대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 3, 375 ~ 385. Aug 2014

모평균과 모비율의 구간추정에서 표본표준편차의 일관된 사용에 대한 고찰1)

박 선 용* · 윤 형 석**

이 연구는 학교수학의 모평균과 모비율의 신뢰구간의 추정을 비교하면서 두 추정 간에 일관성이 확보되고 있는지에 대해 고찰하였다. 이 결과를 토대로, 이 연구에서는 표본평균과 표본비율을 동일한 방식으로 취급하는 것, 모평균과 모비율의 신뢰구간의 예를 구성할 때 모표준편차 대신에 표본표준편차의 관측값을 대입하는 절차를 동일하게 적용하는 것, 표본비율 $\hat{P}$와 그에 대한 관측값 $\hat{p}$을 구별하는 것과 같은 일관성 확보 방안을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

이 연구는, 학교수학에서 모평균과 모비율의 신뢰구간과 관련해 두 내용 사이의 일관성이 결여되어 있다는 문제의식을 바탕으로 하여, 그와 관련된 문제를 수학교육학계에 명확히 제기함으로써 이후 교육적 논의를 진척시키도록 하는 데에 목적이 있다. 2006년 11월 고등학교 수학과 선택과목 교육과정 개정 시안 개발을 위한 전문가 협의회에서 '모비율의 추정에서 n 또는 $n-1$로 나누는 것에 대해서는 의견을 좀 더 수렴하기로(최승현 외, 2006, p.246)' 하였지만 이러한 모비율의 추정과 관련된 사항이 수학교육학계에서 공적으로 의식되어 교육적 논의로 발전되지 못하고 있는 실정이다.

이 연구에서 모평균과 모비율의 신뢰구간 사이의 일관성에 대해 문제시 삼는 사항은 다음과 같다2) : 신뢰도 95%의 모평균 m의 신뢰구간은 $[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$인데, 실제로는 모표준편차 σ가 알려져 있지 않을 때가 많기에, 표본평균 $\overline{X}$와 σ대신에 각각 $\overline{x}$와 표본표준편차의 관측값 s의 값을 대입해서 만든 $[\overline{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}}]$를 신뢰도 95%의 모평균 m의 신뢰구간의 특정한 예로 활용한다. 그런데 확률변수로서의 표본평균 $\overline{X}$와 표본비율 $\hat{P}$이 본질적으로 동일하고, 모평균과 모비율의 구간추정은 각각 표본평균 $\overline{X}$과 표본비율 $\hat{P}$의 표집분포에 근거해 이루어진다. 표본평균 $\overline{X}$와 표본비율 $\hat{P}$이 본질적으로 같은 확률변수라면 모

* 영남대학교, polya@yu.ac.kr
** 경산과학고등학교, hsyunlee@hanmail.net

1) 이 연구는 2014학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임

2) 이 연구에서는, 확률변수로서의 표본평균 $\overline{X}$와 그에 대한 하나의 구체적인 관측값인 $\overline{x}$을 구별하듯이, 확률변수로서의 표본비율 $\hat{P}$와 그에 대한 하나의 구체적인 표본비율의 값 $\hat{p}$을 구별한다. 이에 따라, 이 연구에서는 인용에 있어서도 확률변수로서의 표본비율과 그에 대한 관측값을 각각 $\hat{P}$와 $\hat{p}$로 표시한다.

표준편차 대신 표본표준편차의 값을 대입하는 절차가 두 종류의 구간추정 과정에서 동일하게 적용되는 것이 일관성 측면에서 타당하게 여겨진다.

이러한 관점에서, 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간인 $[\hat{P}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{P}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$또는 $[\hat{P}-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \hat{P}+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$와 관련해 학교수학에서 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간의 구체적인 또는 특정한 예로 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}]$을 활용하는 활동은 모평균의 신뢰구간 추정에서와 마찬가지 방식으로 $\hat{P}$와 σ대신에 각각 $\hat{p}$와 s의 값을 대입해서 이루어지는 것이라 할 수 있을까?

이 문제와 관련해, 모평균과 모비율의 신뢰구간 추정에서 모집단의 분산이 알려지지 않은 상황이 공유될 수 있다는 점에 주목할 필요가 있다. 우선, 모평균 m의 신뢰구간과 관련해선 모집단이 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ 으로 구성되어 있을 때 모평균 m은 $\frac{y_1+y_2+\cdots+y_N}{N}$에 의해 구한 후 그 모평균 m을 이용해 모분산 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-m)^2$을 구한다. 모평균 m을 알아야만 모분산 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-m)^2$을 정확히 구할 수 있다는 점에서 모평균 m의 신뢰구간을 다룰 때 모분산이 알려지지 않은 상황이 자연스러워 보인다. 마찬가지로, 어떤 모집단의 특성과 관련해 모비율 p에 대한 구간추정을 할 때도 그 모분산이 $p(1-p)$이므로 그것이 알려지지 않은 것이 자연스러울 뿐만 아니라 이 상황에서 모분산 대신 표분분산의 관측값을 활용하는 것이, 모평균의 신뢰구간 추정과 연계해 볼 때, 일관성을 유지하는 것이라 할 수 있다.

그렇다면, 학교수학에서는 모비율 p의 신뢰구간을 추정할 때 모집단에 대한 모분산을 어떻게 처리하고 있는 것일까? 모평균의 신뢰구간 추정에서는 모집단에 대한 모분산 σ^2과 표본평균 $\overline{X}$의 분산인 $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$을 모두 다루면서 표본평균 $\overline{X}$의 표집분포의 특징을 이용하여 추정 활동을 전개하는 반면에, 모비율의 신뢰구간 추정에서는 모집단에 대한 모분산 $p(1-p)$을 다루지 않고 표본비율 $\hat{P}$의 분산인 $V(\hat{P})=\frac{p(1-p)}{n}$을 도입하면서 표본비율 $\hat{P}$의 표집분포의 특징을 이용하여 추정 활동을 하는 방식을 취한다. 기본적으로, 모비율의 신뢰구간을 추정할 때 모집단에 대한 모분산을 고려하지 않는 것이다.

구체적으로, 7차 수학과 교육과정 이후의 교과서에서는 모비율의 신뢰구간을 추정할 때 대체적으로 다음과 같은 논리 전개방식을 취한다 : n이 충분히 클 때 표본비율의 관측값인 $\hat{p}$와 관련해 $\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$의 분포뿐만 아니라 $\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$의 분포도 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다[3]. 또는 n이 충분히 클 때, 표본비율의 관측값인 $\hat{p}$이 모비율 p에 거의 근접하므로 $\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$의 분포와 $\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$의

3) 분포의 유사성에 기반한 이와 같은 접근은 계승혁 외(2011), 교육인적자원부(2006), 유희찬 외(2011), 이강섭 외 a(2011), 이강섭 외 b(2011), 이준열 외(2011),정상권 외(2011), 최용준 외(2011), 황선욱 외(2011)에서 볼 수 있다.

분포는 거의 같고 두 분포는 모두 근사적으로 정규분포 $N(0,1)$을 따른다[4]. 그래서

$$P(-1.96 \le \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le 1.96) ≒$$

$$P(-1.96 \le \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \le 1.96) ≒ 0.95$$ 가 성립한다. 그러한 확률분포 사이의 유사성에 기초해 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간인 $[\hat{P}-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, \hat{P}+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$을 $[\hat{P}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{P}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}]$으로 대체할 수 있으므로, 그러한 신뢰구간의 한 예로 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}]$을 활용한다.

학교수학에서 모평균과 모비율의 신뢰구간을 추정하는 활동 사이에 차이가 왜 발생하는 것일까? 그러한 차이가 발생하지 않도록 두 활동 사이의 일관성을 유지하도록 하는 방안은 무엇일까? 앞서 제기했듯, 이 연구에서는 이러한 사항을 다루면서 모평균과 모비율의 신뢰구간과 관련해 두 내용 사이의 일관성이 결여되어 있다는 문제를 수학교육학계에서 공론화하여 교수학적 변환 차원에서 그 문제를 해결하도록 독려하는 데에 목적이 있다. 이에, 관련 논의를 체계적으로 전개하기 위해 신뢰구간의 추정활동에 있어 표본표준편차 적용의 일관성에 대한 문제를 먼저 제기했던 이경화와 신보미(2005)의 연구부터 살펴보기로 하자.

Ⅱ. 표본표준편차의 일관된 적용과 관련된 쟁점에 대한 재논의

이경화와 신보미(2005)는 표본표준편차의 적용의 일관성에 대한 문제를 교수학적 분석을 통해 논의한 바 있다. 제 7차 수학과 교육과정에 기초한 (당시의) '수학 Ⅰ' 및 '확률과 통계' 교과서에서 표본분산을 각각 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$와 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$로 정의하는 불일치와 관련해, 그들은 모평균의 구간추정에서 모분산이 알려져 있지 않을 때 그 모분산(또는 모표준편차) 대신에 표본분산(또는 표본표준편차)을 대입하는 상황을 교육적으로 다루었다고 할 수 있다. 예를 들어, 그들은 가르칠 지식으로서의 표본표준편차와 학문적 지식으로서의 표본표준편차에 대한 분석을 바탕으로 일본, 미국, 영국 교과서의 교수학적 변환 방식에 대해 살펴보고 $n-1$로 나눈 식을 표본표준편차로 정의하는 방식, 모평균의 추정에 표본표준편차를 활용하는 문제, 표본의 크기가 30이상일 때 표본표분편차로 모표준편차를 대신하는 문제에 대하여 논의하였다.

그들의 연구에서는 통계학 개념의 일관된 적용 측면에서 '표본분산'을 '표본'+'분산'으로 간주하여 분산의 정의인 '편차 제곱의 평균'을 '표본'에 적용함으로써 표본분산과 표본표준편차를 각각 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$으로 정의하는 방식이 합리적일 수도 있다는 점을 지적한다. 반면, 불편추정량을 중요시하는 통계학적 관점에서는 모분산 σ^2과 추정량의 기댓값과 관련해, $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$이므로, 모분

4) 분포의 유사성과 큰 수의 법칙을 모두 활용하는 접근은 윤재한 외(2011)과 최봉대 외(2011)에서 볼 수 있다.

산에 대한 불편추정량을 의도적으로 만들기 위해 보정값 $\frac{n}{n-1}$을 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$에 곱하는 과정을 거쳐, 표본분산과 표본표준편차를 각각 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 으로 정의하는 방식을 취하게 된다고 밝힌다. 즉, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 또는 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$으로 표본분산을 정의하는 것은 각각 표본의 분산이라는 점에서 그리고 모분산에 대한 불편추정량이라는 점에서 각기 일관성 있는 정의라 인정하였다고 하겠다.

이 두 가지 일관성과 관련해, 이경화와 신보미는 교수학적 변환의 관점에서 일본, 미국 및 영국 교과서를 분석하였는데, 그 내용은 다음과 같다: 일본의 9종의 수학C 교과서의 경우에는 모집단과 표본에 분산 및 표준편차 개념을 동일하게 적용하는 방식을 취함으로써 표본분산 s^2을 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$으로 정의하고 모평균의 구간추정에서 표본의 크기가 클 때는 모표준편차 대신 표본표준편차를 사용할 수 있다는 사항을 각주나 곁글이 아닌 본문에서 직접 소개하고 있다. 이와 달리, 미국의 Statistics in Action 교과서에서는 표본표준편차 s를 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 로 도입하면서, 표본의 수를 늘리면서 n과 $n-1$로 나눈 두 가지 표본표분편차와 모표준편차를 비교해보는 관찰과 실험을 통해 $n-1$로 나눈 표본표분편차인 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ 이 모표준편차에 더 가깝다는 점을 귀납적으로 경험하게 한다. 영국의 SMP(School Mathematics Project) Statistics Ⅰ 교과서에서는 일본 교과서에서와 마찬가지로 표본분산 s_n^2을 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 으로 정의하지만, 모분산 σ^2이 알려져 있지 않았을 때 모평균의 구간추정을 해야 하는 상황에서는 $s_{n-1}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$이 모분산에 대한 불편추정량이라는 것을 알리고, 앞의 미국 교과서에서와 같이, 예시를 통해 s_n^2, s_{n-1}^2, σ^2의 관계를 살펴보고 모평균의 구간추정에서 전체적으로는 모표준편차의 추정값으로 s_{n-1}을 사용하게 한다.

이러한 분석과 논의를 거친 후, 이경화와 신보미는 학교수학에서 표본분산을 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$이나 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 중 어떤 한 가지로 정해야 한다고 주장하지는 않았다. 사실, 그들은 표본분산을 정의하는 방식보다는 모평균의 구간추정 활동에서 일반적으로 모분산을 모르는 상황에서 그것 대신에 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$의 값을 대입해서 사용하는 이유를, 영국과 미국의 경우와 같이, 적절한 교수학적 변환을 통해 학교수학에서도 설명하자는 주장을 제기하였다. 하지만 2004년 6월에 한국통계학회 주최로 열린 워크샵에서의 주장과 더불어 그들의 연구는 궁극적으로 2007년 개정 수학과 교육과정 이후 표본분산을 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$로 통일해서 정의하는 데에 기여했다고 할 수 있다.

Ⅲ. 모평균과 모비율에 대한 구간추정에서 표본표준편차의 일관된 적용의 문제

2004년 한국통계학회 워크숍, 이경화와 신보미(2005)의 연구, 2007 수학과 선택과목 개정시안 연구와 그에 대한 토론 및 공청회 등을 거치며 2007 개정 및 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서는 표본분산을 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$으로 정의한다. 이러한 표본분산의 도입방식은 2007 수학과 고등학교 교육과정 해설서에서 그 의도와 특징이 잘 드러난다. 그 해설서에서는, 7차 수학과 교육과정 및 교과서에서 표본분산 정의가 불일치했던 것과 달리, '미적분과 통계 기본' 과목 및 '적분과 통계' 과목의 모평균의 구간추정 내용과 관련해 각각 '표본분산은 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$으로 구함에 유의하게 한다.', '표본분산은 모분산에 가깝게 될 가능성이 높도록 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$으로 구함에 유의하게 한다.' 고 밝히고 있다(교육과학기술부, 2008; 정경호, 2005).

그런데 이러한 모평균의 구간추정에 대한 유의사항이 우리나라 학교수학에서 모비율의 구간추정에 있어서도 일관되게 적용되었다고 할 수 있을까? 구체적으로, 미지의 모비율 p의 구간추정을 할 때 모집단의 모분산 σ^2 은 $p(p-1)$이므로 모분산을 모르는 것이 매우 흔한 상황인데, 그런 상황에서 모분산 대신에 표본분산의 값을 적용하는 '모비율의 구간추정' 활동을 학교수학에서 해왔느냐는 것이다.

이러한 문제의식은 확률변수로서의 표본평균 $\overline{X}$와 표본비율 $\hat{P}$이 본질적으로 동일하다는 사항에 근거한다. 다시 말해, '모평균과 모비율의 구간추정'은 각각 표본평균 $\overline{X}$과 표본비율 $\hat{P}$의 표집분포에 근거해 이루어지는데, 표본평균 $\overline{X}$와 표본비율 $\hat{P}$이 본질적으로 같은 확률변수라면 모분산 대신 표본분산의 값을 대입하는 절차가 두 종류의 구간추정 과정에서 동일하게 적용되는 것이 일관성 측면에서 타당하게 여겨진다.

김응환과 이석훈(2008: 234)은, 표본평균 $\overline{X}$와 표본비율 $\hat{P}$의 동일성과 관련해, 표본비율 $\hat{P}$의 표집분포를 다음과 같이 설명한다.

> 일반적으로 개체의 속성이 0과 1로만 구성된 모집단으로부터 표본의 크기가 n인 확률표본 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$을 추출하면, 이들 확률변수 X_i는 각각 서로 독립이며, 모수 p를 갖는 베르누이 확률변수로서 동일한 분포를 따른다. $(E(X_i)=\mu=p,\ V(X_i)=\sigma^2=pq)$
>
> … (중략) … 확률변수 X_i들의 합인 $\sum_{i=1}^{n}X_i$을 표본의 크기 n으로 나누어주면 이것은 추출된 확률표본에서의 속성의 비율을 의미하여, 표본비율(sample proportion) $\hat{P}$임을 알 수 있다. 즉
>
> $\hat{P}=\frac{X_1+X_2+\ \cdots\ +X_n}{n}=\overline{X}$
>
> 이 표본비율 $\hat{P}$은 역시 표본평균 $\overline{X}$와 같으므로 표본의 크기 n을 충분히 크게 하면$(n>30)$ 중심극한정리에 의해 평균과 분산이 각각 $E(\hat{P})=E(\overline{X})=\mu=p$,
>
> $V(\hat{P})=V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{pq}{n}$인 정규분포를 근사적으로 따르게 되는 것을 알 수 있다.
>
> $\hat{P}\sim N(p,\frac{pq}{n})$
>
> 이것을 표준화하면 다음과 같다.
>
> $$Z=\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(p-1)}{n}}}\sim N(0,1)$$

이와 같이 표본비율 $\hat{P}$와 표본평균 $\overline{X}$의 표집분포를 본질적으로 같은 종류의 것으로 간주한다면, 학교수학에서 모비율의 신뢰도 95%의 신뢰구간을 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}]$ 으로 제기하고 있다는 사실에 기초하였을 때, 학교수학에서 모평균과 모비율의 구간추정 사이의 일관성의 문제는 아래의 <'모평균의 신뢰구간의 예'의 현재 구성과정>과 <'모비율의 신뢰구간의 예'의 예상 구성과정> 사이의 일치성의 문제로 귀결시킬 수 있다.

<'모평균의 신뢰구간의 예'의 현재 구성과정>

$[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$은 신뢰도 95%의 모평균 m의 신뢰구간이다. 구체적으로, 모집단에서 임의로 (복원) 추출한 크기 n인 표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$의 관측값을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이라고 하면, 이 관측값의 평균 $\overline{x}$를 대입하여 얻은 구간 $[\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$은 신뢰도 95%의 모평균 m의 신뢰구간의 예가 된다.

그런데 대부분의 경우 모표준편차 σ가 알려져 있지 않을 때가 많다. 그래서 표본표준편차 S의 관측값인 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ 은 모표준편차 σ의 추정치이므로, $\overline{X}$와 σ대신에 각각 $\overline{x}$와 s의 값을 대입해서 만든 구간인 $[\overline{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}}]$도 신뢰도 95%의 모평균 m의 신뢰구간의 예로 활용한다.

<'모비율의 신뢰구간의 예'의 예상 구성과정>

$[\hat{P}-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},\hat{P}+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ 또는 $[\hat{P}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\hat{P}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 은 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간이다. 구체적으로, 모집단에서 임의로 (복원) 추출한 크기 n인 표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$의 관측값을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이라고 하면, 이 관측값의 평균인 표본비율(값) $\hat{p}$를 대입한 구간 $[\hat{p}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\hat{p}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$은 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간의 예가 될 것이다.

그런데 모표준편차 σ는 $\sqrt{p(1-p)}$ 이므로 그 값이 알려져 있지 않을 때가 많다. 표본표준편차 S의 관측값인 $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{p})^2}$ 은 모표준편차 σ의 추정치이므로, $\hat{P}$와 σ대신에 각각 $\hat{p}$와 s의 값을 대입해서 만든 구간인 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}]$을 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간의 예로 활용하면 될 것이다.

여기서, 모평균과 모비율의 신뢰구간의 예를 구성하는 두 과정을 비교함으로써 명확히 드러나는 것은 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{p})^2}$ 와 $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$ 이 일치하느냐의 문제가 모평균의 신뢰구간과 모비율의 신뢰구간에 대한 교수-학습에 있어 일관성을 유지하느냐를 결정한다는 점이라 하겠다.

그렇다면, 표본비율 $\hat{P}$와 관련해 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2}$ 와 $\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}$ 은 서로 같은 확률변수인 것일까? 이 문제는 모비율의 신뢰구간 추정에 있어 각 확률변수 X_i 가 0과 1로만 이루어진 베르누이 확률변수라는 것을 활용하면 쉽게 해결할 수 있다. 표본의 크기가 n인 확률표본 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$에 대한 표본표준편차

$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2}$ 은, X_i 의 특성을 이용해, $\hat{P}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ 및 $\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})}$ 와 손쉽게 비교 가능한 것이다.

우선, $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$(n회의 시행 중 성공 횟수를 나타내는 확률변수 X)와 $n-X$(n회의 시행 중 실패 횟수)를 도입하면 $\hat{P}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{X}{n}=\frac{1\cdot X+0\cdot(n-X)}{n}$ 임을 알 수 있고, 이를 이용해 다음의 표를 작성할 수 있다.

$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2$와 $\hat{P}(1-\hat{P})$은 $\hat{P}$가 0 또는 1인 경우에만 0의 값으로 서로 일치한다. 왜 그런 것일까? <표 Ⅰ>에서 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2$을 구하는 과정 속에 그 실마리가 들어있다. 그 과정을 분석해 보면 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2=\frac{X\cdot(1-\frac{X}{n})^2+(n-X)\cdot(0-\frac{X}{n})^2}{n-1}$ 임을 명확

<표 Ⅰ> $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2$와 $\hat{P}(1-\hat{P})$의 비교

X_1	X_2	X_3	$\cdots$	X_n	X	$n-X$	$\hat{P}$	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2$	$\hat{P}(1-\hat{P})$
1	1	1	$\cdots$	1	n	0	$\frac{n}{n}$	$\frac{n\cdot(1-\frac{n}{n})^2+0\cdot(0-\frac{n}{n})^2}{n-1}$	$\frac{n}{n}(1-\frac{n}{n})$
1	1	1	$\cdots$	0	$n-1$	1	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{(n-1)\cdot(1-\frac{n-1}{n})^2+1\cdot(0-\frac{n-1}{n})^2}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}(1-\frac{n-1}{n})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0	1		0	$n-3$	3	$\frac{n-3}{n}$	$\frac{(n-3)\cdot(1-\frac{n-3}{n})^2+3\cdot(0-\frac{n-3}{n})^2}{n-1}$	$\frac{n-3}{n}(1-\frac{n-3}{n})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	1	0	$\cdots$	0	2	$n-2$	$\frac{2}{n}$	$\frac{2\cdot(1-\frac{2}{n})^2+(n-2)\cdot(0-\frac{2}{n})^2}{n-1}$	$\frac{2}{n}(1-\frac{2}{n})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	0	0	$\cdots$	0	1	$n-1$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1\cdot(1-\frac{1}{n})^2+(n-1)\cdot(0-\frac{1}{n})^2}{n-1}$	$\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	$\cdots$	0	0	n	$\frac{0}{n}$	$\frac{0\cdot(1-\frac{0}{n})^2+n\cdot(0-\frac{0}{n})^2}{n-1}$	$\frac{0}{n}(1-\frac{0}{n})$

히 알 수 있는데, 표본비율 $\hat{P}$가 $\frac{X}{n}$임을 이용해, $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2$이 $\frac{n}{n-1}[\hat{P}(1-\hat{P})]$이 됨을 아래와 같이 유도할 수 있다. 물론, 이러한 이유로 $\frac{n}{n-1}[\hat{P}(1-\hat{P})]$와 $\hat{P}(1-\hat{P})$이 일치하는 경우는 $\hat{P}$가 0 또는 1 인 경우뿐이다.

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{P})^2 =$$

$$\frac{X\cdot(1-\frac{X}{n})^2+(n-X)\cdot(0-\frac{X}{n})^2}{n-1} =$$

$$\frac{n\,[\frac{X}{n}\cdot(1-\frac{X}{n})^2+\frac{n-X}{n}\cdot(0-\frac{X}{n})^2]}{n-1} =$$

$$\frac{n\,[\hat{P}\cdot(1-\hat{P})^2+(1-\hat{P})\cdot(0-\hat{P})^2]}{n-1} =$$

$$\frac{n}{n-1}[\hat{P}(1-\hat{P})(1-\hat{P}+\hat{P})] =$$

$$\frac{n}{n-1}[\hat{P}(1-\hat{P})]$$

결론적으로, 모비율의 추정과 관련해 모표준편차 $\sqrt{p(1-p)}$가 알려져 있지 않을 때 그 대신 활용하는 표본표준편차 S의 관측값 s는 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{p})^2}=\sqrt{\frac{n}{n-1}[\hat{p}(1-\hat{p})]}$ 이기에, 구간 $[\hat{P}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\hat{P}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$에 대해 $\hat{P}$, σ대신에 각각 $\hat{p}, s$의 값을 대입해서 만든 구간은 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n-1}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n-1}}]$이 된다.

그렇다면, 모평균의 신뢰구간 추정활동과 일관성을 유지한다는 면에서 학교수학에서 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}]$을 신뢰도 95%의 모비율 p의 신뢰구간으로 제시하는 것이 바람직하다고 할 수 있을까?

Ⅳ. 요약 및 교육적 제안

이 연구에서는 학교수학에서 모평균과 모비율의 신뢰구간을 추정할 때 활동의 차이가 발생하는 이유에 대해 문제를 제기하였다. 물론, 그에 대한 표면적 이유는 미지의 모표준편차를 대신해 표본표준편차의 관측값을 대입하는지의 여부에 있어서 차이가 있기 때문이다. 그리고 그것으로 인해, 모평균의 신뢰구간 추정에서는 모집단의 모분산을 고려하는 반면에 모비율의 신뢰구간 추정에서는 모집단의 모분산을 고려하지 않는 체 모비율 p 대신에 표본비율의 관측값 $\hat{p}$을 사용하는 듯 보인다고 하겠다.

그런데 모비율의 신뢰구간 추정의 이러한 모습은 그 자체로도 일관성이 결여되었다고 할 수 있다. 예를 들어, 표본비율의 관측값 $\hat{p}$을 이미 모비율 p로 간주해버리는 암묵적인 점추정 활동을 수행한 후에 모비율 p에 대한 신뢰구간을 추정하는 것은 '신뢰구간의 도입취지'를 살리지 못하는 것일 수 있다. 즉, 통계적 확률을 실제적으로 구하지 못하는 시간적, 경제적 한계를 극복하기 위해 적절히 큰 표본에 의해 신뢰구간을 도입한다는 아이디어를 살리지 못하는 것이다.

하지만 이 연구에서 드러나듯, 모평균과 모비율의 신뢰구간에 대한 추정활동 사이에 차이가 발생하는 좀 더 본질적인 이유는 학교수학에서 표본평균 $\overline{X}$과 표본비율 $\hat{P}$을 동일하게 취급하지 않는 데에 있다고 할 수 있다. 다시 말해, 확률변수로서의 $\overline{X}$와 $\hat{P}$을 서로 유기적으로 관련시키지 못하고 있는 것이 모평균과 모비율의 신뢰구간 추

정활동 사이에 차이가 나는 근본적 이유라 할 것이다. 학교수학에서 $\hat{P}=\dfrac{X_1+X_2+\ \cdots\ +X_n}{n}=\overline{X}$와 같은 관점에서 확률과 통계 단원을 다루지 않음으로 인해, 신뢰구간 추정활동에 있어 일관성이 결여되는 현상이 발생한다고 하겠다.

그런데 표본평균 $\overline{X}$과 표본비율 $\hat{P}$을 동일하게 취급하지 못하는 것은 일관성 측면에서 모비율의 신뢰구간 추정에서뿐만 아니라 확률과 통계 전반에 걸쳐 부정적 영향을 미치고 있다. 그 대표적인 예로, 학교수학에서 표본평균 $\overline{X}$와 그에 대한 관측값 $\overline{x}$을 구별하는 반면에 표본비율 $\hat{P}$와 그에 대한 관측값 $\hat{p}$을 구별하지 않는 것에 의한 영향을 들 수 있다.

학교수학에서는 보통 확률변수 $\hat{P}$와 그에 대한 관측값 $\hat{p}$을 구별하지 않고 모두 $\hat{p}$로 나타내고 있다. 그런데 모비율의 신뢰구간을 추정하는 활동에서 모표준편차 $\sqrt{p(1-p)}$를 표본표준편차의 관측값 $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}\left[\hat{p}\ (1-\hat{p})\right]}$로 바꾸지 않는 대신에 표준정규화된 확률변수 $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$(확률변수 표본비율을 $\hat{p}$로 표시한 표현)에 대해 모비율 p 대신에 $\hat{p}$(표본비율의 관측값)을 대입하게 되면, 학생들은 그 결과를 $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$ 보다는 $\dfrac{\hat{p}-\hat{p}}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$으로 간주하고 확률변수와 그 관측값을 구분하지 못함으로써 $\dfrac{\hat{p}-\hat{p}}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}=0$와 같이 다룰 위험도 있다. 그리고 학생들이 교육적 의도대로 확률변수 $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$를 다루게 되더라도 분모 $\hat{p}-p$ 와 분자 $\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$에서의 $\hat{p}$ 가 각각 확률변수와 관측값으로 구별된다는 것을 인식하지 못할 수 있다.

그렇다면, 이처럼 모평균과 모비율의 신뢰구간에 대한 추정활동에 차이가 나는 '일관성의 결여' 현상을 극복하기 위한 방안은 무엇일까? 사실, 해결의 방향은 앞서 제시한 '일관성의 결여' 현상에 대한 분석 속에 이미 함의되어 있다고 할 수 있다. 이와 관련해, 다음의 세 가지 제안을 할 수 있을 것이다.

첫째, $\hat{P}=\dfrac{X_1+X_2+\ \cdots\ +X_n}{n}=\overline{X}$와 같은 관점에서 표본평균과 표본비율을 동일하게 취급하는 것이다.

둘째, 모평균과 모비율의 신뢰구간의 특정한 예를 구성하는 과정에 있어 모표준편차 대신에 표본표준편차의 관측값을 대입하는 절차를 동일하게 적용하는 것이다. 모평균의 신뢰구간의 예를 구성할 때 $[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ → $[\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ → $[\overline{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}}]$와 같은 3단계를 거치듯이, 모비율의 신뢰구간의 예를 구성할 때 역시도 $[\hat{P}-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},\hat{P}+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ → $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ → $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n-1}},\hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n-1}}]$와 같은 3단계를 거치는 것이다.

셋째, 표본비율 $\hat{P}$와 그에 대한 관측값 $\hat{p}$을 구별하게 하는 것이다. 이와 관련해, 대부분의 교

과서에서 '굉장히 작은 h에 대해서도 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}$ $\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<h\right)=1$'와 같은 형태로 큰 수의 법칙을 다루면서 확률변수 $\frac{X}{n}$를 상대도수 또는 통계적 확률로 지칭하고 있는 상황인데, 확률변수 $\frac{X}{n}$는 관측값으로서의 상대도수나 상대도수(들)의 수렴값으로서의 통계적 확률이 아니며 확률변수로서의 표본비율 $\hat{P}$ 일 뿐이다. 이와 같은 용어의 혼돈은 학생들에게 오개념을 유발할 수 있다는 점에서, 모비율의 신뢰구간 추정에서뿐만 아니라 고등학교 확률과 통계 전체에서 확률변수와 그에 대한 관측값을 구별할 필요가 있고 그것을 위한 교수학적 변환의 연구가 요청된다고 하겠다.

연구의 결과, 이 연구는 모비율의 신뢰구간의 예로 $[\hat{p}-1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n-1}}, \hat{p}+1.96\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n-1}}]$을 사용하는 것이 학교수학의 확률과 통계 영역에서 일관성을 확보하는 것이라 제안하였다. 하지만 서론에서 제기했듯, 이 연구는 목적은 이러한 제안에 대한 설득이 아니라 '모비율의 추정에서 n 또는 $n-1$ 로 나누는 것'에 대한 문제를 수학교육계에서 공론화함으로써 여러 관련 교육적 주장과 제안이 제기되도록 하는 데에 있다. 이런 점에서, 이 연구를 교수학적 변환 차원에서 보강하거나 이 연구에 반대하는 다수의 토론과 연구가 나오길 기대하는 바이다.

참고문헌

계승혁 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 성지출판.

교육과학기술부(2008). **고등학교 교육과정 해설-수학**. 서울: 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.

교육인적자원부(2006). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주) 천재교육.

김응환, 이석훈(2008). **통계교육**. 서울: (주) 경문사.

유희찬 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 미래엔 컬처그룹.

윤재한 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 더텍스트.

이강섭 외 a(2011). **고등학교 수학의 활용**. 서울: (주) 지학사.

이강섭 외 b(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 지학사.

이경화, 신보미(2005). 표본표준편차의 교수학적 분석. **수학교육학연구, 15**(4), 445-459.

이준열 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 천재교육.

정경호(2005). 통계교육의 이해와 지도 방안. **용봉수학교육연구, 5**, 109-122

정상권 외(2011). **고등학교 수학의 활용**. 서울: (주) 금성출판사.

최봉대 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 중앙교육진흥연구소.

최승현 외(2006). **수학과 선택과목 교육과정 개정 시안 연구 개발**. 한국교육과정평가원.

최용준 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 천재교육.

황선욱 외(2011). **고등학교 적분과 통계**. 서울: (주) 좋은책신사고.

The Consideration of Consistent Use of Sample Standard Deviation in the Confidence Interval Estimation of Population Mean and Population Ratio

Park, Sun Yong (Yeungnam University)
Yoon, Hyoung Seok (Gyeongsan Science High School)

This study compares the confidence interval estimation of population mean with that of population ratio, and considers whether these two estimations ensures consistency. As a result, this study suggests the following acquisition method of consistency : dealing with population mean and population ratio in the same mode, substituting the observed or experimental value of sample standard deviation for standard deviation in population in setting a confidence interval of both population mean and population ratio, and distinguishing population ratio $\hat{P}$ from its observed vale $\hat{p}$.

* Key Words : confidence interval estimation(신뢰구간 추정), consistency(일관성), population mean(모평균), population ratio(모비율), sample mean(표본평균), sample ratio(표본비율), sample standard deviation(표본표준편차), standard deviation in population(모표준편차)

논문접수 : 2014. 6. 25
논문수정 : 2014. 7. 24
심사완료 : 2014. 8. 4