대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 3, 467 ~ 480. Aug 2014

분수 개념 지도 내용과 방법 분석[1)]

강 완*

초등 수학에서 지도하는 수학적 개념 중에는 구체적 조작 활동에만 의존할 것이 아니라 형식화된 사고 활동을 함께 요구할 필요가 있는 경우도 있는데 그 대표적인 것이 분수 개념이다. 가분수 개념을 도입하기 위해서는 그 이전에 두 자연수 관계로서의 분수 개념을 지도하여야 한다. 이 활동은 자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수의 지도와 관련해서도 생략해서는 안 되는 중요한 활동이다. 대분수는 간단한 분수의 합과 차를 구하는 활동이 이루어진 후, 자연수와 분수의 합이라는 형식화된 추상적 개념으로 지도하여야 한다. 몫으로서의 분수 개념은 구체적 조작 활동에서 직접 도출될 수 없는 이차적 사고 또는 형식적 사고를 요구한다. 초등학생들의 논리적 사고 수준을 고려한다면 자연수 나눗셈의 곱셈 변환을 지도한 뒤에 곱셈의 결과로서 몫 분수를 표현하는 방법을 지도하는 것이 바람직하다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

초등학교 수학 교과의 내용은 수와 연산, 도형, 측도, 규칙성, 확률과 통계 등 5개 영역으로 구성되어 있다. 이중 가장 큰 비중을 차지하는 것은 역시 수와 연산 영역이다. 수와 연산 영역은 내용이 방대해서 자연수와 유리수 부분으로 구분하여 논의하는 것도 편리한 방법의 하나이다. 초등학교 수학에 있어서 유리수 개념은 분수와 소수로 나누어 지도하게 되는데, 이중 먼저 도입되는 것이 분수이다.

분수 개념은 역사적으로도 소수 개념보다 훨씬 먼저 발달하기 시작하였고, 다양한 시대적, 문화적 배경을 바탕으로 발달하였기 때문에 분수가 지니는 의미는 매우 복잡하게 분류된다. 분수는 기본적으로 진분수의 개념으로부터 시작한다. 가분수가 한자로 假分數, 영어로 improper fraction이라고 불리는 것만으로 보아도, 초기의 분수 개념은 진분수 위주로 발달하였던 것으로 충분히 추정할 수 있다.

역사적으로, 문화적으로 가분수의 개념이 어떻게 형성되어왔는지 알아보는 것과 마찬가지로 중요한 것은 초등학교 수학 교과서에서 가분수 개념이 어떠한 전개 과정을 거쳐서 도입되고 있는지, 바른 도입 방법은 어떠한 것인지를 알아보는 일이다. 또한 가분수의 도입 전개 과정과 함께 대분수의 도입 전개 과정에 대한 분석과 올바른 방향 제시가 함께 필요함은 물론이다.

초등학교 수학 교과서에 다루는 분수 개념 지도와 관련해서는 이외에도 여러 가지 점이 보다 심도 있게 분석되어야 한다. 그 중의 하나는 자

* 서울교육대학교, wlamg@snue.ac.kr
1) 이 연구는 서울교육대학교 2014학년도 교과교육연구 교내연구비에 의한 것임.

연수 나눗셈 몫으로서의 분수 개념의 도입 시기와 방법에 관한 것이다. 본 논문에서는 이러한 여러 가지 분수 개념들을 소개하는 초등학교 수학 교과서의 내용 전개 과정에서 나타나는 문제점들을 분수 개념 도입 전개의 논리적 타당성이라는 관점에서 분석해보고 보다 합리적인 대안을 제시하고자 한다.

2. 연구 방법

본 연구는 문헌 연구 방법을 통하여 이루어졌다. 주된 문헌은 1955년 이후 발행된 모든 초등학교 수학 교과서이며, 분수 개념의 지도에 관한 주요 논문들을 참조하였다.

1955년 이후 발행된 초등학교 수학 교과서는 다음과 같이 분류된다.

① 1차 교육과정: 문교부(1955) 산수, 대한문교서적주식회사 발행
② 2차 교육과정: 문교부(1966) 산수, 국정교과서주식회사 발행
③ 3차 교육과정: 문교부(1972) 산수, 국정교과서주식회사 발행
④ 4차 교육과정: 문교부(1982) 산수, 국정교과서주식회사 발행
⑤ 5차 교육과정: 교육부(1989) 산수, 국정교과서주식회사 발행
⑥ 6차 교육과정: 교육부(1995) 수학, 국정교과서주식회사 발행
⑦ 7차 교육과정: 교육인적자원부(2000) 수학, (주)천재교육 발행
⑧ 2007 개정 교육과정: 교육과학기술부(2009) 수학, 두산동아(주) 발행

2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서는 이 논문을 작성할 당시에 3~4학년군 1학기분까지만 발행되었으므로, 분수 지도의 전반적인 모습을 볼 수 없어서 본 연구 대상에서 제외하였다. 본 연구는 분수 지도 방법에 대하여 교과서에 나타난 현상에 대하여만 논의를 한정하였으므로, 기타 학술 논문의 내용은 이들 분수 지도 방법의 합리적 타당성에 대한 배경 지식으로만 활용하였다.

본 연구에서는 일본, 미국 등 외국의 초등학교 수학 교과서를 인용하지 않았다. 그 이유는 별도의 연구를 통하여 논문으로 작성하여야 할 정도로 간단한 것은 아니지만, 결론적으로 말해서 우리나라에서 현재 사용되고 있는 교과서에 나타난 분수 지도 방법의 교수학적 정교함의 수준이 이들 외국 교과서에 비하여 매우 분석적이고 학생 중심으로 이루어져 있어서, 보다 더 분석적인 논의를 제시하기 위한 근거로 사용될 만한 외국의 사례를 찾기 어려웠기 때문이다.

II. 본 론

1. 분수 학습의 지도 구조

초등학교에서 이루어지는 분수의 학습은 <분수의 개념>과 <분수의 계산>이라는 두 부분으로 나누어 볼 수 있으며, 분수의 개념은 크게 보아

(1) 전체-부분 관계로서의 분수,
(2) 두 자연수 관계로서의 분수,
(3) 나눗셈 몫으로서의 분수

라는 세 단계를 거쳐 학습이 이루어진다. 분수의 계산은

(4) 동분모분수의 덧셈과 뺄셈,
(5) 약분과 통분,
(6) 이분모분수의 덧셈과 뺄셈,
(7) 분수의 곱셈과 나눗셈

이라는 단계로 지도하게 된다고 구분할 수 있다.

이들 일곱 단계는 다시 각각 보다 세부적인 활동들로 구성되는데, 이들 세부 활동은 지도 관점과 논리에 따라 그 순서를 일정하게 정하기가 어렵다. 실제로 과거 교과서에 나타난 세부 수업 활동을 분석해 보면 그 순서가 서로 다른 경우가 많음을 알 수 있다. 특히 단계 (4) 동분모분수의 덧셈과 뺄셈의 경우에는 분수 개념의 형성과도 관련이 있어서, 단계 (3) 나눗셈 몫으로서의 분수를 지도하기 이전에 그 일부 내용을 지도하는 경우도 많다.

가. 분수 개념 학습을 위한 세부 활동

분수 개념의 학습을 위한 세부 활동은 다음과 같이 분류할 수 있다.

① 똑같이 나누기 (예: 똑같이 넷으로 나누기)
② 전체와 부분 (예: 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중 2)
③ 분수 표기 (예: $\frac{3}{4}$ 쓰고 읽기)
④ 단위분수의 몇 배 (예: $\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{4}$이 3)
⑤ 동분모 진분수의 크기 비교 (예: $\frac{4}{5}$와 $\frac{2}{5}$)
⑥ 단위분수의 크기 비교 (예: $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$)

⑦ 두 자연수 관계로서의 분수 (예: 5는 7의 $\frac{5}{7}$)
⑧ 수직선 위의 분수
⑨ 자연수의 분수 배 (예: 6의 $\frac{1}{3}$은 2)
⑩ 자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수 (예: 4는 12의 $\frac{1}{3}$)
⑪ 동치분수 (예: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$)
⑫ 1과 크기가 같은 분수 (예: $\frac{7}{7}$은 1)

⑬ 분수의 종류 (진분수, 가분수)
⑭ 동분모 진분수의 합과 차 (예: $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$)
⑮ 분수의 종류 (대분수)
⑯ 가분수, 대분수의 호환 표기
⑰ 동분모분수의 크기 비교 (가분수, 대분수)
⑱ 동분모분수의 합과 차 (가분수, 대분수)

⑲ 나눗셈 몫으로서의 분수 ($3\div4=\frac{3}{4}$)

이중 활동 ①~⑥은 전체-부분 관계로서의 분수를 지도하는 과정과 관련이 깊고, 활동 ⑦~⑫는 두 자연수 관계로서의 분수를 지도하는 과정과 관련이 있으며, 활동 ⑬~⑱은 분수의 종류를 지도하는 과정과 관련이 깊다.

나. 분수 개념 학습 활동의 선택과 배치

거의 20 가지에 가까운 이들 활동 중 어떤 것을 선택하여 어떤 순서로 지도하여야 할 것인가 하는 문제는 해결하기가 상당히 복잡하다. 예를 들어 2007 개정 교육과정에 따라 2010년에 발행한 수학 교과서에서는

①, ②, ③ (2학년 2학기 5단원)
⑨, ⑩, ④, ⑤, ⑥ (3학년 1학기 7단원)
⑬(⑮), ⑯, ⑰ (4학년 1학기 6단원)
⑱ (4학년 2학기 1단원)
⑪ (5학년 1학기 2단원)
⑲ (5학년 2학기 2단원)

의 순서로 선택하여 제시하였다. 이중 활동 ⑲ (나눗셈 몫으로서의 분수)는 분수 개념의 맥락이라기보다는 분수 계산의 맥락에서 자연수의 나눗셈을 곱셈으로 고치는 방법의 하나로서 지도하고 있어서, 나눗셈 몫으로서의 분수 개념을 명

시적으로 지도하고 있다고 보기는 어렵다.

한편 7차 교육과정에 따라 2001년에 발행한 수학 교과서에서는

①, ②, ③ (3-가 7단원)

⑨, ④, ⑤, ⑥ (3-나 6단원)

⑩, ⑬(⑮), ⑯, ⑰, ⑭ (4-가 7단원)

⑲, ⑫, ⑰, ⑱ (4-나 1단원)

의 순서로 선택하여 제시하였는데, 활동 ⑰(동분모분수의 크기 비교)가 중복 지도되었음을 알 수 있다.

또 다른 예로, 5차 교육과정에 따라 1989년에 발행한 수학 교과서에서는

①, ②, ③ (2학년 1학기 7단원)

⑨, ④, ⑤, ⑥, ⑧, ⑭ (3학년 1학기 7단원)

⑩, ⑨, ④, ⑫, ⑬(⑮), ⑯, ⑰, ⑪ (4학년 1학기 7단원)

⑱ (4학년 2학기 5단원)

의 순서로 선택, 제시하였다. 이중 활동 ⑨(자연수의 분수 배)와 ④(단위분수의 몇 배)는 중복 지도된 것처럼 보이지만, 3학년 1학기에서 다룬 활동 ⑨는 자연수의 분수 배 중 단위분수만 지도하였고, 4학년 1학기에서 다룬 활동 ④는 간단한 복습의 성격이 짙다. 또한 활동 ⑲(나눗셈 몫으로서의 분수)는 5학년 2학기 6단원(비와 비율)에서 암묵적으로 지도되고 있는데, 이것 역시 분수 개념 학습의 맥락이라기보다는 비와 비율 개념 학습의 맥락에서 이루어지고 있어서, 나눗셈 몫으로서의 분수 개념을 명시적으로 지도하고 있다고 보기는 어렵다.

2. 가분수와 대분수의 도입

가. 가분수의 도입

초등학교 수학 교과서에 나타난 분수의 초기 개념과 관련된 학습 활동들을 검토하다 보면 여러 가지 많은 점을 논의하고 분석, 연구하여야 할 필요를 느끼게 되지만, 그 중에서도 가장 먼저 분석, 논의되어야 할 점은 가분수와 대분수의 도입 방법에 관한 것이다.

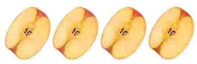
우선 한 마디로 말해서 기존의 초등학교 수학 교과서에서는 가분수나 대분수가 “충분한” 사전 활동 없이 등장한다. 어느 정도가 “충분한” 사전 활동인지에 대해서는 각자의 생각에 따라 서로 다른 판정 기준이 있을 수 있겠지만, 이 사전 활동에는 적어도 그 전까지 학생들에게 형성된 진분수 개념과 연결되는 활동이 포함되어야 할 것이다.

예를 들어 2007 개정 교육과정에 따라 2012년에 발행한 수학 교과서 4학년 1학기 6단원 96쪽에서는 다음과 같이 가분수를 정의하고 있다.

$\frac{1}{4}$짜리 4개를 $\frac{4}{4}$, $\frac{1}{4}$짜리 5개를 $\frac{5}{4}$로 나타내고, $\frac{4}{4}$나 $\frac{5}{4}$와 같이 분자가 분모와 같거나 분모보다 큰 분수를 가분수라고 합니다.

이러한 가분수를 소개하기 위한 도입 활동은 같은 쪽에 다음과 같이 제시되어 있다.

<활동 1> 사과 $\frac{1}{4}$조각이 여러 개 있습니다. 이 사과를 분수로 나타내는 방법을 알아봅시다.

● $\frac{1}{4}$조각 4개를 분수로 어떻게 나타내고 싶습니까? 

● $\frac{1}{4}$조각 5개를 분수로 어떻게 나타내고 싶습니까? 

가분수 도입을 위한 이러한 사전 학습 활동은 적절한 것인가? 분수를 도입할 때에는 연속량의 등분할 조작을 통하여 지도한다는 점에 대해서

많은 사람들이 대체로 동의한다. 그러나 여기에 함정이 있다. 연속량의 등분할을 이용한 분수 개념의 도입은 부분-전체 관계에 의한 분수 개념으로서, 실질적으로는 진분수에 한정된다. 가분수는 부분이 전체보다 커진다는 모순된 상황을 요구한다.

따라서 손쉽게 생각하는 것이 연속량의 등분할 다음에 이산량의 등분할을 이용하면 가분수로 진행할 수 있다고 생각하기도 하는데, 이산량의 등분할이라고 해서 부분-전체 프레임에서 벗어날 수 없다. 예를 들어

4개는 12개의 $\frac{1}{3}$

이라는 개념을 지도하는 것이 이산량의 등분할로서의 분수 지도에 포함되는 내용이라고 많은 사람들이 생각하고 있다. 그러나 이것도 주의하여야 할 것이 연속량의 등분할 개념을 학습한 학생은

전체를 12로 나눈 것 중 4

는 $\frac{4}{12}$로 받아들이지 $\frac{1}{3}$로 받아들이는 것이 아니라는 점이다. 정확히 말하자면 12개를 "4개씩 묶었을 때"라야 4는 12의 $\frac{1}{3}$이 될 수 있다. 그런데 많은 사람들이 이 "4개씩 묶었을 때" 즉 한 단위의 크기를 지정하는 일에 소홀하다.

한 단위의 크기를 지정해 주더라도 문제는 남는다. 이런 식의 이산량의 등분할은 부분-전체 프레임에 갇혀 있기 때문에 진분수 개념을 벗어날 수 없다. 도대체 가분수는 언제 어떻게 등장하여야 하나?

결론부터 말하자면 가분수나 대분수는 이차적 사고 또는 형식적 사고를 요하는 개념이라는 점이다. 즉, 구체물 조작에 의한 개념 형성을 시도해서는 효과적인 학습이 이루어지기 어렵고 형식적 사고를 시도하여야 한다는 점이다. 그렇다면 가분수 개념과 관련된 형식적 사고를 어떻게 유도하여야 하는가?

앞서 언급한 바와 같이 분수 개념 학습의 시작은 연속량의 등분할로부터 이루어진다. 연속량의 등분할로부터 이산량의 등분할로 진행하는 과정을 통하여 학생들의 사고는 다음과 같은 형식을 취하게 된다.

(1) 전체를 4개로 나눈 것 중의 3개는 $\frac{3}{4}$

(2) 3개는 4개의 $\frac{3}{4}$

이 점을 이용하면

3은 4의 $\frac{3}{4}$

이라는 사고 형식이 형성될 수 있고, 이것을 발전시키면

5는 4의 $\frac{5}{4}$

라는 가분수가 출현하게 된다. 가분수 개념의 역사 발생적 진화 과정으로 보아서도 이러한 진행은 자연스러운 결과이다.

나. 대분수의 도입

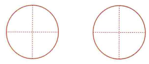
그렇다면 대분수 개념의 학습은 어떠한 활동을 통하여 언제 도입하여야 하는가? 2007 개정 교육과정에 따라 2010년에 발행한 수학 교과서 4학년 1학기 6단원 분수 97쪽에서는 대분수를 다음과 같이 정의하고 있다.

> 1과 $\frac{3}{4}$은 $1\frac{3}{4}$이라 쓰고 일과 사분의 삼이라고 읽습니다. $1\frac{3}{4}$과 같이 자연수와 진분수로 이루어진 분수를 대분수라고 합니다.

이러한 대분수를 소개하기 위한 도입 활동은 같은 쪽에 다음과 같이 제시되어 있다.

<활동 2> 진주네 학급에서 생일잔치를 마치고 나니 사과가 한 개와 $\frac{3}{4}$조각 남았습니다. 남은 사과를 분수로 나타내는 방법을 알아봅시다.

● 사과 한 개와 $\frac{3}{4}$조각만큼 색칠하시오.



● 사과 한 개와 $\frac{3}{4}$조각을 어떻게 나타내면 좋다고 생각합니까?

● 왜 그렇게 생각합니까?

대분수 개념에 대한 이러한 도입 활동과 정의는 적절한 것인가? 얼핏 보아 큰 문제가 없어 보이지만, 대분수의 정의를 위하여 사용한 "1과 $\frac{3}{4}$"이라는 문구는 논리적으로 애매한 표현이다. 물론 당연히 이것은 "1과 $\frac{3}{4}$의 합"이라는 말을 줄인 것으로 해석하여야 하는 것이 옳다. 그런데 이렇게 줄임 표현을 사용할 때 국어학적으로 "과(또는 와)"라는 조사를 어떻게 해석하여야 할 것인가 하는 문제와 수학교육학적으로 "자연수와 진분수의 합"이라는 의미를 이렇게 암시적으로 표현하여도 좋을 것인가 하는 문제가 제기된다.

우선 "과(또는 와)"라는 조사(助詞)는 국립국어원 표준국어대사전에 따르면 다음과 같은 뜻이다.

[1]「1」다른 것과 비교하거나 기준으로 삼는 대상임을 나타내는 격 조사.
「2」일 따위를 함께 함을 나타내는 격 조사.
「3」상대로 하는 대상임을 나타내는 격 조사.
[2]둘 이상의 사물을 같은 자격으로 이어 주는 접속 조사. 생략이 가능하며, 생략된 자리에는 쉼표를 찍는다.

"1과 $\frac{3}{4}$"에서의 조사 "과(또는 와)"는 이중 "[1]「2」일 따위를 함께 함을 나타내는 격 조사"로 해석하여야 한다. 따라서 "1과 $\frac{3}{4}$"이라는 문구만으로는 뜻이 완전하지 않으며, 1과 $\frac{3}{4}$이 함께 해야 할 어떤 "일"을 같이 써주어야만 한다. 이때의 "일"이란 바로 "합(合)" 또는 "더하기"인 것이다.

다음으로는 수학교육학적으로 보아 "합(合)" 또는 "더하기"라는 표현을 명시적으로 제시하지 않아도 좋은가 하는 점을 살펴보자. "자연수와 분수의 합"이라는 점을 명시적으로 지도하지 않으면, 가분수와 대분수를 지도하고 난 다음에 당장 뒤따라 나오는 활동 ⑯(가분수, 대분수의 호환 표기)가 문제가 된다.

2007 개정 교육과정에 따라 2010년에 발행한 수학 교과서 4학년 1학기 98~99쪽에서는 대분수를 가분수로 고치고, 가분수를 대분수로 고치는 방법에 대하여 그림 그리기, 칸 수 세어보기 등의 구체적 조작 활동을 제시할 뿐 당연히 분수의 합이라는 추상적 또는 형식화 개념을 사용하지 않고 있다. 그러나 이미 3학년 2학기 4단원 나눗셈에서

13÷5의 계산 결과는 몫이 2 나머지가 3

이라는 나눗셈의 몫과 나머지에 대한 형식화 내용을 배워 알고 있는 학생들에게

$$\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}=2\frac{3}{5}$$

이라는 분수의 덧셈을 제시하지 않는다면 이것은 지적 퇴행일 뿐이다. 더구나 뒤따라 4학년 2학기에서 학습하게 될 활동 ⑱(동분모분수의 합과 차)에서 가분수, 대분수가 섞인 덧셈이나 뺄셈 계산을 할 때에도 그림 그리기, 칸 수 세어보기 등의 방법을 사용할 수는 없는 것이다.

대분수 $1\frac{1}{4}$을 "1과 $\frac{1}{4}$"이라는 언어에서 직접

가져오는 것은 잘못된 관행이다. 언어적으로 “과” 또는 “와”라는 조사는 덧셈만을 의미하지 않는다. 대분수가 등장하기 위해서는 다음과 같이 진분수의 합이 가분수가 되는 과정이 필요하다.

$$\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

라는 과정을 이해하고, 이것을 통해

$$\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$$

이라는 대분수 형태를 도입하는 것이 수학적으로 정직한 교수 방법이다.

이러한 분석과 논의에 따라 나오는 결론은 활동 ⑮(대분수의 도입)을 활동 ⑭(간단한 분수의 합과 차 구하기) 이후에 배치하여야 한다는 점이다. 실제로 4차, 5차, 6차 교육과정에 따른 수학 교과서에서는 활동 ⑭(동분모 진분수의 합과 차) 이후에 활동 ⑮(대분수)의 개념을 지도하였고, 분수 덧셈의 개념을 명시적으로 사용하였다. 예를 들어, 5차 교육과정에 따라 1990년에 발행한 산수 교과서 4학년 1학기 7단원 85쪽에서는 대분수의 개념을 다음과 같이 도입하고 있다.

$\frac{5}{3}$는 $1+\frac{2}{3}$와 같다. $1+\frac{2}{3}$를 $1\frac{2}{3}$라 쓰고 1과 3분의 2라고 읽는다.

1, 2, 3, …과 같은 수를 자연수라 하고, $1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, 3\frac{4}{5}, \cdots$와 같이 자연수와 진분수의 합으로 나타낸 분수를 대분수라 한다.

3. 자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수 개념의 도입

가분수, 대분수의 도입 문제와 함께 교수학적으로 심도 있게 검토하여야 할 문제는 “자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수(예: 4는 12의 $\frac{1}{3}$)”를 어떠한 방법에 따라 지도하여야 할 것인가 하는 점이다.

2007개정 교육과정에 따라 2010년에 발행한 수학 교과서 3학년 1학기 7단원에서는 활동 ⑨(자연수의 분수 배)(예: 6의 $\frac{1}{3}$은 2)를 지도하고 나서, 바로 다음 차시 98쪽에서 활동 ⑩(자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수)(예: 4는 12의 $\frac{1}{3}$)를 다음과 같이 지도하고 있다.

<활동 1> 4는 20의 얼마인지 알아봅시다.

- 단추 20개를 4개씩 묶어 보시오.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

- 한 묶음은 몇 개입니까?
- 4는 20을 똑같이 $\boxed{5}$묶음으로 나눈 것 중의 □묶음입니다.
- 4는 20의 $\frac{\square}{\square}$입니다.

이와 같은 지도 방법과 순서는 지금까지의 어느 수학 교과서에서도 별 이의 없이 받아들여지고 있다. 그러나 신중하게 분석하여 보면 다음과 같은 문제점을 지니고 있다. 즉, “4는 20의 얼마?”의 답을

$$\frac{1}{5}\text{로 볼 것인가, }\frac{4}{20}\text{로 볼 것인가}$$

하는 문제이다. 아직 약분을 배우지 않은 학생들에게 있어서, 또는 적어도 활동 ⑪(동치분수)의 개념을 배우기 이전의 학생들에게 있어서 $\frac{1}{5}$과 $\frac{4}{20}$는 별개의 분수이다.

더 큰 문제는 지금까지의 어느 수학 교과서에서도 “4는 20의 $\frac{4}{20}$”라는 내용을 다루는 활동, 즉 ⑦(두 자연수 관계로서의 분수)(예: 5는 7의 $\frac{5}{7}$)를 명시적으로 제시하지 않고 있다는 점이다. 아마도 이것은 연속량의 등분할로서 분수(전체-

부분 관계로서의 분수)를 다룰 때, 예를 들어 "전체를 똑같이 7로 나눈 것 중의 5는 $\frac{5}{7}$"라는 개념을 연장하여 이해할 수 있는 것으로 간주하고, 연속량이 아닌 자연수의 경우에는 따로 명시적으로 지도하지 않은 것으로 해석된다.

그러나 활동 ⑦(두 자연수 관계로서의 분수)의 학습을 생략하는 것은 잘못이다. 5는 7의 $\frac{5}{7}$이라는 개념을 "전체-부분 관계로서의 분수"로 이해하려면 7을 전체로 보고 5를 부분으로 보는 활동이 필요하다. 그러나 이 시기의 학생들은 자연수 7을 전체로 보는 활동에 익숙하지 않다. 따라서 주어진 두 자연수 중 하나를 전체로 보고 다른 하나를 부분으로 보는 활동이 주어져야만 한다.

이러한 활동을 생략할 때 일어나는 문제점은 우선 활동 ⑩(자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수)(예: 4는 12의 $\frac{1}{3}$)에서 나타난다. 과거 모든 교과서에서는 활동 ⑩(자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수)를 다룰 때 묶음의 단위를 2 이상인 수에 국한하였다. 따라서 묶음의 단위를 1로 볼 수도 있다는 생각을 자연스럽게 막고 있는 것이다. 묶음의 단위를 1로 본다는 것은 4는 12의 $\frac{4}{12}$로 볼 수 있게 된다는 것을 의미한다.

이러한 제한적 맥락이 이어지면 활동 ⑪(동치분수)의 지도에서도 문제점이 나타난다. $\frac{1}{5}$과 $\frac{4}{20}$는 같은 분수라는 사실을 설명할 때에 각 분수의 출현 맥락이 서로 달라 이들을 왜 비교하고, 왜 같은 것으로 인식해야 하는지에 대한 동기부여가 불분명해진다. 기껏 할 수 있는 일은 활동 ⑩(자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수)의 맥락이 아닌 활동 ②(전체-부분)의 맥락으로 후퇴하여 두 분수를 소개하는 것이다. 그렇게 후퇴할 일이면 활동 ⑩(자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수)는 왜 그렇게 열심히 지도했다는 말인가?

활동 ⑩(자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수)에는 또 다른 단점도 있는데 그것은 이 활동으로는 가분수로의 개념 확장이 불가능하다는 점이다. "12를 4개씩 묶은 것 중의 2묶음은 $\frac{2}{3}$"라는 조작은 결국은 "전체-부분"이라는 프레임에 갇히는 결과가 되어 1보다 작은 분수만 조작 가능하게 된다. 이러한 문제점에 대한 대안은 활동 ⑦(두 자연수 관계로서의 분수) (예: 5는 7의 $\frac{5}{7}$)의 도입이다. 활동 ⑦(두 자연수 관계로서의 분수)는 "8은 12의 $\frac{8}{12}$"라는 조작의 간편성뿐만 아니라 "12는 8의 $\frac{12}{8}$"이라는 가분수로의 개념 확장 가능성까지 지니고 있다.

4. 나눗셈의 몫으로서의 분수 지도

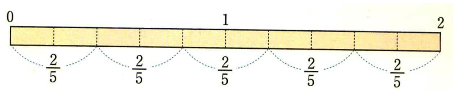
나눗셈의 몫으로서의 분수 개념을 지도하는 것은 의외로 복잡한 논의를 거쳐야 결정할 수 있는 내용이다. 실제로 나눗셈의 몫으로서의 분수 개념에 대한 지도가 어떻게 이루어져 왔는지 과거의 초등학교 수학 교과서를 분석해보면 이 내용의 지도 방법을 찾기 위해 상당히 치밀한 분석과 논의가 필요함을 알 수 있다.

가. 몫 분수 지도의 부실함

6차 교육과정에 따라 1997년에 발행한 수학 5-2에서는 7단원 비와 비율 91쪽에서 다음과 같이 나눗셈의 몫으로서의 분수가 출현한다.

> 또, 여학생 수는 남학생 수의 몇 배가 되는지 알아보면,
>
> $$3 \div 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

그러나 이 차시는 나눗셈의 몫으로서 분수를 학습하기 위한 차시가 아니라 비의 개념을 도입하기 위한 차시이다. 따라서 나눗셈 몫으로서의 분수 개념은 그 이전에 학습되어 있어야 한다. 같은 교과서의 앞으로 거슬러 올라가보면 2단원 분수의 나눗셈 22쪽에 나눗셈 몫 분수가 다음과 같이 도입된다.

> ◈ 2÷5의 몫을 어떻게 구하는지 알아보자.
>
> 
>
>
> 그림에서 알아보면, 2÷5는 2를 5등분 한 것 중의 하나이다. 이것은 2의 $\frac{1}{5}$이므로, $2\times\frac{1}{5}$과 같다.
>
> $$2 \div 5 = 2 \times \frac{1}{5}$$

그런데 이 활동은 제목이 “2÷5의 몫을 알아보자.”고 되어 있을 뿐, 내용과 결론은 몫을 알아보는 것이 아니라 나눗셈을 분수의 곱셈으로 바꾸는 방법에 대한 것이다. 그 다음인 23쪽에 이르기까지

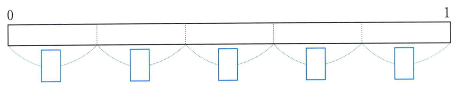
$$2\div5=\frac{2}{5}$$

라는 몫 분수에 대한 명확한 표현이 나타나지 않고, 다만

$$\div 5\text{를 } \times\frac{1}{5}\text{로}$$

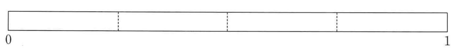
바꿀 수 있다는 나눗셈의 곱셈 변환 내용만 강조되고 있다. 말하자면 나눗셈 몫 분수 개념이 변질된 것이다.

7차 교육과정에 따른 수학 교과서에서는 나눗셈 몫 분수 개념이 아예 실종된 것처럼 보인다. 7차 교육과정에 따라 2002년에 발행한 수학 교과서 5-나 2단원 분수의 나눗셈 24쪽에서는 나눗셈을 곱셈으로 고치는 방법을 지도하는 과정부터 시작하고 있다.

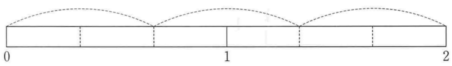
> <활동 1> 1÷5를 어떻게 곱셈으로 나타낼 수 있는지 알아보시오.
>
> ● 1÷5는 분수로 얼마입니까?
>
> 
>
>
> ● 1의 $\frac{1}{5}$배는 얼마입니까?
>
> ● 1÷5를 곱셈으로 나타내어 보시오.
>
> $$1 \div 5 = 1 \times \frac{\square}{\square}$$

이 활동의 첫째 발문은 “1÷5는 분수로 얼마입니까?”라고 되어 있어서, 나눗셈 몫으로서의 분수에 대해서는 학생들이 마치 이전에 학습해서 이미 알고 있는 것으로 간주하고 있다. 그러나 이전의 어느 단원에서도 이에 대하여 지도하는 내용은 없다.

2007개정 교육과정에 따른 수학 교과서에서도 이러한 상황은 마찬가지이다. 2011년에 발행된 수학 5-2 2단원 분수의 나눗셈 17쪽에서는 1÷4를 다음과 같이 지도하고 있다.

> <활동 1> 1÷4를 곱셈으로 나타내는 방법을 알아봅시다.
>
> ● 1÷4를 곱셈으로 어떻게 나타내면 좋을지 생각해 보시오.
>
> ● 1÷4의 몫만큼을 색칠하고 분수로 나타내어 보시오.
>
> 
>
>
> $$1\div4=\frac{\square}{\square}$$

이어지는 18쪽에서는 2÷3을 다음과 같이 지도하고 있다.

> ● 그림을 이용하여 그릇 한 개에 담긴 물의 양을 알아보시오.
>
> 
>
>
> ● 위의 수 막대를 보고 2÷3의 몫을 분수로 나타내어 보시오.
>
> $$2\div3=\frac{\square}{\square}$$

모두가 나눗셈 몫 분수 개념을 지도하는 것으로 보이지만, 활동 제목은 물론 차시 제목 “나눗셈을 곱셈으로 나타낼 수 있어요.”에서도 알 수 있듯이 본래 의도는 나눗셈 몫 분수 개념의 지도가 아니라 나눗셈을 곱셈으로 고치는 방법에 대한 지도이다. 이것은 6차 교육과정에 따른 교과서에서와 같이 개념의 변질에 해당한다.

나. 몫 분수 지도의 어려움

나눗셈 몫 분수 개념의 지도가 모두 이렇게 소홀하게 취급된 이유는 무엇인가? 두 가지 원인을 들 수 있는데, 첫째는 나눗셈 몫으로서의 분수를 취급하기 위한 적절한 논리적 시퀀스(sequence)를 찾기 어렵다는 점이고, 둘째는 나눗셈 몫으로서의 분수 개념을 도입하기 위한 구체적 조작 활동이 생각보다 쉽게 구성되기 어렵다는 점이다.

우선 왜 몫 분수 개념 지도의 논리적 시퀀스를 찾는 것이 어려운지 살펴보자. 초등학교 수학에서 몫 분수 개념의 직접적 사용은 비와 비율 단원에서야 이루어진다. 분수의 나눗셈 단원에서는 나눗셈을 곱셈으로 바꾸는 방법을 지도하는 과정에서 다루기는 하는데 논리적으로 분석해 보면, 몫 분수 개념이 분수의 곱셈 변환 방법의 근거가 되지 않는다.

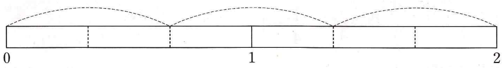
보다 자세히 분석해보자. 2007 개정 교육과정에 따라 2011년에 발행한 수학 5-2 2단원 분수의 나눗셈 18쪽에서는 몫 분수 개념과 분수 곱셈으로의 변환 방법을 다음과 같이 연관 지어 제시하고 있다.

> ● 위의 수 막대를 보고 2÷3의 몫을 분수로 나타내어 보시오.
>
> $$2\div3=\frac{\square}{\square}$$
>
> ● $\frac{2}{3}$는 2의 몇 배인지 곱셈으로 나타내어 보시오.
>
> $$\frac{2}{3}=2\times\frac{\square}{\square}$$
>
> ● 2÷3을 곱셈으로 나타내어 보시오.
>
> $$2\div3=2\times\frac{\square}{\square}$$

위의 세 발문은 ① 몫 분수, ② 분수 배, ③ 곱셈 변환으로 요약할 수 있는데, 발문 ①($2\div3=\frac{2}{3}$)가 발문 ②($\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3}$)의 논리적 근거가 되지 않으며, 발문②와 발문 ③은 본질적으로 같은 것이다. 발문 ①은 몫으로서의 분수라는 것뿐인데, 그것이 어떻게 $\times\frac{1}{3}$이라는 사고를 유도하는지 분명하지 않다. 이 글의 뒷부분에서 결론을 내리겠지만, 사실은 <몫 분수>가 <곱셈 변환>을 유도하는 것이 아니라, <곱셈 변환>이 <몫 분수>를 유도하여야 한다.

두 번째로 나눗셈 몫으로서의 분수 개념 도입을 위한 구체적 조작 활동 구성이 왜 어려운지 살펴보자. 지금까지 이 내용과 관련하여 줄곧 사용되어 온 구체적 조작 활동을 위한 도식은 다

음과 같은 것이다.



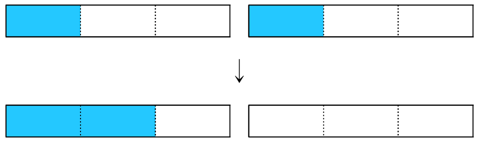
이 도식은 2007 개정 교육과정에 따라 2011년에 발행한 수학 5-2 18쪽에서 2÷3=$\frac{2}{3}$를 유도하기 위해 제시된 것인데, 배경은 “물 2리터를 모양과 크기가 같은 그릇 3개에 똑같이 나누어 담는다.”는 상황이 전제되어 있고, 이때 그릇 한 개에 담긴 물의 양을 추정해 보라는 뜻으로 제시한 도식이다. 문제는 이러한 도식이 2÷3=$\frac{2}{3}$라는 사고를 유도해 내는 데 과연 도움이 되는 것인가 하는 점이다.

그림에서는 물론 2를 3등분한 것으로 나타났지만, 이것은 학생 스스로 만들어내기 어려워서 교과서 저자의 입장에서 미리 “활꼴 점선”을 제시해 준 것이다. 따라서 이 부분은 결국 학생이 수동적으로 받아들여야 하는 내용으로서 바람직한 지도 방법으로 볼 수 없다.

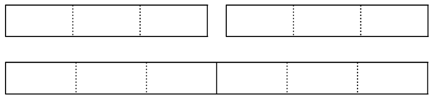
설사 학생이 수동적으로 받아들여야 한다는 주장을 인정한다 하더라도, 학생의 입장에서 보아 이 도식에서 $\frac{2}{3}$라는 분수를 찾아내는 데에는 인식론적 문제가 있다. 학생들은 결국 수 막대의 앞부분 두 칸(다음 그림에서 색칠한 부분)에 주목하여

를 보고 $\frac{2}{3}$를 생각해 낼 수밖에 없는데, 이 색칠한 부분이 2칸이라는 것은 몫으로서의 분수 $\frac{2}{3}$에서 보이는 분자 2와 직접 관련이 없을 뿐만 아니라 그렇게 관련지으면 개념 형성에 혼란이 온다. 수학적으로 생각할 때, 분자 2를 보고 머릿속에 떠올려야 할 부분은 이 색칠한 두 칸이 아니고, 수 막대 전체의 길이 2인 것이다.

이러한 점을 고려한다면 위의 도식은 다음과 같이 2단계로 제시되어야 한다.



동시에 유의하여야 할 점은 수 막대 2개를 이어 붙여서 제시하는 것이 좋을지 따로 떼어서 제시하는 것이 좋을지를 결정하여야 한다는 점이다.


··· (1)

··· (2)

(1)은 부분-전체 모델의 분수 개념, 즉 진분수에 익숙한 학생들에게 유리하게 작용할 수 있고, (2)는 나누어야 할 대상이 2, 즉 2를 전체로 보아야 한다는 사고가 추상적 단계에 이른 학생들에게 적용 가능하다.

수 막대를 이어 붙여야 할지 따로 떼어주어야 할지에 대한 논의는 차치하고라도, 위와 같이 두 단계로 구체적 조작 활동을 제시하여야 한다는 것은 몫 분수 개념 형성에 걸림돌이 된다.

사실 몫 분수 개념 형성의 핵심 아이디어는 간단하다. $a \div b = \frac{a}{b}$에서 나누는 수가 분모로, 나누어지는 수가 분자로 간다는 것이다. 이처럼 간단한 개념의 형성을 위해서 복잡한 구조의 조작 활동을 해야 한다는 것은 무언가 잘못된 것이라고 밖에 할 수 없다.

다. 몫 분수 지도 방법

그렇다면 몫 분수 개념 형성을 위한 바른 지도 방법은 무엇인가? 결론은 위의 논의를 바탕으로 의외로 간단하게 도출될 수 있다.

우선 몫 분수 개념은 구체적 조작 활동에서 직접 도출될 수 없는 이차적 사고 또는 형식적

사고를 요구한다는 점을 인정해야 한다. 다음으로 지도 과정의 논리적 시퀀스가 뒤바뀌어야 한다는 점을 인정해야 한다.

즉 몫 분수 개념은 나눗셈의 곱셈 변환을 위한 선행 지식이 아니라, 오히려 나눗셈의 곱셈 변환 방법이 몫 분수 개념 형성을 위한 선행 지식이라는 점이다. 다시 말하면 나눗셈의 곱셈 변환이라는 지식을 바탕으로 형식적 사고 활동을 통하여 몫 분수 개념을 형성하여야 한다.

따라서 몫 분수 개념 형성을 시도하기 전에 나눗셈의 곱셈 변환 방법

$$\div b \text{는 } \times \frac{1}{b}$$

을 지도하는 것이 좋다. 이 단계에서는 수 막대 도식을 제공하는 것이 도움이 된다. 그러고 나서 다음 단계로 나눗셈의 곱셈 변환을 이용하여 곱셈의 결과로서 몫 분수 개념

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

을 지도하여야 한다. 이 단계에서는 수 막대 도식을 제공하지 않는 것이 개념 형성 과정에서 일어나는 혼란을 방지하는 길이다.

III. 결 론

초등학교 학생들은 Piaget의 인지발달단계 이론에 따르면 대부분 구체적 조작 단계에 해당되므로, 초등학교 수학의 내용은 구체적 조작 활동에 따라야 한다는 데 대해서 이의를 제기하는 사람은 거의 없다. 또한 초등학교에서 지도하여야 할 수학적 개념의 대부분은 생활 속의 경험에서 출발하는 기초적인 내용들이므로 이러한 수학적 개념들을 구체적 조작 활동을 통하여 도입하는 데 큰 문제가 없다. 그러나 일부 주요 내용은 수학적 개념의 논리적 발달 단계에 비추어 보면 추상적이고 형식적인 사고를 요구한다. 분수 개념은 그 대표적인 예이다.

특히 가분수 개념의 도입은 구체적 조작 활동에만 의존해서는 안 되며, 형식적 사고를 요하는 활동과 함께 도입되어야 한다. 예를 들어 $\frac{5}{4}$는 "$\frac{1}{4}$이 5개"라는 구체적 조작 활동에만 의존하지 말고,

$$3\text{은 } 4\text{의 } \frac{3}{4},\ 4\text{는 } 4\text{의 } \frac{4}{4},\ 5\text{는 } 4\text{의 } \frac{5}{4},\ \cdots$$

와 같은 규칙성을 형식화하는 사고 활동에 근거를 두어야 한다. 이를 위해서는 두 자연수 관계로서의 분수(예: 5는 7의 $\frac{5}{7}$)를 나타내는 활동을 가분수의 도입 이전에 지도하여야 한다. 두 자연수 관계로서의 분수를 나타내는 활동은 자연수를 몇씩 묶어 나눈 양으로서의 분수(예: 4는 12의 $\frac{1}{3}$)의 지도와 관련해서도 생략해서는 안 되는 중요한 활동이다.

대분수 개념을 지도할 때에는 가분수 개념과 같은 시점에서 가분수와 같이 동시에 도입하는 현재의 관행은 바람직하지 않다. 대분수는 간단한 분수의 합과 차를 구하는 활동이 이루어진 후, 자연수와 분수의 합이라는 형식화된 추상적 개념으로 지도하여야 한다.

몫으로서의 분수 개념은 도입 시기와 방법을 결정하기가 쉽지 않은 교수학적 과제이다. 몫 분수 개념은 구체적 조작 활동에서 직접 도출될 수 없는 이차적 사고 또는 형식적 사고를 요구함과 동시에 지도 과정의 논리적 시퀀스가 나눗셈의 곱셈 변환 활동과 뒤바뀌어야 한다는 점 때문이다. 초등학교 학생들의 논리적 사고 과정의 전개 순서를 고려해 볼 때 바람직한 도입 시기는 자연수 나눗셈의 곱셈 변환을 지도한 뒤이며, 도입 방법은 곱셈의 결과로서

$$a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

와 같이 추상화된 형식으로 지도하는 것이다.

본 연구에서 도출된 위와 같은 결론은 현재 개발 중인 초등학교 수학과 교과용 도서는 물론 앞으로 개발하게 될 초등학교 수학과 교과용 도서 개발에 밑거름이 되기를 기대한다.

참고문헌

강홍규(2005). 분수 개념 알고리듬 지도 양상 비교: McLellan, MiC, 한국의 교재를 중심으로. **대한수학교육학회지 수학교육학연구 15**(4), 375-399.

교육과학기술부(2009). **수학 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 서울: 두산동아(주).

교육부(1989). **산수 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 서울: 국정교과서주식회사.

교육부(1995). **수학 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 충남: 국정교과서주식회사.

교육인적자원부(2000). **수학 1-가, 1-나, 2-가, 2-나, 3-가, 3-나, 4-가, 4-나, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나**. 서울: (주)천재교육.

국립국어원 표준국어대사전 (http://stdweb2.korean.go.kr/main.jsp 2014년 7월 15일 검색).

권성룡(2003). 초등학생의 분수 이해에 관한 연구. **학교수학 5**(2), 259-273.

문교부(1955). **산수 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 서울: 대한문교서적주식회사.

문교부(1966). **산수 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 서울: 국정교과서주식회사.

문교부(1972). **산수 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 서울: 국정교과서주식회사.

문교부(1982). **산수 2-1, 2-2, 3-1, 3-2, 4-1, 4-2, 5-1, 5-2, 6-1, 6-2**. 서울: 국정교과서주식회사.

문교부(1982). **슬기로운 생활 1-1, 1-2**. 서울: 국정교과서주식회사.

신준식(1996). **실제적 접근 방법에 의한 분수 교수-학습에 대한 연구**. 박사학위논문, 한국교원대학교.

이지영・방정숙(2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해에 대한 실태 조사. **대한수학교육학회지 수학교육학연구 24**(1), 83-102.

정은실(2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구. **학교수학 8**(2), 123-138.

정은실(2009). 싱가포르와 우리나라 교과서의 비교분석을 통한 분수 개념 지도 방안 탐색. **대한수학교육학회지 수학교육학연구 19**(1), 25-43.

Black, M. L. (1986). *Content analysis of five elementary mathematics textbook series*. Unpublished doctoral dissertation. University of Illinois at Urbana Champaign.

West, B. H., Griesbach, E. N., Taylor, J. D., & Taylor, L. T. (1982). *The Prentice-Hall encyclopedia of mathematics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc.

An Analysis on Concepts and Methods of Teaching Fractions

Kang, Wan (Seoul National University of Education)

Concepts related to the fraction should be taught with formative thinking activities as well as concrete operational activities. Teaching improper fraction should follow the concept of fraction as a relation of two natural numbers. This concept is also important not to be skipped before teaching the fraction such as “4 is a third of 12”. Mixed number should be taught as a sum of a natural number and a proper fraction. Fraction as a quotient of a division is a hard concept to be taught since it requires very high abstractive thinking process. Learning the transformation of division into multiplication of fractions should precede that of fraction as a quotient of a division.

* Key Words : Improper Fraction(가분수), Mixed Number(대분수), Fraction as a Quotient(몫으로서의 분수)

논문접수 : 2014. 7. 12
논문수정 : 2014. 8. 13
심사완료 : 2014. 8. 19