대한수학교육학회지 <학교수학> 제 16 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 16, No. 4, 677 ~ 690. Dec 2014

등주문제 분석을 통한 공간감각 계발을 위한 학습자료 추출 연구[1)]

최 근 배* · 채 정 림**

수학교육에서 도형영역 학습은 공감감각 기르기와 도형과 관련된 개념형성을 주요 특징으로 한다. 공간감각 기르기 활동은 주로 여러 가지 변환의 관점에서 다루고 있으며 도형학습과 관련된 수업모형은 주로 개념형성 모형을 따르고 있다. 그러나 개념과 개념을 이어주는 연결성과 관련된 학습 내용은 부족하다.
본 연구에서는 공간감각을 도형에 관한 직관과 도형과 관련된 개념들 사이의 관계적 이해의 능력으로 보고 등주문제 분석을 통해서 공간감각 기르기 활동과 관련된 교수·학습 자료를 추출하고 이를 바탕으로 한 사례분석을 통해 교육학적 시사점을 얻고자 한다.

I. 서 론

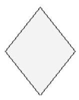
공간감각(spatial sense) 또는 공간추론(spatial reasoning)의 계발에 관한 언급은 학교수학의 모든 단계에 NCTM 규준으로 나타나 있다. 여기서 말하고 있는 공간감각은 공간과 모양에 대한 재빨리 머릿속에 떠오르는 직관적인 느낌으로, 기하적인 공간의 감각, 특별히 기학적인 도형들이 가지는 패턴이나 관계를 의미한다 (NCTM, 2000).

Bishop(1980)과 Harris(1981)은 공간감각에 관한 두 가지 중요한 요소로 ‘spatial orientation’과 ‘spatial visualization’을 들고 있다. 특히, Bishop (1983)은 이를 ‘spatial ability’의 관점에서 도형 정보를 해석하고 용어와 시각적 표현을 이해하는 능력, 도형의 시각적인 표현의 변형과 조작을 포함하는 시각적인 과정에 관한 능력, 도형들 사이의 추상적인 관계를 시각적인 표현으로 바꾸는 능력으로 공간감각을 언급하고 있다 (Clement & Battista, 1992, p. 444, 재인용). Garner는 공간감각을, 공간지능(spatial intelligence)의 관점에서, 자신의 근본적인 인지와 관련된 변형이나 수정을 수행하기 위한 실세계를 지각할 수 있는 능력 및 자신의 시각적인 경험 상황을, 적적한 물리적인 자극 없이도, 다시 만들어 낼 수 있는 능력으로 설명하고 있다(Garner, 1983, p. 173).

학교수학에서 추구하는 기하교육의 근본적인 목표(NCTM, 2000, p. 41; 교육과학기술부, 2008, p. 58)는 수학의 세계나 일상에 있는 문제를 해결하기 위해서 학생들의 ‘공간감각과 기하적인 성질이나 관계’를 파악하는 능력을 계발하는 것이다.

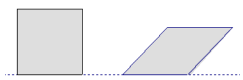
* 제주대학교, kbchoe@jejunu.ac.kr (제1 저자, 교신저자)
** University of North Carolina at Charlotte, jchae@uncc.edu
1) 이 논문은 2014학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었음

J대학교 과학영재교육원의 초등영재입시(2011)에서 심층면접 문항으로 ‘둘레의 길이가 같은 마름모와 정사각형 중 어느 도형이 넓이가 넓은가?’라는 공간 감각과 관련된 도형문제를 제시한 경험이 있다. 대부분의 학생은 대수적인 방법으로, 이미 배운 넓이 공식으로 각 도형의 넓이를 계산하고 그 후 비교, 문제를 해결하였다. 또한 대부분의 학생은 마름모에 대한 도형 이미지가 [그림 I-1]과 같이 소위 말하는 다이아몬드 모양으로 고착화되어 있었다.



[그림 I-1] 마름모에 대한 학생들의 일반적인 이미지

그러나 한 명의 학생은 두 도형을 일반적인 평행사변형의 범주에서 취급, 쉽게 두 도형의 넓이를 비교하였다([그림 I-2] 참조).



[그림 I-2] 둘레의 길이가 같은 정사각형과 마름모의 감각적인 넓이 비교

여기서 우리가 수학교육의 입장에서 생각해 볼 수 있는 문제는 다음과 같다.

첫째, 학생들은 왜 도형문제를 도형의 범주에서 해결하지 않고 측정의 범주에서 해결하려고 할까? 도형의 문제를 도형의 범주에서 다루지 않고 측정의 범주에서만 취급하게 되면 도형과 관계된 감각들이 사상(捨象)될 수 있다.

둘째, 학생들의 관계적 이해의 능력, 즉 알고 있는 지식들의 활용성이 전반적으로 부족하다는 점이다. 실제로 학교수학에서는 새로운 지식을 만드는 것보다 알고 있는 지식을 어떻게 잘 활용할 수 있는가가 보다 더 중요하다.

학교현장에서 학생들의 학습에 영향을 주는 주된 주체는 교사이다. 따라서 학생들의 도형에 관한 이미지와 도형을 다루는 감각적 능력은 교사들에게서 많은 영향을 받는다.

이 논문에서는 공간감각을 두 가지의 관점 도형문제를 도형의 관점에서 해결하는 능력과 도형과 관련된 지식의 활용능력으로 보고 몇몇 수학자들에 의한 등주문제의 기하적인 정당화의 과정을 살펴보고 공감감각 계발을 위한 학습 자료를 추출하고 또한 추출된 자료를 중심으로 장차 초등학교 교사가 될 예비교사로서 공감감각 능력을 분석하고 이를 바탕으로 예비교사들의 공감감각 능력 신장을 위한 교수·학습 자료 개발과 관련된 교수학적 시사점을 얻고자 한다.

등주문제와 관련된 논문의 대부분은 순수 수학적인 것이 대부분이고 수학 교육적인 입장에서의 논문은 드물며 주로 등주문제의 내용 구성이 주된 관심사다 (Beslin & Simons, 1993; Foletta & Leep, 2000; Adabor & Foley, 2010; 최근배, 2009, 2011). Beslin & Simons (1993)는 다각형 등주문제의 내용구성 (먼저 볼록다각형, 그 후 정다각형)을 다루고 그 후 근사의 방법으로 등주문제의 답이 원임을 직관적으로 언급하고 있다. 그러나 이 논문에서 다각형 등주문제의 답이 정다각형임을 보일 때, 등각의 정당화가 명확하지 못하다(p. 209, [그림 5]). 이와 관련하여 최근배(2009)는 다른 방법의 접근(p. 237, [그림 IV-2])을 사용하여 좀 더 명확히 등각임을 정당화하고 있다. Foletta & Leep(2000)는 사각형에 한정된 등주문제를 다루고 있는데 주로 Geometer’s Sketchpad을 활용한 경험적인 방법 (귀납적인 추론)을 취하고 있다. Adabor & Foley (2010)는 고정된 둘레의 길이를 가지는

부채꼴의 등주문제를 다루고 있는데, 공학적인 도구를 활용한 교수방법으로 내용의 구성은 경험적, 귀납적인 추론의 방식을 취하고 있다. 특히, 이 논문에서는 ‘부채꼴을 조각내어 정4각형이 될 때(p. 20, [그림 4]와 [그림 5])’ 답이 된다는 아이디어는 초등학교에서 조작적인 방법으로 원의 넓이공식을 유도하는 아이디어와 같다는 관점에서 매우 흥미롭다. 최근배 (2009, 2011)는 주로 영재학생을 대상으로 한 학습 자료의 구성에 관한 내용인데, 각각 게슈탈트 (Gestalt)의 관점과 분석적인 방법을 중심으로 다루고 있다. 특히, 최근배 (2011)는 기존에 잘 알려진 다양한 방법의 등주문제 증명법 중에서 기하적인 방법을 분석하고 있다. 실제로 이 분석에 따르면 앞서 언급한 논문들의 기본 아이디어들은 이미 이전의 수학자들이 증명에 사용한 방법과 동일하며, 수학교육의 입장에서는 단지 이 아이디어를 바탕으로 ‘학습 자료로 어떻게 구성할 것인가?’의 문제가 주된 관심사이다. 선행 논문과 이 논문의 차이점은 앞에서 언급한 것처럼 수학자들이 등주문제 증명에 사용한 기본 아이디어를 공간감각의 관점에서 다루고 있는 사례 중심의 연구라는 것이다. 여기서 초등학교 교사가 될 예비교사로서 공감감각 능력분석을 위한 자료의 타당성은 일반적으로 수학자들의 공간 감각 능력이 일반인 보다 뛰어나다는 가정이 바탕이다.

Ⅱ. 등주문제 고찰

1. 등주문제

등주문제(isoperimetric problem)[2]는 고대 그리스시대부터 잘 알려진 최적화 문제 중 하나였다. 실제로, 그 당시에 주어진 도형에서 ‘둘레의 길이’와 ‘넓이’사이의 관계와 연관된 이슈는 땅의 크기를 다루고 있다는 점에서 중요한 것이었다.

등주문제의 관심을 가질 만한 문헌적 역사는 Dido여왕의 전설[3]까지 거슬러 올라가며, 등주문제의 완전한 증명법은 Weierstrass와 Edler에 의해서 가장 먼저 이루어 졌다 (Siegel, preprint, p. 2; Andrejs Cibulis, 2004, p. 23). 그러나 수순기하적인 증명은 고대 그리스에 알려졌고, 이는 A.D. 4세기경에 Pappus에 의해 Zenodorus의 등주문제 결과가 기록되었으며, 현재의 수학적인 관점에서 증명이 완전하지 못하였지만 그들은 자신들의 결과를 신뢰하였다.

등주문제의 증명에 대한 현대의 연구는 Steiner에 기인한다고 볼 수 있다. 1841년 그는 순수 유클리드 기하를 사용한 다섯 개의 기하적인 아이디어가 이전의 것보다 돋보이는 우아하고 개선된 증명 절차를 발표하였다. 그러나 Steiner 자신은 자신의 증명을 완전한 것으로 보았지만, 그 시대의 유명한 수학자였던 Weierstrass는 증명과정 중에 나타나는 존재성의 문제 때문에 Steiner의 증명을 완전한 것으로 생각하지 않았다. Weierstrass는 해석학과 미·적분

2) 등주문제와 관련된 좀 더 상세한 내용은 Demjanenko(2008), Hildebrandt & Tromba (1996), Siegel(preprint), Tapia(2009)와 Blasjo(2005) 등을 참고하기 바란다.

3) Dido는 Tyre의 왕의 딸이었지만, 왕이 죽은 후 왕위를 계승한 그녀의 오빠에게 남편이 살해를 당하자 오빠에게서 도망쳐 그를 따르는 많은 사람들과 함께 여러 척의 보트에 나누어 타고 항해를 하여 아프리카의 튀니지 해안에 도착하게 되었다. 그곳의 원주민 들은 새로운 사람들의 등장을 그다지 반기지는 않았다. 그러나 그곳에서 Dido는 그들의 왕과 거래를 성사시켰다. 그녀는 항소 한 마리의 가죽으로 표시(두 지역 간 경계)할 수 있는 만큼의 땅에 공평한 돈을 그에게 지불하였다. 거래가 끝난 후 원주민의 왕은 그녀(Dido)보다 더 많은 것을 얻었다고 생각했지만 곧 그녀가 더 현명하였다는 것을 깨달았다. Dido는 황소 가죽을 잘라 가는 띠를 만들어 토지의 영역을 (반)원으로 만들었다(최근배, 2011, p. 443).

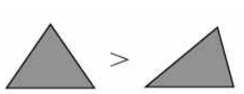
을 이용하여 등주 문제의 증명을 명확하게 해결하였다 (Siegel, preprint, p. 2).

2. 학습자료 추출

가. 등주문제 학습자료

공간 감각과 관련된 학습 자료를 추출하기 위해서 기하적인 방법으로 등주 문제를 증명하였던 몇몇 수학자의 핵심적인 아이디어를 살펴보자.

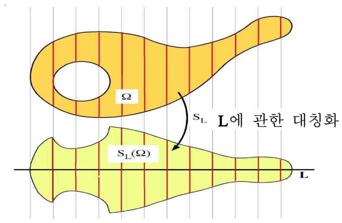
먼저, Pappus와 Theon과 같은 수학자의 참고문헌을 통해서 남아있는 고대 그리스 수학자 Zenodorus의 아이디어를 살펴보자. Zenodorus는 증명 또는 추측된 중요한 4개의 명제를 제공하고 있다 (Tapia, 2009). 이 명제들의 증명에 사용된 아이디어는 기하적인 방법을 통해서 등적변형, 등변 및 등각을 보이는 것인데, 여기서는 등변을 증명하기 위한 핵심적인 아이디어를 살펴본다. 그 아이디어는 [그림 II-1]과 같다.



[그림 II-1] 등변(Blasjo, 2005, p. 259)

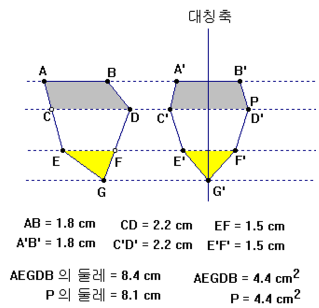
[그림 II-1]에서 두 삼각형의 밑변이 길이가 같기 때문에 높이가 높은 삼각형이 넓이가 넓다. 따라서 밑변을 제외한 나머지 두변의 길이가 같기 때문에 두변의 길이 차가 작은 삼각형이 넓이가 더 넓다.

둘째, 수학자 Steiner는 등주문제에 다양한 증명방법을 제공하고 있다. 여기서는 눈송이 만들기(snowball-packing) 증명에 사용된 아이디어를 살펴본다. 우리가 눈을 뭉칠 때처럼, 처음의 울퉁불퉁한 모양이 점점 둥글게 변해가도록 한다는 것이 기본적인 아이디어이다. 수학적인 상황으로 이야기하자면, 주어진 도형을 원으로 변형시키는 동안, 넓이는 유지하면서, 둘레의 길이는 점점 짧아지도록 한다는 것이 눈송이 만들기 증명법의 핵심 아이디어이다. 결국 주어진 도형을 [그림 II-2]와 같은 대칭화를 계속 사용하여 원에 수렴시키는 것이다.



[그림 II-2] Steiner의 대칭화(Treibergs, 2008, p. 5)

눈송이 만들기 증명에 나타난 아이디어를 이해하기 위해서 다각형인 경우에 한정하여 고찰한다.



[그림 II-3] 눈송이 만들기

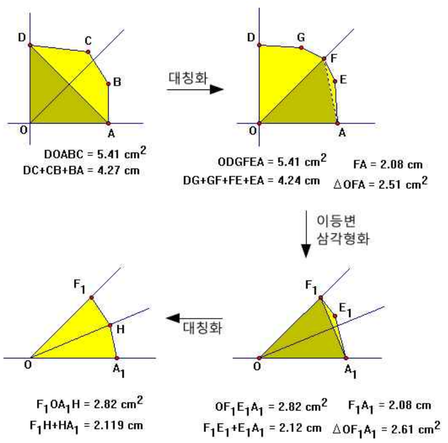
먼저, 볼록 도형으로 시작하여 [그림 II-3]과 같이 주어진 볼록 도형을 어떤 직선에 대칭이 되도록 변형한다.

실제로 이러한 활동에서는 두 가지의 기하적인 변형만 나타난다. 이는 ‘삼각형의 넓이가 같고 둘레의 길이가 더 짧은 이등변삼각형으로의 변형’과 ‘사다리꼴의 넓이가 같고 둘레의 길이가 더 짧은 등변사다리꼴로의 변형’이다. 위의 두

가지 변형에서 전체적으로 넓이의 변화는 없지만 둘레의 길이는 더 짧아진다.

이제, 대칭축을 달리하면서 [그림 II-3]과 같은 변형을 연속적으로 수행한다. 결국 임의의 축에 대칭인 원에 도달할 수 있다.

셋째, '둘레의 길이가 일정한 평면 도형 중에서 넓이가 최대인 도형이 존재한다.'는 존재성의 가정 없이 Edler는 1882년에 특정한 둘레의 길이를 가지는 원이 아닌 평면도형은 그 원보다 더 작은 넓이를 가진다는 사실을 증명하였다 (Blasjo, 2005, p. 544). 이것을 일반적으로 Edler의 유한 존재증명(Edler의 finite existence proof)이라고 부르며,



[그림 II-4] 유한 번의 활동으로 주어진 다각형을 정다각형으로 만들기

개략적인 증명의 절차는 [그림 II-4]와 같다. [그림 II-4]에 있는 첫 번째 다각형은 주어진 다각형 P에 'x-축과 y-축에 의한 Steiner의 대칭화'와 '고정된 길이의 한 변을 움직인 이등변삼각형화'를 통해 만들어진 다각형의 1사분면을 나타내고 있다. 그 나머지 부분은 대칭성으로 그 모양을 짐작할 수 있다. 두 번째 다각형은 첫 번째 다각형의 새로운 축-이전 두 축사이의 각의 이등분선-에 의한 Steiner의 대칭화 활동이다. 세 번째 다각형은 이전 다각형에서 만들어진, 원점(O), 새로운 축과 다각형이 만나는 점(F), 이전 축과 다각형이 만나는 점(A)로 만들어 진 삼각형의 이등변삼각형으로의 변형이다. 끝으로 마지막 다각형은 이전 다각형의 새로운 축에 의한 Steiner의 대칭화이다.

[그림 II-4]와 같이 유한 번의 단계를 통해서, 축 위에 있는 않는 꼭짓점이 없음을 알 수 있으며, 모든 삼각형이 이등변삼각형이고 따라서 정다각형을 얻을 수 있다. 실제로, [그림 II-4]에서는 정 16각형이다.

끝으로, Lawlor의 dissection 증명법(Blasjo, 2005, p. 551-552; Siegel, preprint, pp. 6-8)에서 나타난 핵심적인 아이디어를 분석해 보자.

둘레의 길이가 p인 볼록 영역 F의 경계를 따라서 임의의 연속된 두 점사이의 거리가 $\frac{p}{2n}$인 $2n$ 개의 점

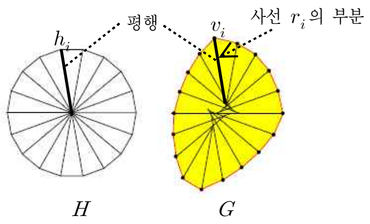
$$v_{0,}\ v_1,\ \ldots,\ v_{2n-2},\ v_{2n-1}$$

을 정하고 또한 이들 연속된 각 점을 연결하여 만든 다각형을 편의상 G라고 하자. 한편 중심이 h인 정 $2n$-각형 H를 만들자. 여기서 각 꼭짓점을

$$h_{0,}\ h_1,\ \ldots,\ h_{2n-2},\ h_{2n-1}$$

로 정하자. 당연히 각 변의 길이는 $\frac{p}{2n}$이다.

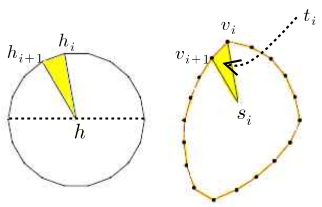
정다각형 H의 각 꼭짓점에서 중심 h로의 선분을 그리고 G의 각 꼭짓점 v_i에서 선분 $\overline{h_ih}$에 평행한 사선(ray) r_i를 그린다.([그림 II-5] 참조)



[그림 II-5] 정다각형과 내접다각형에서의 평행 사선(Siegel, preprint, p. 6)

이제, $t_i\,(0 \le i \le 2n-1)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$t_i = \begin{cases} \triangle v_i v_{i+1} s_i & <\text{그림 } II-6> \text{인 경우} \\ \overline{v_i v_{i+1}} & \text{두 사선} r_i \text{와 } r_{i+1} \text{이 만나지 않는 경우} \end{cases}$$



[그림 II-6] 두 사선 r_i와 r_{i+1}이 s_i에서 만나는 경우

따라서

$$\begin{aligned} \text{넓이}(G) &\le \text{넓이}(t_0)+\text{넓이}(t_1)+\cdots+\text{넓이}(t_{2n-1}) \\ &\le 2\times n\times \text{넓이}(\triangle hh_0h_1)=\text{넓이}(H) \end{aligned}$$

여기서 n을 무한히 증가시키면 G는 주어진 곡선 F로 수렴, 이에 대응하여 정 $2n$ 각형 H는 둘레의 길이가 p인 원으로 수렴한다. 넓이 또한 그렇게 된다. 즉, n이 커짐에 따라

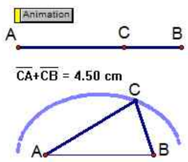
$$\text{넓이}(G) \to \text{넓이}(F),\quad \text{넓이}(H) \to \text{넓이}(C_p)$$

여기서, C_p는 둘레의 길이가 p인 원을 나타낸다.

나. 학습자료 추출

1) 균형화(평균)

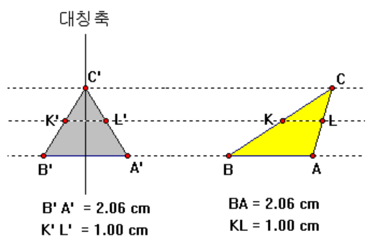
[그림 II-7]은 다각형의 등주문제에서 등변을 보일 때 사용되는 핵심아이디어로 5각형 이상의 다각형의 등각을 밝히는 경우에도 유용하게 사용 된다 (최근배, 2009, p. 237, [그림 IV-11]).



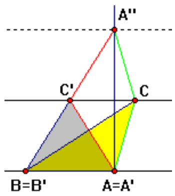
[그림 II-7] 고정된 한 변과 합이 일정한 두변으로 구성된 삼각형의 넓이 변화

2) 대칭화와 등적변형

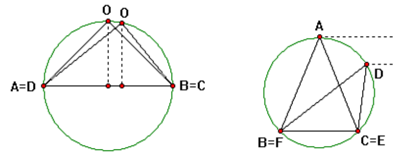
Steiner의 소위 말하는 눈송이 만들기(snowball-packing) 증명에서 나타나 있는 핵심적인 아이디어는 주어진 도형을 선대칭화 도형으로 변화했을 때 넓이의 변화는 없으면서 둘레의 길이는 더 작아지는 도형으로 만들 수 있다는 것이다.



[그림 II-8] Steiner의 대칭화 활동



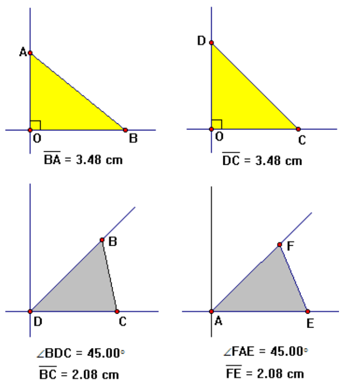
[그림 II-9] 삼각형의 대칭화와 둘레의 길이



[그림 II-11] 한 각과 대변의 길이가 같은 삼각형의 원주각을 이용한 넓이 비교

3) 원주각과 넓이

Edler의 유한 존재증명법 및 Lawlor의 dissection 증명법에 나타나 있는 공통적인 핵심적 아이디어는 [그림 II-10]에 주어진 위·아래 각각에 주어진 두 삼각형의 넓이 비교이다.



[그림 II-10] 한 각과 대변의 길이가 같은 삼각형

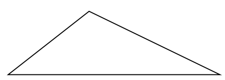
[그림 II-11]은 도형의 감각적인 넓이비교를 보여준다. 즉, '한 각과 그 각의 대변의 길이가 같은 삼각형의 넓이비교' 인데, 문제를 원주각이 같은 경우로 귀착시켜 생각하면 대수적인 계산 없이 감각적으로 두 도형의 넓이를 바로 비교(직접비교) 할 수 있다.

Ⅲ. 공간감각 분석

공간 감각적 사고력에 관한 연구를 위하여, 앞선 장에서 수학자들이 등주문제 해결에 이용한 대칭화와 균형화의 아이디어를 살펴보았다. 이를 바탕으로, 교육대학 학생들이 어느 정도의 공간 감각적 사고력을 지녔는지, 또 공간 감각을 이용한 문제 해결력을 알아보고자 사례연구를 실시하였다. 사례 연구의 자료는 지필 시험을 통해 구하였다. 연구 참여자는 총 28명으로, 이들은 J 대학교 교육대학 1학년 학생이다. 참여자들은 한 학기동안 제 1저자의 강의를 수강하였으며, 강의는 다양한 문제풀이를 통하여 수학적 사고력을 증진하는데 초점을 두었다. 수업을 통해서 학생들은 앞서 보여준 수학자들의 등주 문제 해결의 핵심적 아이디어를 배웠으나, 자료 수집에서 사용된 문제들을 직접 접하지는 않았다. 학기말에 치룬 지필 시험에서 공간 감각적 사고력 관련한 4개의 문항에 대한 학생들의 답변을 분석하였다.

1) 균형화

문제 1. 다음에 주어진 삼각형의 둘레의 길이를 변화시키지 않고 넓이가 더 큰 삼각형을 만들어라.



반응 결과를 요약하면 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 균형화

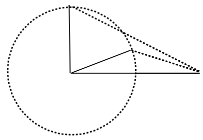
	핵심아이디어	학생수
아이디어 도출	[그림 II-1]	6
아이디어 도출 못함	직각삼각형화	9
	정삼각형화	8
	특수화 예	2
	기타	3

N=28

긍정적인 아이디어를 도출한 학생은 28명 중 6명으로 약 21%로 나타났으며, 그 아이디어는 6명 모두 같은 것으로, 고대 그리스 수학자 Zenodorus가 사용한 아이디어([그림 II-1] 참조)와 정확히 같았다.

그러나 이 아이디어는 중등학교 수학과 교육과정에서 다루고 있는 타원을 그릴 때 사용하는 아이디어([그림 II-7] 참조)와 동일한 것임을 고려하다면 정답률이 매우 낮은 편이다. 즉, 여러 가지 지식을 관계적으로 활용하지 못하고 있음을 보여 주고 있다. 이와 관련하여 타원의 개념을 배우지 않은 J대학교 영재교육원 초등수학 심화반 영재학생 32명을 대상으로 실험을 실시해 보았다. 결과는 오히려 영재학생들의 정답률이 31% (32명 중 10명)로 대학생들 보다 높게 나타났다. 이러한 결과를 비추어 생각해 보면 대학생들의 공간감각과 관련된 관계적 이해능력이 생각보다 높지 않음을 알 수 있다.[4)]

아이디어를 도출하지 못한 대학생들 중 주어진 삼각형을 직각삼각형으로 변형하려는 아이디어는 결국 '주어진 두 선분을 삼각형의 변으로 하는 삼각형 중에서 넓이가 최대인 경우는? ([그림 III-1] 참조)'라는 문제를 해결한 것으로 고정된 둘레의 길이를 고려하지 못한 것이다.



[그림 III-1] 고정된 길이의 두 변을 가지는 삼각형의 넓이 비교

한 대학생의 반응을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

"밑변은 그대로 놓고 높이를 본다. 밑변의 외쪽 모서리로 높이를 이동해서 붙이면, …중략… 그러므로 직각삼각형을 만들면 된다."

한 대학생의 경우는 주어진 삼각형을 직각삼각형으로 만드는 과정 중에 둘레의 길이를 고려하고 있다. 주어진 삼각형이 둔각인 경우에는 설명이 맞지만 예각인 경우에는 수학적인 정당성을 보장받을 수 없다. 구체적인 반응은 다음과 같다.

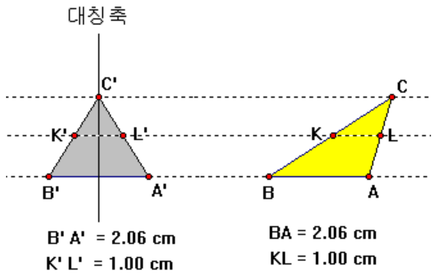
"직각삼각형이 될 때 기존 삼각형이 둔각삼각형이면 그 각과 마주보는 변의 길이가 줄어드는데 그 수치만큼 직각을 끼고 있는 변이 늘어난다. 예각삼각형인 경우 반대로 직각이 될 각과 마주보는 변이 늘어나고 나머지 변이 줄어듦 …중략… "

아이디어를 도출하지 못한 대학생들 중 주어진 삼각형을 정삼각형으로 변형하려는 아이디어는 결국 평면에서의 삼각형 등주문제의 답이 정삼각형이라는 사실이 영향을 준 것 같다. 실제로, 다수의 대학생들은 수학과 교육과정에서 이차함수의 활용부분에서 직사각형의 등주문제를 예로써 다루어 본 경험을 갖고 있다.

4) 고등학교수학에서 타원은 '기하와 벡터'에서 다루고, 문과 학생이 대부분인 교육대생 (타원을 그리는 아이디어를 배우지 않았을 가능성이 있다는 측면)을 고려한다면 결론의 외현적 타당성이 약함을 밝혀 둔다.

2) 대칭화

문제 2. 그림에서 볼 수 있는 수학적 사실(넓이와 둘레의 길이 관계)을 기술하고, 그 사실을 정당화하라.



위 문제의 대학생반응 결과를 개략적으로 요약하면 <표 III-2>와 같다.

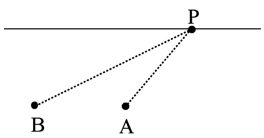
<표 III-2> 넓이와 둘레의 길이 관계 정답률

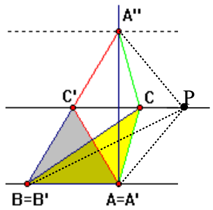
넓이와 둘레의 길이 관계	
기술	(직관적)정당화
28(100%)	5(18%)

N=28

<표 III-2>에 따르면 넓이와 둘레의 길이 관계를 대부분의 대학생이 예측을 했지만 그 사실의 정당화를 논리적 모순 없이 기술한 대학생은 5명뿐이었다. 즉, 실제적 정답률은 28명 중 5명, 약 18%로 나타났다.

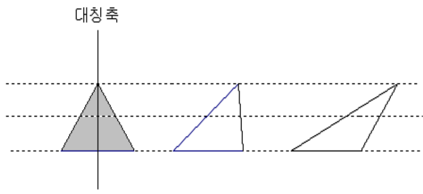
정당화와 관련된 아이디어 중 하나는 중등 수학이나 물리에서 배우는 [그림 III-2]에서와 같이 '점 A에서 직선 l상의 임의의 점 P를 지나 점 B에서 이르는 거리 $\overline{AP}+\overline{PB}$가 최단거리가 되도록 하는 직선 l상의 점 P를 찾는 문제'와 같다.





[그림 III-2] 최단거리와 정당화

(직관적)정당화를 한 대학생 5명의 방법을 분석해보면 다음과 같다. 2명은 대수적인 방법, 3명은 기하적인 방법을 사용하였다. 대수적인 방법을 사용한 대학생 중 1명은 '산술·기하 평균 사이의 부등식'을 사용하였고, 또 다른 1명은 '직접적인 계산'을 사용하였다. 기하적인 방법을 사용한 대학생의 반응을 살펴보면 1명은 '두 점 사이의 최단거리'를 사용하였고, 1명은 직관적인 '외접원의 둘레의 길이를 비교'하는 방법을, 그 나머지 1명은 직관적이긴 하지만 '꼭짓점의 변화에 따른 대칭화의 정도와 둘레의 길이를 비교' 하는 방법을 사용하였다([그림 III-3] 참고).



[그림 III-3] 직관적 대칭화의 정도

"… 극단적인 경우를 놓고 생각해 보면 문제해결이 쉽다. …중략… 하지만, 도형이 대칭과 멀어질수록 도형이 형성되기 위해 필요한 변의 길이가 늘어나므로 둘레의 길이는 더 길어진다. 따라서 밑변과 높이가 같아 넓이는 같지만, 대칭화 됐을 때의 도형의 둘레의 길이가 가장 짧다."

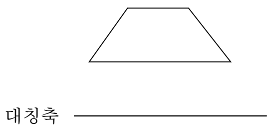
정당화의 아이디어를 도출하지 못한 대학생 중 6명은 자신이 알고 있는 나름의 선행지식을

사용하려는 경향을 보였다.

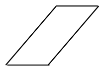
> “둘레가 같을 때 넓이는 정삼각형일 때 최대, 그런데 두 삼각형의 넓이는 같고 왼쪽 삼각형이 정삼각형에 더 가까우므로 오른쪽 삼각형이 둘레가 더 길어야 넓이가 같아질 수 있다.”
> “…중략… 원은 최대한으로 대칭화가 된 도형이다. 원을 지날 수 있는 대칭축은 무한히 많다. 이러한 원은 다른 도형과 비교했을 때 둘레의 길이 대비 넓이가 가장 크다. …중략… 삼각형 $A'B'C'$은 삼각형 ABC가 대칭화된 것이므로 더욱 원에 가깝다. 넓이가 같다면 …중략… 삼각형 $A'B'C'$의 둘레의 길이가 삼각형 ABC의 둘레의 길이보다 짧다.”

즉 넓이가 같은 경우, 정삼각형에 가까울수록, 원에 가까울수록, 대칭화된 구조일수록, 대칭적일 수록 둘레의 길이가 더 짧아진다는 선행 지식의 영향을 받고 있는 것 같다.

문제 3. 그림에서 주어진 도형을 아래의 대칭축으로 대칭화하라.

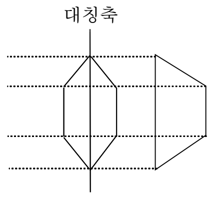


위의 문제는 대학생들의 ‘공간에서의 위치에 대한 감각이 있는가?’ 또는 ‘공각을 잘 다루고 있는가?’의 정도를 파악하기 위한 문항이다. 이 문제를 공간감각의 문제로 생각한 이유는 보통 수학과 교육과정에서 보면 평행사변형의 넓이를 구 할 때, 이것을 직사각형으로 변형하여 그 넓이를 구한다. 교과서에 주어진 평행사변형은 정규적인 형태로 주어지기 때문에 학생들은 변형에 별 어려움을 느끼지 않지만, [그림 III-4]와 같은 좀 극단적인 형태를 주면 직사각형으로의 변형에 상당히 혼란을 겪는다. 교과서를 90°로 돌려서 또는 자려는 축을 돌려서 생각을 하면 별 문제없이 직사각형으로 변형할 수 있다.



[그림 III-4] 극단적 형태의 평행사변형

이 문제의 앞에 주어진 삼각형의 경우는 대칭축을 세로 방향으로 설정하고 대칭화를 했지만 이 문항에서는 단지 대칭축을 가로 방향으로 설정하였다는 것뿐이다. 다시 말해서 90°로 회전하면 앞선 문제와 같은 문제이다. 주어진 종이를 90°로 회전하면 [그림 III-5]와 같고 앞선 문제와 다름이 없다 ([그림 II-8] 참고).

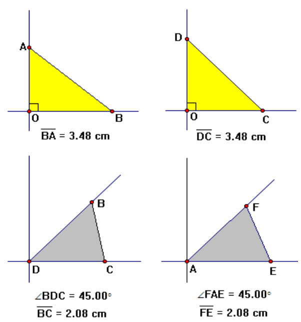


[그림 III-5] Steiner의 대칭화

그럼에도 불구하고 이 문제를 해결한 대학생은 28명 중 7명, 약 25% 정도였다.

3) 지식이용

문제 4. 그림의



각각 위·아래 두 삼각의 넓이를 가능한 다양한 방법으로 비교하라.

위의 문제는 대학생들이 알고 있는 지식의 활용을 묻는 문제다. 즉, 주어진 두 삼각형의 넓이를 다양한 방법으로 비교하는가를 알고자 한 문제이다.

대부분의 대학생들은 '측정을 통한 공식을 이용하는 방법'만을 생각하였고, 그 중 4명의 대학생은 '겹쳐보기 방법'을 제시하였지만, '원주각을 이용하는 방법'을 제시한 대학생은 1명에 불과하였다. 그러나 실제로, 원주각을 이용하는 방법을 제시한 대학생의 경우도 문제에 주어진 위의 두 삼각형, 즉, 원주각이 90°인 특수한 경우에만 답을 제시하였고 아래 두 삼각형과 같은 일반적인 경우로 확장은 하지 못하였다. 실제로,

> "$\overline{AB}$와 $\overline{DC}$를 각각 지름으로 하는 원을 그려서 …중략… 직각이 되는 점이 원의 어디에 있는지 …중략…"

일반적으로 측정의 활동보다 비교의 활동이 교육과정상 선행하지만 대부분의 대학생들의 생각은 그 반대인 것 같다. 즉, 두 대상을 비교할 경우 각 대상의 측정값을 구한 후 두 측정값으로 비교하는 경향이 두드러지게 나타나고 있다.

Ⅳ. 요약 및 교육적 시사점

수학의 여러 분야 중에서 기하영역은 교수·학습에 있어 다른 어느 분야보다도 직관·감각적인 능력을 많이 요구한다. 이 논문에서는 등주문제 분석을 통하여 과거 수학자들이 등주문제를 해결하는데 사용한, 기하를 중심으로 한 증명 아이디어를 살펴보고, 이를 통해 공감감각 능력 신장을 위한 학습 자료를 추출하고 이를 바탕으로 교수학적 시사점을 얻기 위해서 등주문제 해결과정에 사용된 몇몇 감각적인 아이디어를 중심으로 장차 초등학교 교사가 될 대학생들의 공간감각 능력을 살펴보았다.

이러한 사례연구의 분석을 통해서 얻을 수 있는 교수학적 시사점을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 과거 수학자들이 사용한 증명의 아이디어와 현재 대학생들의 아이디어 사이에 유사점이 있었다. 따라서 학습 자료의 구성에 과거 수학자 자신들이 만든 명제의 정당화를 위한 수학적 아이디어는 좋은 수학학습의 내용적 원천이 될 수 있다. 이렇게 만들어진 학습 자료는 수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구(김진호, 2005)할 수 있는 좋은 소재가 될 수 있다.

둘째, 공간 감각과 관련된 대학생들의 관계적 이해(Skemp (김판수·박성택 역), 1996) 능력이 상당히 부족하였다. 어떤 주제를 다룰 때 긴 시간을 두고 포괄적으로 생각해보는 교수·학습 환경이 필요하다. 이를 테면, 프로젝트 학습 등을 생각할 수 있다.

셋째, 정당화를 위해서 선행지식을 활용하려는 경향을 보였다. 이로부터 어느 정도의 추측을 할 수 있었지만, 주어진 문제의 타당한 정당화의 능력은 많이 부족하였다. 이러한 현상의 원인은 우리의 기하교육이 주로 정형화된 논증기하를 중심으로 다루어지고 있는 교육과정상의 문제에서 찾을 수 있다. 즉, 직관적이고 감각적인 능력을 요구하는 비정형화된 문제를 다루는 능력이 많이 부족하다.

끝으로, 두 도형을 비교할 때 두 도형을 도형의 범주에서 다루는 것보다 다른 영역(주로 측정 영역)의 범주에서 취급하려는 경향이 많다. 이 과정에서 도형의 변형과 관련된 감각들이 사상(捨象)될 수 있다. 다시 말해서, 비교하는 활동이 측정활동보다 선행하지만 학생들의 사고는 각 대상들을 따로 측정한 후 측정값으로 비교하는 경향을 보이고 있다. 이 과정 속에서 도형사이의 관계, 변형 등의 공감감각이 사라 질 수 있다.

참고문헌

교육과학기술부 (2008). 초등학교 교육과정 해설 (수학과). 교육과학기술부.

김진호(2005). 수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구할 수 있는 방안 모색. **한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육, 44**(1), 87-101.

최근배 (2009). 초등수학 영재를 위한 평면에서의 등주문제 고찰(게슈탈트 관점을 중심으로), **학교수학, 11**(2), pp. 227-241.

최근배 (2011). 초등 영재 교수・학습을 위한 평면에서의 등주문제 내용구성 연구-기하적인 방법을 중심으로-, **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 50**(4), 441-466.

Adabor, J. K. & Foley, G. D. (2010). Maximizing the Area of a Sector With Fixed Perimeter, *Ohio Journal of School Mathematics*, No. 62, fall, pp. 17-23.

Andrejs Cibulis (2004). Acta Societatis Mathematicae Latviensis, Abstracts od the 5th Latvian Mathematical Conference, April 6-7, 2004, Daugavpils, Latvia 2004 LMB.

Beslin, S. J. & Simmoms, L. L. (1993). An Isoperimetric Problem Revisited, Mathematics Teacher 86 (March), pp. 207-210.

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education - A review. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 257-269.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and process*. NewYork: Academic Press.

Blasjo, V. (2005). The Evolution of the Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly, 112*, pp. 526-566.

Clement, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Demjanenko, S. (2008). The Isoperimetric Inequality: A History of the Problem, Proofs and Applications. http://astrophysicsgeek.files.wordpress.com/2008/04/paper_final.pdf

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: Thet heory of multiple intelligences*. NewYork: BasicBooks.

Harris, L. J. (1981). Sex-related variations in spatial skill. In L. S. Liben, A. H. Patterson, & N. Newcombe (Eds.), *Spatial representation and behavior across the life span* (pp.83-125). NewYork: AcademicPress.

Hildebrandt, S. & A. Tromba (1996). *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag New York, Inc.

Foletta, G. M. & Leep, D. B. (2003). Isoperimetric Quadrilaterals: Mathematical Reasoning with Technology, Mathematics Teacher 93 (February), pp. 144-147.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA., The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Siegel, A. Historical Review of the Isoperimetric Theorem in 2-D, and its place in Elementary Plane Geometry. preprint. http://www.cs.nyu.edu/faculty/siegel/SCIAM.pdf

Skemp R. R. (김판수・박성택 역) (1996). 초등수학교육, 서울: 교우사.

Tapia, R. A. (2009). The Remarkable Life of the

Isoperimetric Problem: The World's Most Influential Mathematics Problem. http://www.princeton.edu/~wmassey/CAARMS15/PDF/Tapia.pdf

Treibergs, A. (2008). Steiner Symmetrization and Applications, http://www.math.utah.edu/~treiberg/Steiner/SteinerSlides.pdf

A Study on the Abstraction of Learning Materials from the Isoperimetric Problem to Develop a Spatial Sense

Choi, Keunbae (Jeju National University)
Chae, Jeong-Lim (University of North Carolina at Charlotte)

The main goals of learning geometry include developing spatial ability and concepts on geometric objects based on understanding the attributes and relationships of them. While the instructions on geometric objects follow the concept development models, the ones on spatial ability are designed from the perspective of geometric transformation. However, there is a need for instructional materials to emphasizing the relationships among geometric concepts. This study hypothesizes that spatial ability stems from the intuitive understanding of geometric objects and the relational understanding on concepts, and it considers the isoperimetric problems as instructional materials to foster spatial ability

* Key Words : isoperimetric problem(등주문제), spatial sense(공간감각)

논문접수 : 2014. 8. 25
논문수정 : 2014. 9. 18
심사완료 : 2014. 9. 18