근데 여기서 똑같이 하면 따로 구해보면 이게 똑같이 나와요. 경우가 세 개 해서 6 더해서 그거처럼 따로 (확률을) 구해서 20분의 9를 하나, 확률을 구해서 똑같이 더해도 똑같아요.

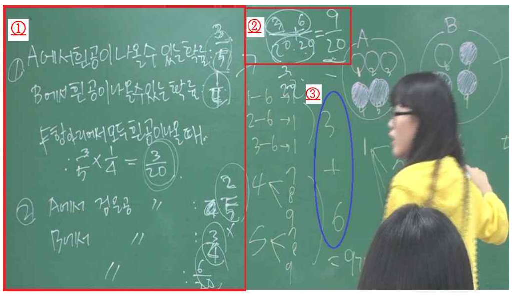
하도록 하였다. 또한, 확률적 전략에서 활용된 확률의 덧셈정리와 곱셈정리가 상위 수준의 절차임을 강조하고, 다른 학생들이 이를 활용하는 활동에 의례적으로(ritualized) 참여하는 것을 촉구하기 위하여 연구 참여자 가운데 가장 수학적 역량이 뛰어난 EL로 하여금 확률적 전략을 적용한 탐구 결과를 발표하게 하였다.

우선, JH와 HJ가 조합적 전략을 활용한 풀이를 발표하였으며, 이들은 자신들이 구축한 수형도를 활용하여 풀이를 설명하고 정당화하였다([그림 Ⅳ-4]).



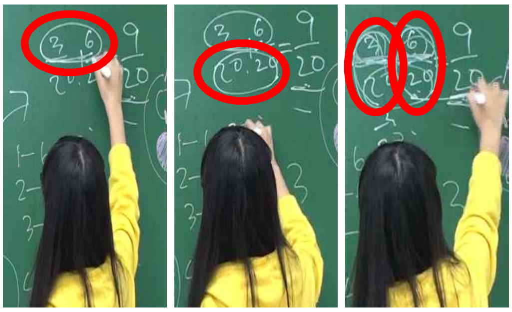
[그림 Ⅳ-4] HJ의 풀이

흥미로운 점은 이상의 조합적 전략에 대한 ES와 EL의 반응이다. EL은 자신의 풀이과정을 HJ의 풀이 왼편에 작성하며 풀이를 제시하였는데, 이 과정에서 두 전략 사이의 관련성이 논의되면서 덧셈정리의 적용 과정에 대한 정당화가 시도되었다([그림 Ⅳ-5]).



[그림 Ⅳ-5] EL의 풀이(①, ②번 사각형 내부)

EL은 1조의 HJ의 풀이([그림 Ⅳ-4])에 자신의 풀이를 추가하였다([그림 Ⅳ-5], ①, ②번 사각형 내부). EL은 HJ의 풀이 가운데, 각 항아리에서 꺼낸 공의 색이 모두 흰 색인 결과의 수(3)와 모두 검은 색인 결과의 수(6)를 더하는 단계를 주목하였다([그림 Ⅳ-5], 3+6, ③번 타원 내부). 이어서 EL은 HJ의 풀이 과정으로부터 확률적 전략이 조합적인 전략에 비추어 결국 더하고 나누는 순서의 차이가 있을 뿐이라는 점을 도출하고 다음과 같이 설명한다(<표 Ⅳ-4>, [그림 Ⅳ-6]).



[그림 Ⅳ-6] 확률의 덧셈정리에 대한 정당화와 함께 확인된 EL의 제스쳐

<표 Ⅳ-4>와 [그림 Ⅳ-6]에서, 모든 결과들을 체계적으로 세기는 활동을 조직화한 HJ의 수형도가 EL의 탐구 과정에서는 확률의 덧셈정리가 성립하는 근거를 모색하는 과정을 지원하였음이 확인된다. 즉, EL은 자신의 풀이에 포함된 $\frac{3}{20}$과 $\frac{6}{20}$이라는 확률이, 두 공의 색이 같은 결과들을 서로소인 두 경우(두 공이 모두 흰 경우, 두 공이 모두 검은 경우)로 분할하여 각기 구한 확률임을 HJ의 수형도를 통하여 확인할 수 있었으며([그림 Ⅳ-5], ③번 타원 내부), 이를 활용하여 <표 Ⅳ-4>와 같은 정당화를 시도하였다. 다시 말해서, EL은 HJ의 수형도를 통하여 세기 활동의 압축을 통한 결과의 조직화 및 범주화 과정과, 자신의 확률적 전략의 적용 과정을 함께 관련지음으로서, 확률의 덧셈정리에 대한 정당화를 시도였음이 확인된다.

그렇지만 연구진은 [그림 Ⅳ-5]의 수형도가 확률의 연산에 대한 모델로 발달하였다고 보기는 어렵다고 판단하였다. 이는 EL이 위와 같이 덧셈정리의 적용 과정을 비형식적으로 정당화 하였지만 확률 자체를 연산의 대상으로 보는 탐구에 참여하였다고 보기는 어려웠기 때문이다(<표 Ⅳ-4>). 구체적으로, 위의 <표 Ⅳ-4>와 [그림 Ⅳ-6]에서 이루어지는 EL의 정당화는 확률의 덧셈정리가 두 배반사건 가운데 적어도 하나가 일어날 확률을 구할 때 적용 가능하다는 점에 초점이 맞춰지기 보다는, 조합적 증명(combinatorial proof)의 형태를 보이고 있다. 이러한 점에서 [그림 Ⅳ-5]의 수형도가 확률간의 연산에 대한 모델로 발달하였다고 해석하기는 어렵다.

또한, 위와 같은 두 학생의 풀이로부터([그림 Ⅳ-4], [그림 Ⅳ-5]), 동일하게 표상된 모델이더라도, 이를 인식하는 주체의 추론 과정에 따라 모델이 다른 방식으로 해석되고 기능할 수 있었다는 점이 확인된다. 즉, [그림 Ⅳ-4]에 제시된 모델은 HJ에게는 주로 조합적 전략의 모델로 기능하였으나, EL에게는 주로 확률적 전략의 모델로 기능하였다. 조합적 전략을 적용한 학생들은 수형도의 각 잎(leaf)에 주목하고 이를 시행에 따른 결과들로 해석하였지만, 확률적인 전략으로 접근한 학생들은 몇 개의 결과(잎)를 범주화한 경우(수형도의 가지)에 주목하고, 수형도로부터 확인되는 각 경우의 확률에 초점을 두었다.

요약하면, 문제 상황과 체계적 세기 활동을 압축적으로 의미화 하는 모델인 HJ의 수형도는 HJ가 자신의 풀이를 다른 학생들과 공유하는 과정을 지원하고, EL이 두 전략 사이의 관계를 파악하는 과정을 지원하였다. HJ의 수형도에서는 전체 결과를 각 항아리에서 도출된 공의 색에 따라 4가지 경우(검은 공/흰 공, 검은 공/검은 공, 흰 공/검은 공, 흰 공/흰 공)로 재범주화 하는 과정과, 이들 각 경우가 서로 배반임이 분명하게 확인되는 바, EL이 확률의 덧셈정리가 성립하는 배경을 탐색하는 과정을 지원하였다.

또한, 이상의 과정을 통하여 본 연구에서 상대적으로 상위 수준의 조작으로 고려된 확률의 덧셈정리와 곱셈정리의 적용 과정을 수형도를 통하여 조합적 전략의 적용 과정에 비추어 탐구하는 것이 가능하다는 점이 부분적으로 확인되었다. 이러한 탐구 과정에서 선행 연구들이 논

<표 Ⅳ-5> 과제 4의 풀이 과정에 대한 1조 학생들의 논의

번호	학생	전사
544	JH	일단 5분의 3, 2분의 1, 아까 이거랑 똑같은데요? 그러면, 이것도 4분의 1이고, 이거 뒤 나오려면 2분의 1있어야 하니까 곱했더니 이게 나왔어요, 더해야겠죠? 80분의 34, 똑같네.
545	JH	아닌 거 같아~
546	JH	40분의 17
547	JH	뭔가 이상한데,
548	교사	답이 똑같은 거에요?
549	JH	뭐지 이거?
550	교사	뭐가 찜찜한 거에요?
551	JH	동전에 항아리까지 나왔는데 달랑 9개 밖에 없잖아요, 그래서 그냥 이렇게 할 수 밖에 없었어요.
552	JH	동전까지 나오니까 한 스물 몇 개는 더 있을 줄 알았죠,
		...
648	JH	[조합적 전략으로 풀어서] 확률이 9분의 4라고 하면 걍 얘네 둘이 같이 있는 경우 아니에요? 같은 공간, 항아리가 있으면 다 같이 있는게 9분의 4고, 얘는 갈라지니까…
649	EA	9분의 4는 한 항아리에 9개가 있을 때, 거기서 흰색 공이 4개가 있으니까

의해온 바와 같이 수형도가 표본공간의 생성 과정과 체계적인 세기 활동을 의미화 할 뿐만 아니라(English, 2005), 확률의 덧셈정리의 적용 과정 또한 부분적으로 의미화 할 수 있음이 확인되었다.

본 연구에서 이루어진 수업의 목표는 복합사건의 확률 문제를 해결하는 과정에서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 언제, 어떻게 적용할 것인지에 대하여 탐구하는 것인 바, 교사는 이어지는 과제 2와 과제 3에서 상위 수준의 접근 방식인 확률의 덧셈정리와 곱셈정리의 활용을 학생들에게 권장하였다. 그럼에도 불구하고, 1조의 학생들은 과제 2와 과제 3에서 위의 확률적 전략을 적극적으로 활용하지는 않았다. 과제 2와 과제 3의 탐구 과정에서는 조합적 전략을 활용해서도 충분히 올바른 해답을 도출할 수 있었던 바, 1조의 학생들은 자신들이 익숙하지 않은 상위 수준 전략을 적극적으로 활용하기보다는 주로 조합적 전략을 취하였다. Sfard(2007, 2008)와 Nachliele & Tabach(2012)은 이처럼 수학적 탐구의 메타수준으로의 이행은 쉽게 이루어지지 않는다는 점을 지적한 바 있다. 오히려, 두 가지 접근 방식이 상충되는 결과를 도출하게 되는 과제 4에서 1조 학생들의 탐구 과정에서도 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 적극적으로 활용하는 장면이 확인되었다. 다음 에피소드에서는 학생들이 구축한 모델이 확률적 전략의 모델로 본격적으로 해석되면서 수형도가 의미화 하는 수학적 탐구의 수준이 상승하는 장면이 확인된다.

3. 에피소드 3 : 모델의 기능 변화 및 수준 상승

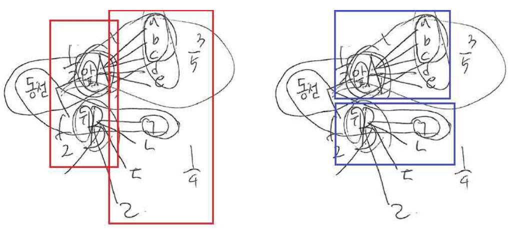
이 에피소드에서는 과제 4에 대한 탐구 과정에서 수형도가 확률들 사이의 연산에 대한 모델로 발달하는 장면에 초점을 둔다. 또한, 학생들이 이를 활용하여 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 탐구에 본격적으로 참여하는 장면을 확인한다. 과제 4에 대한 탐구 과정에서 두 조의 학생들이 구축한 모델이 의미화하는 활동의 수준 상승이 확인되었으나, 모델이 의미화하는 활동의 수준이 상승하게 된 배경은 각 조별로 달

랐다. 우선, 1조에서 이루어진 탐구 과정을 확인한다.

조합적 전략을 사용해오던 1조의 학생들은 과제 4에서 확률적 전략으로 접근 방식을 수정하였다. 1조 학생들이 전략을 수정한 이유와 수정된 풀이과정은 다음의 <표 Ⅳ-5>에서 확인된다.

위의 <표 Ⅳ-5>의 551번째 전사에서 확인되는 바와 같이, JH는 문제 상황에 비추어 시행에 따른 결과가 9개에 불과하다는 사실로 인하여, 접근 방식을 바꾸었다. 특히, 이 과정에서 학생들이 조합적 전략을 통하여 도출되는 확률인 $\frac{4}{9}$와 대응되는 문제 상황을 재구성하는 과정이 확인되었다(<표 Ⅳ-5>, 648, 649). 즉, 학생들은 $\frac{4}{9}$를 자신들이 지금까지 다룬 항아리와 공 상황에 비추어 해석한 결과, 과제 4의 문제 상황과 전혀 다르므로 $\frac{4}{9}$가 잘못된 답이라고 추론하였다(<표 Ⅳ-5>, 648, 649).

이에 1조 학생들은 확률적 전략으로 접근을 바꾸어서 과제 4를 해결하였다. 다음의 [그림 Ⅳ-7]은 과제 4를 확률적 전략으로 해결하는 과정에서 JH가 초기에 구축한 수형도이다.



[그림 Ⅳ-7] JH의 풀이 (좌우는 같은 그림)

JH는 세기 활동에 대한 모델로서 구축한 수형도를 확률적 전략과 연결 지었다([그림 Ⅳ-7]). JH는 확률적 전략이 단순 사건들의 확률들을 각기 구하여 곱하거나 더하는 전략임을 파악하고 있었던 바, 수형도에서 각 단계의 단순 사건의 확률을 도출하였다([그림 Ⅳ-7], 왼쪽 그림의 사각형 내부). 우선, JH는 수형도에서 시행의 첫 단계인 동전을 던지는 시행에서, 동전의 앞과 뒤가 나올 확률이 각각 $\frac{1}{2}$임을 확인하였다([그림 Ⅳ-7], 왼쪽 그림, 첫 번째 사각형 내부). 이어서, JH는 수형도에서 시행의 두 번째 단계인 항아리에서 공을 꺼내는 시행에 주목하여, 각 항아리에서 흰 공이 나올 확률을 도출하였다. 구체적으로, JH는 A항아리에서 일어날 수 있는 5가지 결과들 가운데 흰 공이 나오는 3가지 결과들(a, b, c)을 둥글게 묶어서 범주화하고, 전체 결과의 수에 대한 이들의 개수의 비율을 구하여 $\frac{3}{5}$이라는 확률을 도출하였다([그림 Ⅳ-7], 왼쪽 그림, 두 번째 사각형 내부). 유사한 방식으로, B항아리에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$임을 확인하였다.

이러한 [그림 Ⅳ-7]의 왼쪽 그림에 드러난 모델 구축 과정에서 주목할 부분은 크게 두 가지이다. 첫째는 수형도에서 시행에 따른 모든 결과들과 이를 세는 활동이 첫 번째 시행의 결과를 기준으로 압축된 형태로 의미화 되고 있었으며, 이는 위와 같은 JH의 각 단계별 확률 도출을 지원하였다는 점이다. 즉, [그림 Ⅳ-7]의 왼쪽 그림에서는 시행에 따른 결과들이 첫 번째 시행의 결과를 기준으로 압축된 형태로 의미화 되었던 바, 결과들이 {(앞, a), (앞, b), (앞, c), (앞, d), (앞, e), (뒤, ㄱ), (뒤, ㄴ), (뒤, ㄷ), (뒤, ㄹ)}과 같이 모두 나열되어 있는 상태에 비하여, 각 단계별 확률에 주목하여 동전을 던지는 시행에 따른 확률 도출이 용이하다. 이처럼 모든 결과들이 나열되어 있는 상태에서는 위 [그림 Ⅳ-7]과 같이 A항아리에서 꺼낸 공의 결과들과 B항아리에서 꺼낸 공의 결과들이 서로 다른 범주임

이 분명하게 드러나지 않는 바, 두 번째 시행에서 각 항아리별로 흰 공이 나올 확률을 도출하는 활동 또한 함께 이루어지기 어렵다. 그렇지만 JH의 수형도에서는 전체 결과들이 동전의 앞면이 나올 때 일어날 수 있는 결과들과 뒷면이 나올 때 일어날 수 있는 결과들로, 크게 두 범주로 압축되어 조직화되어 있었던 바 각 단계별 확률 도출이 용이하였다.

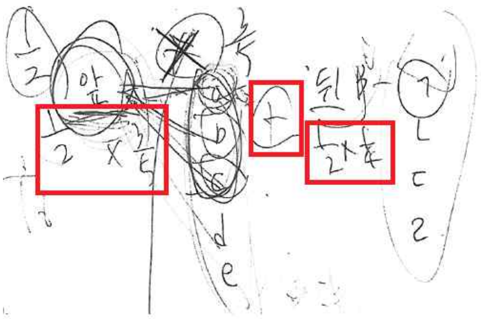
둘째는 첫 번째 절에서 확인한 바와 같이 수형도가 문제 상황에 대한 모델로서도 기능하고 있었다는 점이다. JH는 수형도에서 항아리에서 공을 꺼내는 시행의 각 결과들을 문제 상황에 비추어 해석하면서 두 번째 시행에서 각 항아리에서 흰 공이 나올 확률을 도출할 수 있었다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-7]의 왼쪽 그림의 두 번째 사각형에서 JH는 동전의 앞면이 나왔을 때 일어날 수 있는 다섯 가지 결과들(a, b, c, d, e)을 문제 상황에 비추어 해석하여 이 가운데 흰 공인 결과들(a, b, c)을 둥글게 묶어서 범주화하여 A항아리에서 꺼낼 수 있는 공의 개수 5와 흰 공의 수 3 사이의 비를 구하여 $\frac{3}{5}$이라는 확률을 도출하였다. 이러한 점에서 수형도의 오른쪽에 작성된 확률인 $\frac{3}{5}$과 $\frac{1}{4}$은 수형도에 작성된 결과들인 (a, b, c, d, e)와 (ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ)을 문제 상황에 비추어 재해석하여, 이들을 다시 (a, b, c)와 (d, e), (ㄱ)과 (ㄴ, ㄷ, ㄹ)로 재범주화 함으로서 도출된 결과의 수 사이의 비율을 구하는 과정이 압축된 결과임이 확인된다. 이처럼, [그림 Ⅳ-7]의 왼쪽 그림에서 JH가 산출한 확률들($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$)은 수형도를 활용한 탐구 과정을 압축한 값들인 바, 수형도와 함께 작성된 확률들 역시 학생들이 구축한 모델의 일부로 해석하는 것이 타당하다고 판단된다. 이러한 과정을 통하여 학생들이 구축한 모델은 각 단계별 확률 도출 과정을 압축된 형태로 의미화하고 있음이 확인된다.

이어서 [그림 Ⅳ-7]의 오른쪽 그림의 사각형 내부에 표시된 바와 같이, JH는 A항아리에서 흰 공이 나오는 결과들을 동전의 앞면이 나오는 결과와 둥글게 묶어서 범주화하고('앞'과 a, b, c), B항아리에서 흰 공이 나오는 결과들을 동전의 뒷면이 나오는 결과와 둥글게 묶어서 범주화하였다('뒤'와 ㄱ). 이를 통하여, JH가 과제 4에서 이루어지는 두 단계의 시행에 따른 모든 결과들을 수형도에서 4가지 경우(앞면/A항아리의 흰 공, 앞면/A항아리의 검은 공, 뒷면/B항아리의 흰 공, 뒷면/B항아리의 검은 공)로 재범주화 하였음이 확인된다. 이러한 재범주화는 수형도에 작성된 결과들을 과제 4의 두 단계의 시행이라는 맥락에 비추어 재해석한 결과이다. 이러한 재범주화로부터, JH의 수형도는 확률들 사이의 관계를 의미화하게 된 바, 확률들 간의 연산에 대한 모델로 발달할 잠재력을 가지게 되었다. 즉, 앞서 각 단계별 확률 도출 과정에서 위의 4가지 각 경우들을 이루는 요소들(예. 동전을 던져서 앞면이 나올 확률, A항아리에서 흰 공이 나올 확률 등)에 대한 확률이 이미 도출되었던 바, 이러한 전체 결과의 4가지 경우로의 범주화는 각 단순 사건의 확률들 사이의 관계로 전이될 수 있는 잠재력을 가지게 되었다.

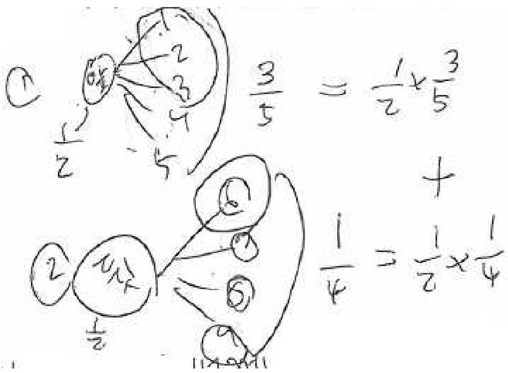
지금까지의 분석을 통하여, [그림 Ⅳ-7]의 수형도는 압축된 세기 활동에 대한 모델임과 동시에, 각 단계별 단순 사건들의 확률 도출 과정에 대한 모델이며, 나아가 각 단순 사건들의 확률 사이의 관계에 대한 모델로 발달하고 있음이 확인된다. 즉, 첫 번째 절의 [그림 Ⅳ-1]과 [그림 Ⅳ-2]에서 구축된 수형도는 조직화된 세기 활동에 대한 모델이었던 반면에, [그림 Ⅳ-7]의 수형도는 단순 사건의 확률 도출 과정과 확률들 사이의 관계를 의미화 하는 모델이므로 이전의 수

형도에 비하여 메타 수준의 활동을 의미화하고 있음을 확인할 수 있다.

이어서 JH는 이러한 단순 사건들로부터 도출된 확률들 사이에 연산을 수행함으로서 전체 확률을 도출하였다([그림 Ⅳ-8]). HJ와 EA 역시 JH와 유사한 방식으로 과제 4에 대한 확률을 도출하였으며, 이들 가운데 EA의 풀이는 다음의 [그림 Ⅳ-9]와 같다.



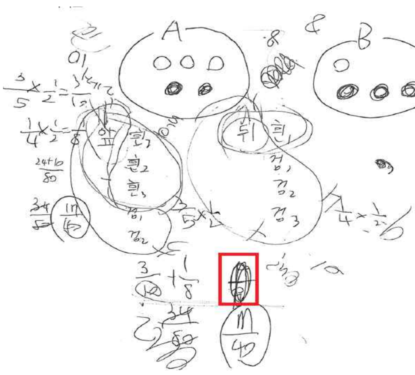
[그림 Ⅳ-8] JH가 [그림 Ⅳ-7]을 수정한 풀이



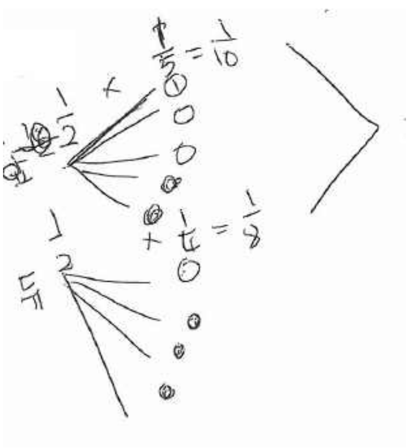
[그림 Ⅳ-9] EA의 풀이

[그림 Ⅳ-8]의 수형도에서 JH는 [그림 Ⅳ-7]에서 도출한 단순 사건들의 확률들을 곱하거나 더하고 있음이 확인된다(참고, <표 Ⅳ-4>, 544). 즉, JH는 [그림 Ⅳ-7]의 수형도에서 도출한 단순 사건의 확률들 사이에 연산(덧셈정리와 곱셈정리)을 수행하였다. 이러한 연산의 방법은 [그림 Ⅳ-7]의 수형도에서 모든 결과에 대한 재범주화 과정을 통하여 간접적으로 도출되었다([그림 Ⅳ-7], 사각형 내부). 예를 들어, A 항아리에서 흰 공이 나오려면, 우선 동전이 앞면이 나온 후에 흰 공을 A에서 꺼내야 한다. 그러므로 $\frac{1}{2}$의 확률로 앞 면이 나왔을 때, 가능한 5가지의 결과들 가운데 3가지가 A 항아리에서 흰 공이 나오는 결과들에 해당하므로 $\frac{1}{2}$과 $\frac{3}{5}$를 곱하여 그 확률을 구한 것이다([그림 Ⅳ-8]). 마찬가지로, B 항아리에서 흰 공이 나올 확률 역시 $\frac{1}{2}$에 $\frac{1}{4}$를 곱하여 구하였다. 그리고 두 경우는 각기 다른 범주로서 배반사건인 바, 이들의 확률 더하여 최종적인 답을 도출하였다(에피소드 1). 이러한 점에서 위 [그림 Ⅳ-8]의 수형도는 확률들 간의 연산에 대한 모델이다. 즉, [그림 Ⅳ-8]의 수형도에서 이루어지는 탐구에서는 단순 사건에 대한 조직화의 결과로부터 도출된 확률이 다시 조작의 대상이 되었다. 이러한 점에서 [그림 Ⅳ-8]의 수형도는 [그림 Ⅳ-7]의 수형도에 비하여 메타 수준의 활동을 의미화하고 있음이 확인된다. 또한, HJ와 EA 역시 지금까지 확인한 JH와 같은 수준의 유사한 탐구를 통하여 [그림 Ⅳ-9]와 같은 풀이를 작성하였다.

2조에서는 EL과 ES는 확률적인 전략을 활용하여 해법을 도출하였으나, WJ는 여전히 조합적 전략을 고수했던 바, 이로 인하여 두 가지 답이 제기되었다. 이러한 상반된 결과에 대한 논쟁 과정에서 2조 학생들의 탐구에서도 수형도가 확률들 간의 연산에 대한 모델로 발달하였다([그림 Ⅳ-10], [그림 Ⅳ-11]).



[그림 Ⅳ-10] WJ의 풀이



[그림 Ⅳ-11] EL의 풀이

즉, 2조의 학생들은 두 가지 전략이 각기 다른 해답을 도출한 부분에서 갈등에 직면하였고, 이에 조합적 전략의 적용 과정에서 구축된 수형도를 확률적 전략으로 재해석하였다([그림 Ⅳ-10], [그림 Ⅳ-11]). [그림 Ⅳ-10]에서 확인되는 바와 같이, WJ는 초기에 조합적 전략을 시도하여 $\frac{4}{9}$라는 확률을 도출하였으나, 같은 조 학생들과 풀이를 비교한 후 잘못되었음을 파악하고 이를 지웠음이 확인된다([그림 Ⅳ-10], 사각형 내부). 이후, WJ는 1조 학생들과 유사하게 시행에 따른 결과들을 범주화하고, 각 범주들이 일어날 확률을 도출하여 이들 사이에 연산을 수행함으로서 수형도를 확률적 전략으로 재해석하여 올바른 확률을 도출하였다([그림 Ⅳ-10]). 또한, 오른쪽의 [그림 Ⅳ-11]은 EL이 WJ의 조합적 전략이 올바르지 않다는 점을 입증하기 위한 탐구 과정에서 구축한 수형도이다. 즉, 조합적 전략이 올바르게 적용되기 위해서는 시행에 따른 각 결과가 일어날 정도가 같아야 하는 바, EL은 수형도를 작성하여 이에 확률의 곱셈정리를 적용함으로서 과제 4의 시행에 따른 9가지 결과들이 일어날 정도가 같지 않다는 점을 확인한 것이다([그림 Ⅳ-11]). 이러한 점에서 [그림 Ⅳ-11]에서 EL 역시 조합적 전략의 모델이었던 수형도에 확률적 전략을 부분적으로 적용하여 재해석하였음이 확인된다. 조합적 전략의 적용을 위해서는 시행에 따라 일어날 수 있는 정도가 같은 결과들을 도출해야 한다는 점은 근본적으로 표본공간의 등확률성과 관련된다. 그렇지만, 위의 9가지 결과가 일어날 정도가 같지 않다는 점이 표본공간의 등확률성과 관련된 논의로 이어지는 과정은 쉽지 않았으며, 이러한 탐구 과정은 본 연구에서 분석하고자 하는 모델링 활동을 통한 메타수준 학습의 범위를 넘어서므로 이에 대한 상세한 논의는 후속연구를 통해서 전개하고자 한다.

요약하면, 과제 4에 대한 탐구 과정에서 학생들이 구축한 모델이 이전 과제에 대한 탐구 과정에서 구축한 모델에 비하여 상대적으로 메타수준의 수학적 활동을 의미화 하는 모델로 발달하는 장면이 확인되었다. 첫 번째와 두 번째 절에서 확인한 수형도는 학생들이 시행에 따른 결과를 체계적으로 세는 과정을 의미화하고 있었다. 다른 한편으로, [그림 Ⅳ-7]의 모델은 단순사건의 확률 도출 과정과 각 확률들 사이의 관계를 의미화하고 있었으며, [그림 Ⅳ-8]에서는 이로부터 도출된 확률들 사이의 연산을 의미화

하고 있었다. 즉, [그림 Ⅳ-7]과 [그림 Ⅳ-8]은 각기 이전의 수형도들에 비하여 상대적으로 메타수준의 수학적 활동을 의미화하고 있음이 확인되었다.

특히, 학생들이 구축한 모델이 학생들의 활동을 압축된 형태로 의미화 한다는 점이 상위 수준의 조작의 수행에 핵심적인 역할을 한다는 점이 확인되었다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-7]에서 학생들이 구축한 모델은 체계적인 세기 활동을 압축된 형태로 의미화 하고 있었던 바, 각 단계별 확률 도출을 가능하게 함이 확인되었다. 또한, [그림 Ⅳ-8]에서 확인된 바와 같이, 학생들이 구축한 모델은 각 단순 사건의 확률 도출 과정과 확률을 모두 의미화 하고 있었던 바, 학생들은 이를 전체 결과의 4가지 경우로의 재범주화 과정과 연결 지음으로써 단순 사건의 확률들 사이의 관계를 파악할 수 있게 되었다.

이와 함께, 학생들이 탐구 과정에서 구축한 모델을 문제의 맥락에 비추어 재해석하면서, 모델에서 초점을 두는 부분이 변화하고, 이 과정에서 상위 수준의 조작이 이루어지는 장면이 확인되었다([그림 Ⅳ-7]). 학생들은 시행에 따라 일어나는 결과들을 각 단계별로 범주화하였다가([그림 Ⅳ-7], 왼쪽 그림), 두 단계의 시행의 결과에 따라 재범주화 하였다([그림 Ⅳ-7], 오른쪽 그림). 또한, 수형도를 문제의 맥락에 비추어 해석하는 과정에서 학생들은 수형도를 구성하는 각 요소들 사이의 관계를 파악할 수 있었으며, 이를 통하여, 학생들은 단순 사건의 확률을 도출하고([그림 Ⅳ-7], 왼쪽 그림), 단순 사건의 확률들 사이의 관계를 파악하였다([그림 Ⅳ-7], 오른쪽 그림). 다시 말해서, 학생들은 자신들의 활동을 압축적으로 조직화한 수형도를 문제의 맥락에 비추어 재해석하면서, 압축된 행동들 사이의 관계를 파악하고 이들 사이에 어떠한 연산을 수행할 것인지를 모색하였다.

또한 이전의 과제 1~3에서 확률적인 전략의 적용에 상대적으로 소극적이었던 1조의 학생들이 이에 대한 집중적인 탐구에 참여하는 과정이 확인되었다. 이러한 탐구는 1조 학생들이 이전 과제의 문제 상황을 현 과제의 문제해결 과정에 비추어 반성함으로서 촉발되었다. 학생들은 $\frac{4}{9}$ 라는 확률을 지금까지 다루어 온 항아리 문제 맥락에 비추어 보았으며, 그 결과 과제 4의 문제 상황과 큰 차이가 있음을 파악하였다. 이로부터, 1조의 학생들은 자신들의 전략을 확률적인 전략으로 전환하였다. 이에 비추어볼 때, 본 연구에서 모델링의 문제 상황에 변이를 주면서 탐구를 지속하게 한 점이 학생들로 하여금 항아리 문제 상황을 확률에 대한 상황모델(situation model) (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)로 고려하게 하는 것을 촉진한 것으로 판단된다. 이에 학생들은 확률에 대응되는 문제 상황을 재구성하여 과제 4와 비교함으로서 자신들의 풀이가 잘못되었다고 판단하였다(<표 Ⅳ-5>). 구체적으로, <표 Ⅳ-5>에서 학생들은 조합적 전략을 통하여 도출되는 확률인 $\frac{4}{9}$ 로부터 항아리에 흰 공이 4개, 검은 공이 5개 들어있는 문제 상황을 재구성하고, 이에 비추어 이 확률이 잘못되었을 것이라는 추측을 제기하는 장면이 확인되었다(<표 Ⅳ-5>, 648, 649).

다른 한편으로 2조 학생들의 탐구에서 수형도가 의미화 하는 활동의 수준 상승은 지금까지 동일한 결과를 산출하던 두 전략이 각기 다른 확률을 도출하면서 촉발되었다. 특히, 이러한 두 전략은 앞서 논의한 바와 같이 각기 다른 층위의 담론에 자리하는 바, 이들 사이의 상충되는 결과로 인하여 학생들이 겪은 문제적 상황은 Sfard가 논의하였던 담론적 갈등으로 풀이될 수 있다.

이러한 두 조의 학생들이 직면하게 된 문제적

인 상황은 조합적인 전략의 주된 도구로 작동하였던 수형도를 확률적인 전략으로 재해석하면서 해소될 수 있었다([그림 Ⅳ-7]~[그림 Ⅳ-11]). 즉, 학생들이 구축한 모델이었던 수형도는 한편으로 조합적 전략의 풀이 과정을, 다른 한편으로 확률적 전략의 풀이 과정을 모두 의미화 할 수 있었던 바, 수형도를 통한 조합적 전략의 확률적 전략으로의 재조명은 문제적 상황을 해결하고, 학생들의 탐구 수준을 상위 수준으로 발달하도록 하였다. 이러한 점에서 학생들이 수형도를 통하여 조합적 전략을 확률적 전략을 통하여 재해석하는 과정은 상위 수준의 담론에 자리한 활동을 통하여 상대적으로 낮은 수준의 담론에 자리한 활동을 재해석함으로써, 낮은 수준의 담론에 자리한 활동만으로는 해결하기 어려웠던 문제적 상황에 대한 탐구를 지원할 수 있었던 것으로 풀이될 수 있다,

마지막으로, 모델을 활용한 수학적 탐구의 수준에 대한 Gravemeijer(1999)의 논의에 비추어볼 때, 위 사례의 학생들은 모델을 활용하여 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 대한 탐구에 참여하고 있으며, 모델의 지원 없이도 다른 맥락에서 상위 수준 조작을 원만하게 수행할 수 있는지의 여부는 분명하게 확인되지 않는다는 점에서 형식적인 수준의 활동에 참여하였다고 판단하기는 어렵다. 이러한 점에서 위 사례의 학생들은 확률의 덧셈정리, 곱셈정리와 관련된 메타수준 학습을 완전히 달성하였다기보다는, 이에 활발히 참여하고 있는 과정이라고 해석하는 것이 적합하다. 그렇지만, 위와 같은 학생들의 탐구 과정과 모델이 의미화 하는 활동의 수준 상승 과정에 비추어볼 때, 학생들이 구축한 모델과 이를 활용한 탐구 과정이 학생들의 메타수준 학습을 촉진하였다는 점은 분명하게 확인된다.

Ⅴ. 논의 및 결론

본 연구는 문제 상황과 학생들의 조직화 활동에 대한 모델을 구축하고, 모델을 활용하여 문제를 해결하며, 모델을 문제 상황에 비추어 재해석하면서 수정, 개선하는 모델링 활동을 통한 확률 탐구에서 학생들의 메타수준 학습이 어떻게 일어나는지를 확인하는 데 목적을 두었다. 연구 결과, 학생들은 문제 상황과 자신들의 탐구 활동에 대한 모델로서 구축된 수형도를 활용하여 메타 수준의 담론에 자리한 활동들에 대한 탐구에 참여하게 되는 장면이 확인되었다(에피소드 3).

구체적으로, 학생들은 확률적인 문제 상황으로부터 수형도를 문제 상황과 자신들의 체계적인 세기 활동에 대한 모델로서 구축하였으며([그림 Ⅳ-1]), 학생들이 이를 문제의 맥락에 비추어 수정, 개선하며 재해석하는 과정에서 수형도가 확률에 대한 연산의 모델로 발달하는 장면이 확인되었다([그림 Ⅳ-8]). 수형도는 체계적인 세기 활동이 조직화되면서 구축되었으며, 이는 초기에 조합적 전략에 대한 모델이면서 동시에 문제 상황에 대한 모델로서 제기되었다. 이러한 수형도는 표본공간의 생성 과정을 지원하였으며(에피소드 1), 확률적 전략을 활용한 학생들에 의하여 재해석되면서 시행의 각 단계와 결과의 각 범주에 따른 확률 도출과 이 확률들 사이의 연산을 통한 확률 도출 과정을 지원하는 장면이 확인되었다(에피소드 2, 에피소드 3). 또한, 수형도가 조합적 전략에 대한 모델에서 확률들 사이의 연산에 대한 모델로 발달하는 과정에서 학생들이 서로의 풀이를 공유하고, 두 전략 사이의 관계를 파악하는 과정을 지원함이 확인되었다(에피소드 2). 이상의 연구 결과를 통하여 확인되는 논점들은 다음과 같다.

첫째, 메타수준 학습 과정에서 모델링 활동의

핵심은 여러 층위의 담론에 자리한 활동들을 함께 의미화 하며, 이들을 중재하는 모델의 수립과 이를 통한 활동의 반성임이 확인되었다. 선행 연구들에서는 수학적 탐구 과정에서 학생들이 구축하는 모델의 다양한 역할들을 논의해온 바 있다. 한편으로, Fischbein(1987)은 모델이 학생들로 하여금 지각적으로 접근할 수 없는 영역에 접근하는 것을 가능하게 한다는 점을 지적한 바 있으며, 다른 한편으로 Gravemeijer(1999)는 문제 상황으로부터 도출되는 모델이 학생들의 상황 참조적인 비형식적 활동을 지원할 수 있다는 점을 강조한 바 있다. 이러한 선행 연구 결과들의 연장선에서, 본 연구에서는 학생들이 구축한 모델이 한편으로 확률적인 문제 상황(에피소드 1, 3)을, 다른 한편으로 이에 대한 조직화 활동(에피소드 1, 세기 활동)과 더불어 압축된 활동에 대한 상위 수준 조작(에피소드 2, 3, 확률 간의 연산)을 함께 의미화 할 수 있음이 확인되었다. 즉, 학생들이 구축한 모델인 수형도는 여러 층위의 담론에 자리한 활동들을 함께 의미화 할 수 있었던 바, 학생들은 모델링 활동에서 수형도를 통하여 이러한 여러 수준의 담론에 자리한 활동들 사이의 관계를 탐구할 수 있었다(에피소드 2, 3).

구체적으로 학생들의 메타 수준 활동을 의미화 하는 수형도는, 이 보다 낮은 층위의 담론에 자리한 활동도 함께 의미화하고 있었던 바, 학생들이 수형도를 매개로 자신들의 메타 수준의 활동을 낮은 층위의 담론에 자리한 활동에 비추어 재해석하고 수정하는 것을 지원하였다. 예를 들어, 에피소드 3의 [그림 Ⅳ-7]에서 확인되는 바와 같이, 학생들은 수형도를 통하여 단순 사건의 확률을 도출한 후에, 수형도를 통하여 확률들 사이의 관계를 체계적인 세기 활동의 결과와 문제의 맥락에 비추어 확인하였다([그림 Ⅳ-7], 오른쪽). 이를 통하여 학생들은 자신들이 도출한 단순 사건의 확률들에 어떠한 연산을 수행할 것인지를 판단할 수 있었다. 이처럼 수형도가 메타 수준 담론에 자리한 활동과 이에 비해 상대적으로 낮은 층위의 담론에 자리한 활동을 함께 의미화 한다는 점은, 이를 활용한 탐구 과정에서 메타적인 수준에서 학생들의 압축된 활동들에 어떠한 조작을 수행할 것인가를 판단하는 과정을 지원하였다.

다른 한편으로, 수형도는 학생들의 조직화되고 압축된 활동을 의미화 하였던 바, 메타 수준의 조작이 이루어질 수 있는 수학적 대상의 생성을 지원하였다. 에피소드 1과 3에서 확인되는 바와 같이, 수형도는 학생들의 체계적인 세기 활동, 확률 도출 과정, 확률 사이의 연산 수행 과정을 압축된 형태로 의미화 하였다. 수형도에서 압축된 형태로 의미화 된 조작들은(세기 활동, 확률 도출 과정), 앞서 확인한 바와 같이 상대적으로 낮은 층위의 담론에 대한 재해석을 통하여 메타 수준에서 새롭게 조작될 수 있었다.

이러한 점에서 모델이 학생들의 압축되고 조직화된 활동을 의미화 한다는 점은 메타 수준의 조작이 수행될 대상의 생성을 가능하게 하였으며, 모델이 이에 비해 상대적으로 낮은 층위의 담론에 자리한 활동을 함께 의미화 한다는 점은 메타 수준에서 이루어지는 새로운 조작의 규칙에 대한 단서를 제공하였음이 확인된다. 이러한 과정을 통하여, 수형도는 확률에 대한 조작이 자리한 담론과 결과의 수를 체계적으로 세는 활동이 자리한 담론의 관계에 대한 반성을 지원하였으며, 이러한 수형도가 의미화 하는 두 측면들 사이의 관계 파악을 통하여 확률 과제에 대한 학생들의 탐구가 메타적인 수준으로 상승할 수 있었다(에피소드 3).

둘째, 선행 연구들에서 논의되어 온 바와 같이, 학생들의 확률 탐구 과정에서도 상위 수준 조작으로의 발달은 간단히 일어나지 않았으며

(Nachliele & Tabach, 2012; Sfard, 2007, 2008), 한 층위의 담론에서 해결될 수 없는 문제 상황이나 (에피소드 3, <표 Ⅳ-5>), 두 층위의 담론에 자리한 활동들이 상반된 결과를 산출하는 갈등 상황에서(에피소드 3, 2조 학생들의 탐구), 각기 다른 층위에 자리한 활동들 사이의 관련성을 파악하고 상위 수준 조작에 대한 면밀한 탐구가 수행될 수 있음이 확인되었다. 구체적으로, 과제 1에 대한 전체 토의 과정에서 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 적용하는 방법이 논의되고(에피소드 2), 교사는 이를 활용한 탐구를 장려하였음에도 불구하고 과제 2와 과제 3에 대한 탐구 과정에서 조합적 전략을 활용한 학생들의 탐구가 상위 수준의 탐구로 좀처럼 발달하지 않았다. 이러한 1조 학생들의 탐구는 과제 4에서 조합적 전략이 적절하게 작동하지 않는 문제적 상황에 직면하면서 상위 수준 조작 방법에 대한 탐색으로 변화할 수 있었다(에피소드 4). 다른 한편으로, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 확률 간의 연산보다는 조합적 증명으로 논의하던 2조 학생들 역시(에피소드 2), 두 전략이 다른 결과를 산출하는 갈등적인 상황에 직면함으로서, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리를 수형도를 통해 재해석하면서 확률 연산의 적용 과정을 집중적으로 탐구하게 되었다([그림 Ⅳ-11]). 이러한 점에서, 학생들로 하여금 한 층위의 담론에서 해소할 수 없는 문제적 상황에 직면하도록 하는 것이 상위 수준 조작을 활용한 탐구에의 활발한 참여를 촉진할 수 있음이 확인되었다.

셋째, 복합사건의 확률이 문제 상황의 해석으로부터 단선적으로 도출되는 것이 아니라, 여러 차례의 조직화와 문제 상황 해석을 통한 재범주화의 과정을 통하여 도출되는 것임이 확인되었다. 여러 선행 연구들에서는 확률이 현실의 맥락과 밀접하게 관련되어 있다는 점이 논의되어 왔으나, 이들은 주로 확률을 문제 상황에 비추어 해석하면서 그 의미를 탐구하는 데 초점을 두어 왔다(e.g., Gal, 2005). 다른 한편으로 본 연구에서는 복합사건의 확률이 문제 상황에 대한 조직화와 압축(에피소드 1), 그리고 그 결과를 문제 상황에 비추어 여러 차례 재해석하고 재범주화 하는 과정을 필요로 한다는 점이 확인되었다(에피소드 3). 이러한 점에서, 학생들의 복합사건 확률 도출 과정을 좀 더 면밀하게 이해하고, 그 어려움을 경감시켜줄 수 있는 다양한 논의가 후속적으로 필요할 것으로 판단된다. 특히, 본 연구에서는 이러한 복합사건의 확률을 도출하는 과정에서 수형도가 문제 상황을 조직화하고 재해석하는 과정을 지원할 수 있다는 점을 확인한 바, 주로 조합적 추론(English, 2005)이나 표본공간 생성(Maher & Ahluwalia, 2014)과 관련하여 논의되어 온 수형도를 확률의 연산에 대한 탐구와 관련지어 추가적으로 논의될 필요성이 제기된다.

넷째, 교사가 학생들로 하여금 자신의 풀이 과정을 조직화하고, 설명하며, 정당화하도록 하는 과정은, 학생들의 탐구 과정이 조직화되고 이로부터 모델이 구축되는 과정을 지원하였음이 확인되었다(에피소드 1, <표 Ⅳ-2>). Sfard(2008)에 따르면, 인간 활동 압축의 가장 큰 동인은 의사소통의 효과성 추구인 바, 학생들로 하여금 풀이 과정을 설명하게 하고, 이를 활용하여 의사소통하게 하는 과정은 자신들의 탐구 과정을 조직화하고 압축하는 과정을 지원하였을 것으로 판단된다(에피소드 1, [그림 Ⅳ-1]).

다섯째, 학생들이 모델링하는 상황의 일관성은 학생들로 하여금 항아리와 공이라는 문제 상황을 일종의 상황모델(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)로 활용하는 탐구를 촉발하였다(에피소드 3). 구체적으로, 에피소드 3에서 1조의 학생들이 조합적 전략을 통하여 도출된 확률로부터 문제 상황을 재구성하여 이와 과제 4의 문제 상황의

비교를 통한 풀이 점검 과정이 확인되었다(<표 Ⅳ-5>). 특히, 이러한 상황모델의 구축은 본 연구에서 대부분의 요소들을 공유하고 있는 일련의 문제 상황들을 다루었다는 점에서 촉발되었을 것으로 예상된다. 이로 인하여, 학생들은 확률로부터 문제 상황을 재구성하고, 상황들 사이의 차이점을 비교함으로서(Marton, 2006) 접근 방식의 타당성을 검토한 것으로 판단된다.

또한, 이미 알고 있는 문제해결 방법을 활용하여 유사한 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 유추적 사고가 촉진될 수 있다는 점이 논의되어 온 바(박미미, 이동환, 이경화, 고은성, 2012; 이경화, 2009), 본 연구에 참여한 학생들이 선행하는 과제에서 구축한 모델인 수형도를 수정, 개선하여 다음 과제의 해결에 적용한 탐구 과정은 학생들의 유추적 사고가 촉발된 것으로 해석할 여지가 있다. 문제 상황에 대한 모델의 구축과 수정, 개선 과정 및 이러한 모델의 다른 상황에의 적용에서 유추적 사고가 밀접하게 관련되어 있다는 점이 알려져 있는 바(Clement, 2009), 학생들의 모델링 활동과 이 과정에서 촉발될 수 있는 유추적 사고의 역할과 기능을 관련지어 추가적으로 분석하고 논의할 필요성이 제기된다. 또한, 일련의 유사한 문제를 해결하는 과정에서 촉발될 수 있는 학생들의 유추적 사고와 본 연구에서 확인된 메타수준의 학습 사이의 관련성에 대한 추가적인 논의의 필요성 또한 제기된다.

여섯째, 본 연구에는 학생들의 탐구를 메타수준 학습의 측면에서 분석함으로서 모델링 활동의 진전을 분석할 수 있었다는 점에서 의의를 갖는다. 선행 연구들에서는 학생들의 모델링 활동을 한편으로 문제 상황으로부터 모델을 구축하고, 이를 활용하여 문제를 해결하며, 모델을 수정, 개선하는 일련의 모델링 주기(cycle)에 따라 분석하거나(e.g., Blum & Borromeo Ferri, 2009), 다른 한편으로 학생들의 탐구가 문제 상황으로부터 탈맥락화되는 정도에 따라 과제 세팅(task setting), 상황 참조적(referential), 일반적(general), 형식적(formal) 수준으로 범주화하고 이에 따라 학생들의 모델링 활동을 분석해왔다(e.g., Gravemeijer, 1999). 모델링 활동에 대한 이상의 분석에서는 각각 학생들에 의해 생성되는 모델의 발달에 초점을 두거나(Blume & Borromeo Ferri, 2009), 학생들의 활동이 형식화되는 데 초점을 두고 있음이 확인된다(Gravemeijer, 1999). 다른 한편으로, 본 연구에서는 모델링 활동에서 학생들의 활동이 조직화되고 상위 수준의 담론에 자리한 활동으로 발달하는 과정을 분석함으로서 학생들의 탐구가 진전되는 과정을 확인할 수 있었으며, 이는 모델링 활동을 통하여 새로운 수학적 대상이나 절차를 학습하는 과정에 대한 분석에 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

또한, 수학 학습에 대한 Sfard의 참여 담론적 관점을 토대로 수행된 연구들은 주로 교실 내에서 이루어지는 의사소통에 대한 초점분석을 통하여 학생들 사이에서 이루어지는 의사소통과 학생들과 교사 사이에서 이루어지는 의사소통의 효과성을 분석하였음이 알려져 있다(Sfard, 2001, 2007, 2008). 이에 비하여, 본 연구에서는 모델링 활동이 메타수준 학습을 지원할 수 있는지, 이를 통한 메타수준 학습은 어떻게 일어나는지를 확인하는 데 목적을 두었던 바, 주로 학생들이 구축한 모델의 기능 변화에 초점을 두고 학생들의 활동이 어떠한 수준의 담론에 자리하는지, 학생들의 활동이 상위 수준 담론에 자리한 활동으로 발달하는지를 분석하였다. 특히, 본 연구에서는 모델링 활동을 통하여 메타수준 학습을 지원하는 방안을 도출하고, 이를 적용한 결과 학생들의 탐구에서 메타수준 학습이 일어나는지의 여부를 확인하는 데 더욱 초점을 두었던 바, 학생들 사이의 의사소통, 학생들과 교사 사이의

의사소통, 이 과정에서 학생들이 구축한 모델과 연구진이 개발한 일련의 과제들 사이의 복합적인 상호작용을 면밀히 분석하지는 못하였다는 점에서 한계를 갖는다. 본 연구에서는 모델링 활동을 통한 메타수준 학습 지원 방안을 도출하고 그 적용 가능성을 확인한 바, 후속연구에서는 모델링 활동을 통한 메타수준 학습 과정에서 앞서 언급한 여러 요인들이 어떻게 상호작용하면서 학생들의 학습을 지원하는지에 대한 면밀한 분석이 필요하다고 판단된다.

본 연구에서는 모델링 활동과 메타수준 학습에 대한 선행 연구 검토로부터, 모델링 활동이 메타수준의 수학적 담론 생성과 메타규칙의 변화를 포함하는 메타수준 학습을 촉진할 수 있을 것으로 판단하였다. 이로부터, 본 연구에서는 메타수준 학습을 촉진할 수 있는 모델링 과제 설계와 수업 실행 방안을 도출하고, 실행하여 수학 교수 학습에서 모델링 활동의 잠재력을 분명히 확인하는 데 목적을 두었다. 연구 결과, 학생들이 구축한 모델인 수형도는 한편으로 문제 상황을, 다른 한편으로 학생들의 활동을 압축적으로 의미화하고 있었던 바, 학생들은 모델을 통하여 문제를 해결하고, 모델을 문제 상황에 비추어 재해석하는 과정에서 압축된 행동들에 대한 상위 수준의 활동과 관련된 메타수준 학습에 참여할 수 있음이 확인되었다.

지금까지 선행 연구들에서는 모델링 활동을 통하여 주로 학생들의 문제 해결력 함양(Lesh & Doerr, 2003)이나 모델링 역량의 함양(Blum & Borromeo Ferri, 2009)을 시도하여 왔으며, 수학적 대상이나 절차의 학습은 이러한 문제 해결력이나 모델링 역량의 함양을 꾀하는 가운데 수반될 수 있는 사항으로 논의되어 온 경향이 있었다. 본 연구에서 주장하고자 하는 바는, 한편으로 문제 해결이나 수학적 응용을 위한 모델링의 핵심은 문제 상황을 최적화된 형태로 기술하는 모델의 개발에 있으나, 다른 한편으로 수학적 대상이나 절차의 학습을 위한 모델링 활동의 핵심은 학생들의 활동을 조직화하고 압축하여 이를 상위 수준에서 조작하도록 하는 데 있다는 것이다. 이러한 점에서, 본 연구에서는 수학이 의사소통의 효과성을 추구하는 인간 활동의 압축과 물화를 통한 메타담론 생성과 메타규칙 변화를 통하여 생성된다는 Sfard(2008)의 관점을 토대로 모델링 활동을 통한 메타수준의 수학 학습을 시도하였다. 본 연구에서는 모델링 활동을 통한 메타수준 수학 학습의 가능성을 확률 영역에서 확인하였으며, 확률적 문제 상황과 이에 대한 학생들의 탐구 활동은 수형도와 유사한 형태의 모델로 모델링되고, 이를 활용한 탐구를 통하여 학생들은 메타수준 학습에 참여할 수 있음이 확인되었다.

본 연구는 모델링 활동을 통한 메타수준 학습에 대하여 이상의 제한된 내용 영역에서 연구를 수행했다는 점에서 제한점을 갖는다. 또한, 본 연구에서는 메타수준 학습에 적합한 문제 상황으로 간단한 문장제 문제 상황만을 다루었으나 학습자의 수준이나 특성에 따라 이에 변화를 줌으로서 학습을 촉진할 수 있을 가능성에 대한 추가적인 논의가 필요하다. 예를 들어, Park et. al.(2013)은 영재학생들을 대상으로 한 모델링 활동을 시도하였으며, 다소 복잡한 문제 상황에서도 학생들이 활동의 반성과 내면화를 달성할 수 있음을 확인한 바 있다. 학습자의 수준이나 특성에 따라 과제의 성격이 변화될 필요성이 논의되어왔으므로(이경화, 2003), 다양한 학습자의 특성을 고려한 모델링 과제와 활동의 구성 방안이 마련될 필요가 있다. 이와 더불어, 문제 상황과 학생들의 탐구 활동에 대한 조직화로부터 다른 내용 영역에서는 어떠한 모델이 수립될 수 있는지, 그리고 이는 학생들의 학습을 어떻게 촉진할 수 있는지에 대한 후속 연구를 통하여, 대안적인

수학 학습 방안으로서의 모델링 활동의 가능성을 더욱 분명히 할 수 있게 되기를 기대한다.

참고문헌

박미미, 이동환, 이경화, 고은성 (2012). 유추에 의한 문제제기 활동을 통해 본 통계적 개념 이해, **수학교육학연구, 22**(1), 101-115.

박진형, 이경화 (2013). 수학적 모델링 과정에서 수학화의 기호학적 분석, **수학교육학연구, 23**(2), 95-116.

손홍찬, 류희찬(2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용, **수학교육학연구, 15**(4), 505-522.

신은주, 이종희(2004). 중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구, **수학교육학연구, 14**(4), 403-419.

이경화 (2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구, **수학교육학연구, 13**(3), 365-382.

이경화(2009). 영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결, **수학교육학연구, 19**(1), 45-61.

정연준 (2013). Bachelard 과학철학의 수학교육학적 의미 탐색 - 변증법적 발달을 중심으로, **수학교육학연구, 23**(2), 237-252.

홍진곤 (2012). 주체, 구조, 담론, 그리고 수학 학습, **수학교육학연구, 22**(4), 459-475.

Ahlgren, A., & Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 12. Chance encounters* (pp. 107–134). Dordrecht: Kluwer Academic.

Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (1996). Situated learning and education. *Educational researcher, 25*, 5-11.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M., & O’Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context, *Mathematical thinking and learning, 15*(4), 314-336.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education, In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 12. Chance encounters* (pp. 169–212). Dordrecht: Kluwer Academic.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 163-177.

Blum, W., Alsina, C., Biembengut, M. S., Bouleau, N., Confrey, J., Galbraith, P., Ikeda, T., Lingefjard, T., Muller, E., Niss, M., Verschaffel, L., Wang, S., Hodgson, B. R., Henn, H.-W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelilng in mathematics education - Discussion document. *Educational studies in mathematics, 51*, 149-171.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Borovcnik, M., & Bentz, H.-J. (1991). Empirical research in understanding probability, In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 12. Chance encounters* (pp. 73–106). Dordrecht: Kluwer Academic.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability, In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7-34). New York: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011), From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space, *Educational studies in mathematics, 75*, 15-33.

Clement, J. J. (2009). *Creative Model Construction in Scientists and Students: The Role of Imagery, Analogy, and Mental Simulation*, Springer: New York.

Cobb, P. (2009). Learning as the evolution of discourse: Accounting for cultural, group and individual development, *Human development, 52*, 205-210.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of childrens' combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for teaching and learning* (pp.121-141). New York: Springer.

English, L. D. & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century, In B. Sriraman, & L. English (Eds). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 263-290). Springer: New York.

Falk, R., Yudilevich-Assouline, P., & Elstein, A. (2012). Children's concept of probability as inferred from their binary choices-revisited, *Educational studies in mathematics, 81*, 207-233.

Fischbein, E.(1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Reidel, Dordecht, The Netherlands.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for teaching and learning* (pp.39-63). New York: Springer.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical thinking and learning, 1*(2), 155-177.

Grootenboer, P. (2010). Commentary 1 on problem solving for the 21st century, In B. Sriraman, & L. English (Eds). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 291-295). Springer: New York.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability, *Educational studies in mathematics, 32*, 101-125.

Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as a bridge between school and university, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 196-208.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). In what ways does a models and modeling perspective move beyond constructivism? In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 519-556). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R. & Fennewald, T. (2010). Introduction to Part Ⅰ Modeling: What is it? Why do it? In R. Lesh et al. (Eds.). *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 5-10).

Springer: New York.

Lesh, R. & Harel, G. (2003). Problem solving, Modeling, and Local conceptual development, *Mathematical thinking and learning, 5*(2-3), 157-189.

Lesh, R., Middleton, J. A., Caylor, E., & Gupta, S. (2008). A science need: Designing tasks to engage students in modeling complex data, *Educational studies in mathematics, 68*, 113-130.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113-142.

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks, *Journal für Mathematik Didaktik, 31*(2), 285-311.

Maher, C. A., & Ahluwalia, A. (2014). Counting as a foundation for learning to reason about probability, In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 559-580). New York: Springer.

Marton, F. (2006). Sameness and difference in transfer, *The journal of the learning sciences, 15*(4), 499-535.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom - The case of function, *International journal of educational research, 51-52*, 10-27.

Park, J., Park, M., Park, M.-S., Cho, J. & Lee, K.-H. (2013). Mathematical modelling as a facilitator to conceptualization of the derivative and the integral in a spreadsheet environment, *Teaching mathematics and its applications, 32*, 123-139.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 191-214). New York: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational studies in mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1-3), 13-57.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint, *The journal of the learning sciences, 16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating, human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*, Thousand Oaks: Sage Publications.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia, & M. Borovcnik (Eds.), *Mathematics education library: Vol. 12. Chance encounters* (pp. 135-168). Dordrecht: Kluwer Academic.

Tarlow, L. D. (2010). Pizzas, Towers, and Binomials, In C. A. Maher, A. B. Powell, & E. B. Uptegrove (Eds.), *Combinatorics and Reasoning* (pp.121-132). New York: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in mathematics, 54*, 9-35.

A Study on Meta-Level Learning through Modeling Activities

Park, JinHyeong (Graduate School, Seoul National University)
Lee, Kyeong-Hwa (Seoul National University)

There have been many discussions of teaching and learning mathematics through modeling activities in mathematics education research community. Although there has been some agreement regarding modeling activity as an alternative way to support mathematics teaching and learning, there is still no clear consensus on these issues. This paper reports a case study which aims to identify ways to design modeling tasks and instruction to foster meta-level learning, and investigate how modeling activities can facilitate meta-level learning. From the results of teaching experiment, this study examines the potential of modeling activities in mathematics teaching and learning.

* Key Words : modeling(모델링), meta-level learning(메타수준 학습), probability(확률), tree(수형도)

논문접수 : 2014. 5. 29
논문수정 : 2014. 6. 24
심사완료 : 2014. 6. 26