대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 3, 359 ~ 374. Aug 2014

문자식을 포함한 대수 증명에 대한 중학교 3학년 학생들의 이해 연구
- 문맥과 문자식, 어느 것을 보는가 -

장 혜 원* · 강 정 기**

증명 학습과 관련하여 학생들이 경험하는 어려움과 오류는 수학교육계의 난제라 할 만하다. 증명에 대한 형식적 학습이 이루어지는 기하 영역에서뿐만 아니라 대수 증명에 대해서도 문자식의 처리나 일반성의 파악과 관련하여 어려움의 요소는 도처에서 발견된다. 본 연구에서는 두 3의 배수의 합은 3의 배수라는 명제에 대한 문자식을 포함한 증명에서 학생들이 증명의 문맥을 적절하게 이해하는가를 알아보는 데 초점을 둔다. 중학교 3학년 학생 24명을 대상으로 하여 증명 과정에 문자식이 포함되며 결론 부분은 빈 칸으로 생략되어 있는 증명을 제시하고 그 증명이 어떤 명제에 대한 증명인지 알아보도록 한 결과 반 이상의 학생이 문자식 자체에 근거하여 부적절한 응답을 하였다. 나아가 그 중 임의 추출한 세 명을 개별 면담함으로써 사고 특징을 조사하였다. 대수 증명을 식의 성립을 보이는 것으로 간주하는 증명관, 증명 수행과 이해에서의 문자식 해석의 괴리 등을 비롯한 사고 특징을 파악하고 그로부터 교육적 시사점을 도출하였다.

I. 서 론

증명은 정당화의 수단으로서, 발견과 정당화를 기본 활동으로 하는 수학에서 필수불가결한 요소이다. 따라서 수학과 교육과정을 근거로 하여 학교수학에서 증명이 지도되어 왔지만 증명 학습의 어려움에 대한 호소는 어제오늘의 일이 아니다. 증명을 하기 위한 아이디어를 얻는 것과 그에 이어 증명을 써내려가는 것은 어려움의 대표적인 유형이다. 물론 증명의 아이디어를 얻지 못한다면 증명 작성은 불가능하므로 후자는 전자에 종속된 활동이기도 한다. 이와 비견되는 또 다른 차원의 것은 교사나 교과서에 의해 제시된 증명을 이해하는 데서 경험하는 어려움이다. 즉 학생들은 교과서에 주어진 증명의 의미를 제대로 파악할 수 있는지 의심스럽다. 실제로 증명 작성과 관련된 어려움이 증명 이해의 어려움과 일치하지 않는다는 사실(Lin et al., 2004), 그리고 증명 작성의 어려움(Senk, 1985; Weber, 2001)뿐만 아니라 증명의 이해를 어려워한다는 사실(박지혜, 2010; 이진경, 2013)이 연구를 통해 확인된 바 있다.

특히 대수와 관련하여, 오늘날 대수 영역은 '일반화된 산술'에서 시작하여 매우 다양한 주제를 포함하는 영역으로 간주되지만 적어도 18세

* 서울교육대학교, hwchang@snue.ac.kr
** 창원남산중학교, jeonggikang@gmail.com

기에는 기호와 부호 및 이들을 조작하는 잘 정의된 방법을 이용하여 미지수를 결정하는 것으로 간주되었다(Katz, 2007). 대수에는 기호와 부호를 이용한 일반적인 계산 방법이 포함되며, 대수 영역에서의 정리 및 증명이 지니는 일반성은 문자 변수의 임의성에 의해 확보되고 결과적으로 대수 증명 과정에는 문자식이 포함되기 마련이다. 따라서 학생들이 대수 영역에서의 증명을 적절한 의미로 이해하기 위해서는 증명 과정에 포함된 문자 변수 및 문자식의 의미를 올바르게 파악할 것을 요구한다.

이를테면 문자 변수에 대한 학습이 적절하게 이루어지지 않은 상태에서 문자 변수를 경험하는 학생이 지니는 인지적 갈등을 쉽게 관찰할 수 있다. 우리나라 학교수학에서 대수로의 도입은 중학교 1학년에 의도되는데, 아직 문자에 대한 형식적인 학습이 이루어지지 않은 한 예비중학생은 문자 a와 b가 포함된 문제를 푸는 과정에서 두 문자의 값이 모두 3이 되는 경우를 경험하면서, '앗! 이상하다. a랑 b가 같아져… 다른 거 아닌가? 기호가 다른데…'라는 반응을 보였다[1]. 수학에서 높은 성취도를 보이는 학생이지만 문자 변수 및 그 사용에 익숙하지 않은 상태에서 보여준 이와 같은 반응은 문자가 다르면 그 값 또한 다르다는 인식을 보여주므로 문자간의 독립적 일반성에 대한 인식이 자연스런 인식 발달은 아님을 제안한다.

한편 Inglis & Alcock(2012)는 수학적 증명을 읽을 때 초보자와 전문가를 비교함으로써 초보자가 논증의 표면적 특성에 더 집중하며 전문가가 증명 진술의 앞뒤를 오가며 파악하는 경향이 있음을 보였다. 결국 수학적 증명을 적절하게 이해하기 위해서는 문자식 자체에 대한 파악보다 증명 전체의 맥락 속에서 문자식의 역할을 인식할 필요가 있음을 시사한다.

이에 본 연구에서는 증명에 대한 형식적인 지식을 지닌 것으로 간주되는 중학교 3학년 학생들을 대상으로 두 3의 배수의 합은 3의 배수라는 명제에 대한 문자식이 포함된 증명 과정을 제시할 때 그들이 증명의 의미를 올바르게 파악하는가를 조사하고, 그 증명의 의미를 적절하게 파악하지 못한 학생들의 경우에는 그 이유를 파악하기 위한 인터뷰를 실시함으로써 문자식을 포함한 증명을 이해할 때 보이는 인지적 특성을 조사하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 다음과 같은 두 개의 연구 문제를 설정하였다:

연구 문제 1: 중학교 3학년 학생들은 문자식을 포함한 대수 증명 과정에서 증명의 의미와 문맥을 파악하는가?

연구 문제 2: 연구 문제 1에서 부정적인 결과를 보인 학생들의 문자식 이해와 관련한 인지적 특성은 무엇인가?

이 연구 문제에 답하기 위해 중학교 3학년 학생을 대상으로 문자식을 포함한 증명에 대한 이해의 양상을 조사할 것이며, 그 결과를 근거로 하여 문자식과 대수 증명에 관련한 교수학적 시사점을 도출하고자 한다.

II. 이론적 고찰

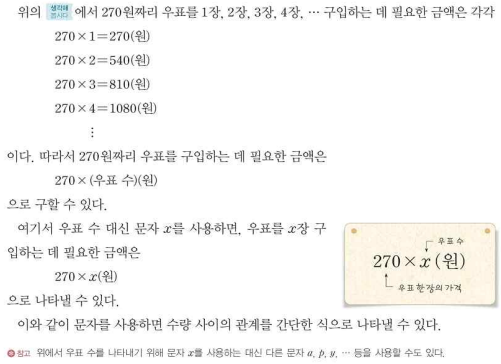
1. 대수 증명과 관련한 교과서 분석

논리적 증명이 처음 지도되는 것은 중학교 2학년 기하 영역에서이다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 기하 영역에서의 변화가 보여주듯이(교육과학기술부, 2011) 논리적으로 엄밀한 증명은 중요한 수학적 도구임에도 불구

1) 2013년 12월 19일 한 예비중학생의 수학 문제해결 과정에서 관찰된 결과이다.

하고 학생들에게는 가장 어렵게 느껴지는 수학적 주제 중 하나로 그 위상을 굳혀온 것이 사실이다. 이와 같은 어려움의 상징인 증명 학습이 대수 영역에서는 어떠한가?

이를 고찰하기 위해 중학교 수학교과서와 익힘책 3종(우정호 외, 2013; 이준열 외 2009a & 2009b)을 분석하였다. 문자를 이용한 식 표현은 초등 수학에서 □ 또는 pre-algebra에서 문자 도구의 이용(이화영, 장경윤, 2010)으로 전조를 보이지만, 중학교 1학년 교과서 '문자와 식' 단원에서 본격적으로 지도되기 시작한다. 이 때 제공되는 문자는 방정식에서 미지수로서의 자리지기를 탈피한 다가이름으로서의 맥락을 드러내게 된다. 1학년 교과서의 문자와 식 단원의 도입부에 등장하는 다음 [그림 II-1]은 미지수의 맥락 이외에 다가이름으로서의 맥락을 갖는 것이다.


위의 생각해 봅시다 에서 270원짜리 우표를 1장, 2장, 3장, 4장, … 구입하는 데 필요한 금액은 각각

$270\times1=270$(원)

$270\times2=540$(원)

$270\times3=810$(원)

$270\times4=1080$(원)

⋮

이다. 따라서 270원짜리 우표를 구입하는 데 필요한 금액은

$270\times$(우표 수)(원)

으로 구할 수 있다.

여기서 우표 수 대신 문자 x를 사용하면, 우표를 x장 구입하는 데 필요한 금액은

$270\times x$(원)

으로 나타낼 수 있다.

우표 수

$270\times x$ (원)

우표 한 장의 가격

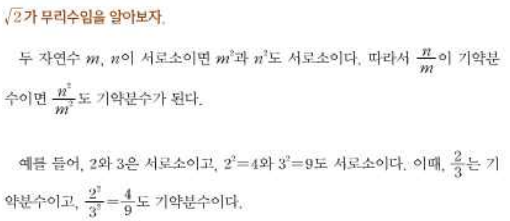
이와 같이 문자를 사용하면 수량 사이의 관계를 간단한 식으로 나타낼 수 있다.

참고 위에서 우표 수를 나타내기 위해 문자 x를 사용하는 대신 다른 문자 a, p, y, … 등을 사용할 수도 있다.

[그림 II-1] 다가이름으로서의 문자(우정호 외, 2013)

이와 같이 문자와 식 단원의 초반부에서 문자 도입은 다가이름으로서의 맥락까지 포함한 것이지만, 자리지기로서의 역할이 명백한 방정식의 출현으로 인해 학생들은 문자를 특정수를 대신하는 것으로 이해하려는 경향이 있다. 다가이름으로서의 문자는 이후에 지속적으로 등장한다. 예를 들어, 중학교 3학년에 등장하는 제곱근의 성질 '$a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$'와 곱셈공식 '$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$'은 다가이름으로서의 맥락을 갖는 문자식이다. 그러나 Usiskin(1988)이 주장한 바와 같이 문자식은 하나의 맥락이 아닌 다양한 맥락을 갖기 때문에 문자 변수가 갖는 맥락을 정확히 구분하는 것이 쉽지 않은 것이 사실이다. 이를테면, 일반적인 이차방정식 표현인 $ax^2+bx+c=0$에서 문자 변수 a, b, c는 다가이름으로서의 맥락을 지닌 반면, x는 자리지기로서의 맥락을 갖는 변수이다.

중학교 수학의 대수 영역에서 문자의 사용은 대수적 개념이나 성질을 위한 표현에 국한되지 않으며, 대수 증명에서도 나타난다. 예컨대 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명할 때이다([그림 II-2]).


$\sqrt{2}$가 무리수임을 알아보자.

두 자연수 m, n이 서로소이면 m^2과 n^2도 서로소이다. 따라서 $\frac{n}{m}$이 기약분수이면 $\frac{n^2}{m^2}$도 기약분수가 된다.

예를 들어, 2와 3은 서로소이고, $2^2=4$와 $3^2=9$도 서로소이다. 이때, $\frac{2}{3}$는 기약분수이고, $\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$도 기약분수이다.

[그림 II-2] 증명에서 문자 이용 1(이준열 외, 2009a)

이 증명 과정에서 임의의 두 문자가 등장하는 것은 사실이지만, 증명에 직접 사용된 문자는 아니고 증명에서 이용해야 할 명제를 대수 변수를 사용함으로써 그 임의성을 명료화하고 있는 것이다. 증명에 이용된 정리 또는 성질의 일반성을 확보하기 위한 대수적 표현이다. 한편 대수 변수를 이용한 일반적 증명의 예로는 이차방정식의 경우가 있다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정은 $b^2-4ac\geq0$ 을 만족하는 임의의 이차방정식에 행해질 수 있는 수학적 조작이라는 일반성을 띄고 있다. [그림 II-3] 또한 대수 변수의 임의성을 이용한 증명이 다루어지고 있음을 보여주는 실례이다. 증명 과

제는 '연속한 두 자연수의 제곱의 차는 항상 홀수임을 인수분해를 이용하여 설명'하는 것이다.

15 연속한 두 자연수를 n, $n+1$이라고 하자.
두 자연수의 제곱의 차를 식으로 나타내면

$$(n+1)^2-n^2$$

이고, 이 식을 인수분해하면

$$(n+1)^2-n^2=\{(n+1)+n\}\{(n+1)-n\}$$
$$=2n+1$$

따라서 연속한 두 자연수의 제곱의 차는 항상 홀수이다.

[그림 II-3] 증명에서 문자 이용 2(이준열 외, 2009b)

이 증명은 연속한 두 자연수를 n, $n+1$로 하여 주어진 명제가 참임을 설명하고 있다. 여기서 사용된 문자 표현은 연속한 두 자연수를 함의한 다가이름으로의 변수 맥락을 지니며, 임의의 연속한 두 자연수에 대해 언제나 취해질 수 있는 일반성의 맥락을 갖는다. 이처럼 중학교 교과서에서 임의성을 함의한 정리 표현에서도 대수 변수를 사용하고 있을 뿐만 아니라, 일반적 증명이 필요한 문제에서도 대수 변수에 의한 효과적인 증명 방법을 제안하고 있음을 알 수 있다. 그러나 문제는 학생들이 문자식뿐만 아니라, 하나의 완결된 논리적 증명의 전체 맥락에 주목하여 문자식을 파악할 수 있느냐 하는 것이다. 전술한 바와 같이 증명 학습과 관련하여 증명 아이디어의 발견, 발견한 아이디어의 작성 이외에 주어진 증명의 이해 등 여러 어려움이 보고되고 있다. 본 연구에서는 이들 중 증명의 이해에 초점을 맞추어 이에 대한 근본적 원인을 탐색해 보고자 하며, 이를 위해 주어진 대수 증명을 이해하고자 하는 학생들이 증명이라는 하나의 논리적 문맥 속에서 증명의 문맥에 집중하는가 아니면 증명에 포함된 문자식 자체에 집중하는가를 살피고자 하는 것이다.

2. 대수 증명에서 문자식 사용과 관련한 선행 연구

대수는 일반화된 산술이라 여겨질 정도로 산술과 유사점이 많지만 차이점 또한 크기 때문에 처음 대수를 배우는 학생들의 어려움을 야기시키는 것으로 알려져 있다. 특히 산술은 알고 있는 수로 수행하는 계산을 다루는 반면 대수는 변수를 다룸으로써 구체적 상황과 일반적 상황에 대한 인식을 필요로 한다(van Amerom, 2003).

대수에서의 변수 사용은 대수 증명을 어렵게 하는 중요한 요소이다. 강정기, 장혜원(2014)에서 보여주는 대수 증명에 포함된 문자 변수의 종속성과 독립성을 파악하지 못하고 양자를 적절히 구분하여 사용하지 못한다는 결과는 학생들이 문자 사용과 관련하여 경험하는 어려움의 새로운 측면을 보여준다.

한편 수학적 증명에 대한 외적인 형태에 집중하는 형식적 접근과 구체적인 맥락과 의미의 고려라는 구별되는 두 가지 측면에 대해 많은 연구자들이 관심을 가져왔다(Easdown, 2009; Radford & Puig, 2007; Selden & Selden, 2003; Weber & Alcock, 2004; 조지영, 권오남, 2012 등). 특히 Easdown(2009)이 수학적 식의 형식과 그것의 기저 아이디어 또는 의미와 관련한 사고를 구별하기 위해 사용한 구문론적 추론(syntactic reasoning)과 의미론적 추론(semantic reasoning) 및 Weber & Alcock(2004)가 형식적 증명을 구성하는 데 있어 기호적 식의 처리 대 수학적 개념의 사용이라는 두 가지 방법을 구별하기 위해 사용한 구문론적 증명 산출(syntactic proof productions)과 의미론적 증명 산출(semantic proof productions)은 본 연구에서의 관심인 문자식과 증명의 문맥이라는 측면과 연계적인 개념이다.

뿐만 아니라, 앞서 언급한 Inglis & Alcock (2012)의 연구는 본 연구에 시사하는 바가 크다.

연구에서는 초보자와 전문가의 증명에 대한 접근 방식을 비교하려는 의도에서 대학생과 수학자가 증명의 타당성을 파악하기 위해 증명을 읽을 때 그들의 시선 이동을 기록하여 비교하였다. 결과적으로, 초보자는 논증의 표면적 특징에 더 초점을 맞춤으로써 논리적 구조에는 비교적 덜 주의함을 제안하며, 수학자는 증명의 연속적 행간을 앞뒤로 옮겨가며 주목하는 경향이 있음을 보여준다. 마찬가지로 Selden & Selden(2003) 역시 대학생의 증명 특성이 논증의 표면적 특징에 집중하는 경향이 있음을 보여준다.

III. 연구 방법

1. 연구 참여자

본 연구가 의도하는 문자식을 포함한 대수 증명에 대한 이해를 파악하기 위해서는 문자의 사용 및 증명에 대한 형식적 학습이 이루어진 학생을 연구 참여자로 선정해야 하므로 중학교 3학년 학생을 대상으로 하였다. 연구 문제 1을 위한 연구 참여자로 경남 창원의 N중학교 3학년 한 학급 24명을 연구 참여자로 선정하였다. 모두 남학생이며, 중학교 수학과 교육과정에 따라 수학 수업에서 대수 증명을 이미 경험한 학생들이다. 구체적으로 교과서로 이준열 외(2009a)가 적용되었다. 한편 연구 문제 2를 연구 문제 1에 대해 부정적인 결과를 나타낸 학생들 중 면담 참여자를 선정할 필요가 있다. 따라서 적용한 검사 문항에 대한 24명 학생의 응답을 유형별로 분류하였고, 증명 이해에 어려움을 보인 대표적 유형에서 임의의 표본을 추출함으로써 개별 면담을 위한 연구 참여자 3명을 최종 선정하였다. 이들은 공교롭게도 모두 수학 학업성취도가 중상위권에 해당하는 학생들이었다.

2. 연구 방법

가. 검사 문항

본 연구에서 문자식을 포함한 증명에 대한 연구 참여자의 이해를 조사하기 위해 사용한 문항은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 검사 문항

다음은 어떤 정리에 대한 증명이다.

(증명) m, n은 임의의 자연수이다. 이때 임의의 3의 배수는 $3m$,$3n$으로 나타낼 수 있다. 그런데 $3m+3n=3(m+n)$이므로, 따라서 (　　결론　　)이다.

위 증명은 어떤 정리에 대한 증명인가?
그 이유는 무엇인가?

본 연구는 연구 참여자가 문자식을 포함한 대수 증명을 어떻게 이해하는가를 파악하는 데 초점이 있으므로, 주어진 증명이 무엇에 대한 증명인지가 드러나지 않는 검사 문항을 필요로 한다는 사실에 기초하여 개발된 문항이다. 검사 문항에서 증명의 결론은 곧 증명의 대상이 되는 정리이므로 이 역시 괄호를 사용하여 빈칸으로 처리하였다. 또한 '임의의 두 개의 3의 배수는 어떤 자연수 m, n에 대해 $3m$, $3n$으로 나타낼 수 있다'와 같이 수학적으로 엄밀한 표현이 지닌 수학적 대상의 임의성과 존재성으로 인해 예상되는 학생들의 어려움을 고려하여 문장을 분리하여 기술하였다. 즉, m, n에 대한 임의의 자연수라는 조건을 먼저 제시하고, 이어 임의의 3의 배수를 $3m$, $3n$으로 나타낼 수 있다고 진술함으로써 임의성을 함의하였다.

뿐만 아니라 이와 같은 진술은 연구에서 기대하는 결론에 대한 다른 해석을 배제시킨다. 검사

문항에 제시된 증명은 임의의 두 3의 배수의 합은 역시 3의 배수라는 배수의 성질에 대한 증명이라는 사실에 논란의 여지가 없다. 만약 3의 배수와 무관한 다른 결론을 답한다면, 이는 증명의 전체 맥락을 파악하지 못하고 포함된 문자식 또는 그 밖의 다른 요인에 초점을 둔 해석으로 파악될 수 있다. 왜냐하면 '임의의 3의 배수는 $3m$, $3n$으로 나타낼 수 있다'는 상정된 진술이 무시되었기 때문이다. 이와 같이 검사 결과로서 기대되는 학생들의 결론을 통해 그것이 증명의 전체 맥락이 반영된 해석인지 문자식에 초점을 둔 해석인지 파악 가능하며, 이것이 곧 본 연구에서 목적하는 바이다.

나. 연구 방법 및 절차

연구 문제 1에 답하기 위해 2013년 7월 16일 아침 자율학습시간을 이용하여 24명의 연구 참여자에게 검사 문항을 1차 적용하였다. 이 때 수집한 자료인 연구 참여자의 응답을 유형별로 분류하였으며, 각 유형에 대한 도수 및 비율을 구하는 정량 분석을 실시하였다. 이 분석 결과에 근거하여 검사 문항에 포함된 증명에 대한 연구 참여자의 다양한 이해 양상 및 이해의 특징을 파악하였다.

또한 1차 적용에서 나타난 대표적 오류 유형인 문자식에 초점을 둔 그룹에 해당하는 학생들 중 3명을 임의 추출하여 연구 문제 2를 위한 연구 참여자로 선정하였다. 이들을 대상으로 7월 말의 방학 기간을 이용하여 개별 면담을 실시하여 질적 분석을 하였다. 구체적으로 7월 25일 한 차례의 면담과 7월 29일 두 차례의 면담을 실시하였다. 면담 시간의 제한은 없었으며, 3회의 관찰에서 매회 약 1시간 정도가 할애되었다. 연구자는 학생의 활동 및 응답을 주의 깊게 관찰하여 관찰지에 기록하였다. 이 과정에서 연구자가 이해하기 어려운 학생 반응에 대해서는 관찰 도중 질문을 통해 파악하였다. 관찰 기록은 학생들의 인지적 특성 파악을 위한 기초 자료로 이용되었다.

면담의 주요 내용은 연구 참여자에게 1차 적용시의 본인의 활동지를 제공함으로써 작성한 응답과 그 이유에 대한 심도 있는 질문과 답으로 이루어졌다. 특히 문자식에 초점을 둔 이유를 드러냄으로써 증명의 전체적 문맥이 아닌 문자식이 증명 이해의 관건이 된 원인을 파악하고자 하였다. 만약 증명에서 이해하기 어려운 용어가 있으면 이를 설명해 주어 용어 이해의 어려움을 배제하고자 하였다. 이를테면, 본 검사 문항에서 '임의의'라는 용어에 대한 이해 부족은 설명을 통해 의미 이해를 도와주었다. 한편, 증명을 무엇이라고 생각하는지를 질문함으로써 학생들의 증명에 대한 관념이 어떠한지를 파악하고, 이를 통해 문자식이 대수 증명에서 초점이 된 이유를 살피고자 하였다.

IV. 결과 및 분석

1. 연구 문제 1

수학적 증명, 특히 대수 증명은 많은 경우에 문자 변수를 이용하지만, 문자 변수는 증명을 효율적으로 하기 위해 고안된 도구이지 그것이 곧 증명 자체가 될 수는 없다. 증명은 주제가 담긴 한 편의 글과 같이 문맥으로 이해되어야 하며, 증명에서 나타나는 문자식은 문맥 속에 포함된 하나의 구절에 불과하다. 그러나 본 연구에서 검사 문항을 24명의 연구 참여자에게 적용한 결과는 <표 IV-1>과 같이 나타났다. 정답인 배수의 성질을 언급한 학생은 3명(12.5%)에 불과하고, 분배법칙이라는 오답을 한 학생이 15명(62.5%)으로 5

배에 해당하는 도수이다. 여기서 반응 유형 분배법칙에는 '분배법칙'이라는 용어를 사용하지 않았을지라도 응답의 의미상 분배법칙을 뜻하는 것은 모두 포함시켜 분류하였다. 예컨대 '임의의 자연수에 서로 곱해서 더하든 더해서 곱하든 답은 같다'라는 반응 역시 분배법칙으로 분류하였다.

<표 IV-1> 대수 증명에 대한 반응 유형

반응 유형	학생 수(명)	비율(%)
두 3의 배수의 합은 3의 배수	3	12.5
분배법칙	15	62.5
기타	3	12.5
무응답	3	12.5

이 결과는 다수의 연구 참여자가 검사 문항의 증명이 자연수의 분배법칙에 대한 것이라고 생각한다는 것을 보여주며, 그 대표적인 이유로 $3(m+n)$에서 3을 $m+n$에 각각 곱하면 $3m+3n$이라는 동의어 반복의 설명을 들 수 있다. 한편, 기타 유형으로 분류된 3명의 학생이 보인 반응과 그 이유는 <표 IV-2>와 같으며, 이들은 문자식에 대한 제각각의 해석을 보여준다.

<표 IV-2> 기타 유형의 반응

어떤 정리에 대한 증명인가?	이유
3의 배수는 $3(m+n)$으로 나타낼 수 있다는 것의 증명	$3m+3n=3(m+n)$이므로
곱셈의 변형. $3m+3n$에서 m과 n에 3, 4를 넣는다. 그러면 $3\times4+3\times3=3\times7$이다.	3의 배수를 더하면 3의 배수가 되니까
$3+3=6$ $m+n$을 더하여 곱하면 $6(m+n)$	이유 없음

<표 IV-1>의 결과로부터 62.5%의 연구 참여자는 주어진 증명이 분배법칙에 대한 증명이라고 답함으로써 증명의 맥락을 이해하지 못하고 증명에 포함된 문자식에만 초점을 맞추어 해석한 것으로 볼 수 있다. 결국 학생들은 증명의 맥락을 전혀 고려하지 못하고 있으며, 문자식에 의존하여 증명의 대상이 되는 정리를 찾으려는 경향을 보여주었다. 증명에서 임의의 3의 배수를 표현하는 방법을 명료하게 제시했음에도 불구하고 이러한 결과가 나타난 것은 문자식의 의미를 증명의 맥락 속에서 파악해야 하는 활동의 부재로부터 비롯된 것으로 볼 수 있다. 즉 $3n$을 3의 배수로 해석하지 못하는 문제와 결부된다. 절반 이상의 학생들은 식을 그 자체로 인식하여 식의 성립이 제안하는 법칙에 주목하였기 때문에 문맥의 흐름 속에서 식의 의미를 해석해 내지 못하는 오류를 범한 것이다.

2. 연구 문제 2

문자식에 주목하고, 그 의미를 해석하지 못한 사례의 학생들의 인지적 사고 과정을 규명하기 위해 연구자는 해당 연구 참여자를 대상으로 개별 면담을 실시하였다. 그 결과, 대수식의 항등성 확인이 곧 증명이라고 인식한 S1, S2의 사례와 증명 수행과 이해 사이에서 대수식 해석의 괴리를 보여준 S3의 사례로 구분해볼 수 있었다.

가. 대수식의 항등성 확인이라는 증명관 : S1과 S2의 사례

(1) S1의 사례

면담은 검사 문항에 대한 연구 참여자 자신의 응답에 대한 설명을 요구하는 것으로 시작되었다. S1의 응답은 분배법칙에 대한 증명이라는 것이며, 그 이유를 다음과 같이 밝혔다.

RS : 왜 분배법칙이라고 생각해?

S1 : 일단 두 가지 방법이 있는데요. 첫 번째는 뒤에 있는 3(m+n)이 있잖아요. 이것을 분배법칙을 이용해서 풀어봐요. 그러면 앞에 있는 3m+3n이랑 똑같은 결과가 나와요. 그래서 이게 첫 번째 이유이고, 두 번째는 아무 숫자나 대입을 해보는 건데, 만약에 m에 1을 넣고 n에 2를 넣으면 3m+3n이 9가 나오잖아요. 뒤에 있는 3(m+n)에도 똑같이 대입을 하면 이것도 9가 나와요. 그래서 성립한다는 것이 두 번째 이유입니다.

이와 같은 S1의 설명은 문자식 자체의 성립 여부에 초점이 맞추어져 있어 그 이유를 확인해 보고자 하였다.

RS : 그러면 증명에서 식만 보면 되는 거니?

S1 : 어떻게 나왔는지 한 번 풀이를 해봐야죠.

RS : 무엇을 풀이한다는 거니?

S1 : 어떻게 해서 이런 결론이 나왔는지 확인해야죠.

RS : 그게 무슨 말이지?

S1 : 제가 앞에서 말했잖아요. 두 가지 방법으로 확인하는 거요.

RS : 그러면 증명에서 나머지 말은 필요 없고 식만 있으면 되는 거 아니니?

S1 : 선생님처럼 수학을 잘 하는 수학자한테는 이해가 쉽겠지만, 못하는 사람에게는 말로도 설명해줘야 이해가 쉬워요.

RS : 여기서 말로 설명해서 이해가 쉽다는 게 무슨 말이야?

S1 : 공식을 적으면서 말로 표현해주어야 이해가 되죠.

이상의 면담으로부터 S1은 문자식이 증명의 중심이며, 그 밖의 설명은 문자식을 이해시키기 위한 설명의 역할을 하는 것으로 이해하고 있음을 알 수 있다. 이후 면담 과정에서 S1이 '임의의'라는 용어를 '임시로'라는 뜻으로 이해하고 있어 이 용어에 대한 설명을 해주어 용어로부터 빚어진 오류를 배제하고자 하였다. 다시금 연구자는 S1의 증명관을 알아보고자 다음과 같이 질문하였다.

RS : 너는 증명이 뭐라고 생각하니?

S1 : 그러니까 어떤 공식이 주어졌을 때 왜 그렇게 나왔는지 과정을 보여주는 거라고 생각해요.

RS : (기록지의 증명을 가리키며) 여기서는 무슨 과정을 보여주니?

S1 : 3m+3n이 왜 3에 m+n이 나오는지 보여주는 거죠?

RS : 수학을 잘 하는 사람이 증명하려면 식만 있으면 되는 거니?

S1 : 그러니까 어떻게 풀어가지고 그런 식이 나왔는지를 보여줘야 사람들이 인정하고 받아들이죠.

RS : 그럼 여기서는 이것을 어떻게 보여주는데?

S1 : 여기서는 일반 m과 n을 임의의 수로 잡아놓았어요. 그 임의의 수에 각각 3을 곱했어요. 그래서 3m과 3n의 결과가 나왔어요. 여기서 3m+3n으로 식을 만들었어요. 그래서 공통의 수 3을 묶고 뒤에는 임의의 수 m과 n을 더해서 3m+3n이랑 3(m+n)이 같다는 것을 보여주고 있어요.

RS : 그럼 이것을 보이는 방법은 묶는 거니?

S1 : 공통인수로 곱해져 있을 때 묶는 거죠.

S1은 주어진 증명에서 대수식에 초점을 두었을 뿐만 아니라, 증명이란 곧 대수 공식이 성립하는 것을 보여주는 과정으로 이해하고 있다. 따라서 증명을 어떻게 대수식이 나왔는지를 보이는 과정으로 이해하고 있으며, 그 과정은 공통인수 3을 묶는 것으로 보고 있다. 이처럼 S1은 대수 증명을 주어진 대수식을 증명하는 과정으로 이해하고 있었기 때문에, 대수 증명에서 문맥이 아닌 문자식에 초점을 맞출 수밖에 없었던 것이다.

(2) S2의 사례

S2는 자신의 기록에 대해, 대수식의 좌변과 우변의 m, n에 수를 대입하였을 때, 그 값이 일치하

므로 인수분해에 관한 증명으로 설명하였다. 그리고 증명을 설명하는 과정에서 '임의의 수'라는 용어에 대해 '자신의 마음대로 두는 수'로 이해하고 있었다. S2는 증명에서 식에 초점을 두고 있었으며, 이를 보다 명확하게 확인해 보고자 하였다.

RS : 증명에서 식만 보면 되는 거니?
S2 : 예. 식만 보면 되요.
RS : 왜?
S2 : 임의의 자연수를 3의 배수든, 4의 배수든, 5의 배수든 아무 수나 놓아도 식이 성립하기 때문에요.
RS : 그러면 증명에서 식만 있으면 되지 나머지 말은 필요 없는 것 아니니?
S2 : 음… m과 n은 자연수라는 말은 필요할 것 같네요.
RS : 왜?
S2 : 만약에 m과 n을 무리수로 두면 식이 이상해 질 것 같은데요.,
RS : 무리수로 두면 어떻게 되는데?
S2 : 음… 식을 정리하는데 불편해 질 것 같아요. π같은 수로 두면 식을 전개할 수가 없어요.
RS : 왜 그렇게 생각하지?
S2 : 3.141592…라 두면 인수분해 하는데 큰 어려움이 따를 것 같아요.
RS : 그럼 나머지 말은 필요한 거니 아니니?
S2 : 필요 없는 것 같아요.
RS : 왜?
S2 : m과 n은 자연수라는 것과 이 식 (3m+3n=3(m+n))만 있어도 증명이 되니까요.

S2는 대수식과 대수식에 사용된 문자 m, n을 위한 조건 이외에는 증명에 불필요한 요소라고 이해하고 있었다. 연구자는 '임의의 3의 배수는 $3m$, $3n$으로 나타낼 수 있다'는 증명의 두 번째 문장이 왜 불필요한 것으로 인식하는지를 알아보고자 하였다.

RS : 두 번째 문장은 필요 없는 거니?
S2 : 예.
RS : 두 번째 문장은 무슨 말이니?
S2 : 임의의 자연수를 3의 배수로 나타낸 것이에요.
RS : 좀 더 자세히 이야기해 줄 수 있겠니?
S2 : 그러니까 m과 n을 자연수로 두고 3의 배수니까 3을 곱한 거에요.
RS : 그게 무슨 말이니?
S2 : m과 n을 2로 두어 곱하면 둘 다 6이잖아요. 두 개는 모두 3의 배수니까 $3m$과 $3n$으로 나타낼 수 있다는 거예요.
RS : 그런데 이게 왜 필요 없는 거니?
S2 : 음… 3의 배수도 되고 4의 배수도 되고, 5의 배수도 되고, $3m$, $3n$으로 나타낼 필요는 없을 것 같아요.
RS : 그게 무슨 말이니?
S2 : 3의 배수는 $3m$과 $3n$이니까 4의 배수는 $4m$과 $4n$으로 나타낼 수 있어요.

S2는 증명의 두 번째 문장을 잘 이해하고 있었으며, 그것이 필요 없는 이유는 3의 배수를 $3n$으로 나타낼 수 있다는 것이 별 의미가 없다는 생각 때문인 것으로 보인다. 이후 연구자는 S2의 증명관을 확인해 보고자 하였다.

RS : 너는 증명이 뭐라고 생각하니?
S2 : 어떤 정리를 풀어나가는 거요.
RS : 그게 무슨 말이야?
S2 : 그 정리를 합리적이게 하기 위해 증명하는 거예요.
RS : '합리적'이라는 말은 무슨 말이니?
S2 : 그 정리에 모순이 생기지 않기 위해 증명을 해요.
RS : 그게 무슨 말이니?
S2 : 인수분해가 모순이 생기면 안 되니까 이것을 합당하게 풀어가는 게 증명이죠.
RS : 좀 더 자세히 이야기해 줄 수 있겠니?
S2 : 만약에 인수분해를 했는데, 식을 제대로 풀었는데 답이 이상하게 나오면 인수분해가 잘못된 공식, 인수분해의 모순이에요.
RS : 그러면 식만 바르면 증명이 된 거니?
S2 : 그 식에 모순이 없기 때문에 증명이 된 거죠.
RS : 그럼 식이 없으면 증명이 아니겠네?

S2 : 증명을 하기 위해 식이 필요한 건데 식이 없다는 것 자체가 말이 안돼요.
RS : 왜 말이 안 되지?
S2 : 수학에서 식이 있어야 증명을 할 수 있으니까요.

S2는 증명이란 식이 있어야 하며, 그 식이 모순이 없다면 곧 증명은 타당한 증명이라는 생각을 갖고 있음을 알 수 있다. 증명에서 가장 중요한 것이 식이며, 이 식의 무모순성이 곧 증명의 타당성을 보증한다는 생각을 보여준다.

나. 증명 수행과 이해 사이에서 문자식 해석의 괴리 : S3의 사례

S3는 주어진 증명이 분배법칙에 관한 증명이며, 그 이유는 중학교 2학년 때 학습한 분배법칙이 참이라는 것을 배워서 그렇게 생각한다고 답하였다. 그리고 '임의의'라는 용어를 '아무거나'로 설명하였으며, 이는 S3의 반응이 용어상의 오해로부터 빚어진 오류가 아님을 보여준다.

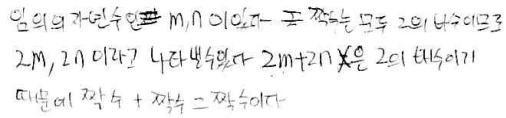
RS : 증명에서 식이 가장 중요한 거니?
S3 : 예.
RS : 왜 그렇게 생각하니?
S3 : 이 말 빼고 식만으로 증명할 수 있으니까요.
RS : 그럼 식 이외의 말은 왜 넣어 놓은 거니?
S3 : 좀 더 이 증명을 확실하게 설명하기 위해 적어놓은 거예요.
RS : 무슨 말이야?
S3 : 식으로만 나타내져 있으면 m, n은 임의의 자연수라는 것을 알 수 없으니까 m, n을 이 증명에서 원하는 데로 제한하고 구체적으로 설명하는 거죠.
RS : 그럼 식 앞에 있는 두 문장은 필요 없는 거니?
S3 : 예, 없어도 상관없다고 생각해요.

S3 역시 증명에서 식이 가장 중요하며, 이 식의 변수를 제한하는 말 외의 문맥은 불필요한 것으로 인식하고 있었다. 이후 연구자는 S3의 증명관을 확인해 보고자 하였다.

RS : 증명이 뭐라고 생각하니?
S3 : 그 명제를 모르는 사람에게 설명하기 위한 수단이에요.
RS : 좀 더 자세히 설명해 줄 수 있겠니?
S3 : 결론에 분배법칙이라는 것을 아는 사람은 증명이 필요 없고 그것을 모르는 사람에게는 이 명제를 이해하고 때로는 응용할 수 있게 설명해 주는 거예요.

S3는 증명은 모르는 사람을 위한 설명 수단이며, 아는 사람에게는 증명이 필요 없는 것이라는 증명관을 가지고 있었다. 그러나 이것만으로는 S3의 인식을 이해하기 어려워 연구자는 구체적인 명제를 제안하여 그가 어떻게 증명하는지 관찰하였다([그림 IV-1]).

RS : 짝수 더하기 짝수는 짝수니?
S3 : 예.
RS : 그것을 증명해 보겠니?



[그림 IV-1] S3의 '두 짝수의 합은 짝수'에 대한 증명

S3의 증명에 대한 인식을 보다 자세히 알아보고자 연구자는 질문을 이어갔다.

RS : 증명에서 식이 가장 중요하다고 했는데 네가 중요하다고 보는 식이 어디 있니?
S3 : '$2m+2n$은 2의 배수'요.
RS : 나머지 말은 왜 썼니?
S3 : 굳이 쓰지 않아도 되지만, 모르는 사람을 위해 필요하기 때문에 적었어요.

RS : 너의 증명에서 $2m+2n$은 왜 2의 배수이니?
S3 : 어떤 두 자연수에 2를 곱해서 더해도 2의 배수가 되니까요.
RS : 그렇게 하면 왜 2의 배수가 되니?
S3 : 대입을 해봤을 때 어떤 수를 넣어도 2의 배수가 되기 때문이에요.
RS : 만약 안 되는 수가 있으면 어쩌지?
S3 : 그 때는 제가 틀렸으니까 다른 증명을 찾아야죠.
RS : 그럼 네가 몇 개 대입해보고 옳다는 것을 어떻게 확신할 수 있니?
S3 : 자연수는 그런 특성이 있어요.

S3의 증명은 '$2m+2n$은 2의 배수이다'라는 부분을 몇 가지 수를 대입한 결과에 근거한 특수 경우에 국한하여 도출하였으므로, 일반성을 결여하고 있다. 증명의 일반성을 확보하기 위해서는 일반적 식의 대수적 조작이 필요하므로 이 점을 다음과 같이 일깨워주었다.

RS : '$2m+2n$은 2의 배수'라는 것을 대입하지 않고 보일 수는 없니?
S3 : 음… 아! 분배법칙을 사용해서 $2\times(m+n)$ 그러면 참이 되요.
RS : 왜?
S3 : 짝수는 2의 배수이니까 이 두 수(m과 n)를 더하면 결국 어떤 한 자연수가 되잖아요. 거기서 2를 곱하면 짝수가 되요.

S3는 분배법칙을 이용하여 일반적인 증명에 성공하였으며, 이 증명 패턴이 검사문항의 증명 패턴과 흡사하여, 연구자는 이제 S3가 검사문항의 증명이 무엇에 관한 증명인지를 명확히 알 것이라고 생각하였다.

RS : (검사문항을 가리키며) 저 증명이 아직도 분배법칙에 관한 증명이라고 생각하니?
S3 : 생각이 바뀌었어요.
RS : 분배법칙도 되지만 짝수 더하기 짝수가 짝수임을 설명할 때, 똑같은 식으로 $2m+2n=2(m+n)$이라고 했잖아요. 거기서 2의 배수를 찾아냈잖아요. 똑같이 3의 배수를 구하는 공식이라고 할 수 있을 것 같아요.
S3 : '3의 배수를 찾는 공식'은 무슨 말이니?
RS : $3\times(m+n)$은 3의 배수가 되잖아요. 아! 잘못 말했어요.

S3는 드디어 대수식이 3의 배수의 맥락을 갖는 식임을 인식하기에 이르렀다. 그러나 이어지는 대화는 대수식의 해석이 쉬운 일이 아님을 분명히 보여준다.

S3 : '$3m+3n$은 3의 배수'를 증명한 거예요.
RS : 왜?
S3 : 어떤 자연수에 3을 곱하면 3의 배수가 되기 때문이에요.
RS : 그럼 $3n$, 이것도 3의 배수 아니니?
S3 : 네. 그렇죠.
RS : 그러면 결론은?
S3 : $3m+3n$은 3의 배수이다.

놀랍게도 S3는 앞에서 $3(m+n)$을 3의 배수로 해석하였지만, $3m+3n$에 대해서는 $3n$이 3의 배수라고 일러주어도 그 맥락에서 해석하려 들지 않았다. 이에 연구자는 검사문항의 증명이 '두 3의 배수의 합이 3의 배수임'을 증명하는 것이라고 일러주자 탄식하였다.

RS : 왜 이렇게 생각 못했니?
S3 : 문제를 확실하게 보지 않은 것과 어… 중학교 과정에서 이런 식을 배우니까 이걸 보면 분배법칙 밖에 떠오르지 않았어요.
RS : 여기서 '$3m+3n$'은 3의 배수의 합이라고 생각 못했지?
S3 : 예. 그렇게 생각하지 못했어요.
RS : 왜 그랬다고 생각하니?
S3 : $3m$, $3n$을 확실하게 생각하지 않고 그저 $3(m+n)$을 증명하기 위한 일종의 미지수라고 생각했어요.

이상의 사실로부터 S3는 $3n$이라는 표현이 3의 배수임을 알고 있음에도 불구하고, $3m+3n=3(m+n)$을 3의 배수의 합과 관련한 맥락으로 해석하지 못하였다. 더욱이 우변의 식은 3의 배수의 맥락으로 해석하였지만, 좌변은 우변을 구하기 위한 절차 속에 있는 하나의 부수적인 과정으로 인식함으로써 대수 맥락을 의미론적으로 해석하지 못하였다. 이것은 대수식의 의미 해석의 어려움을 단적으로 보여주는 부분이다.

V. 논 의

16세기 말경 대수 기호가 발달하기 이전에도 대수적 계산은 있었고 당시는 기호 없이 일상어를 사용한 것이었다(Radford & Puig, 2007). 은유적으로 몇 개의 특정 단어가 대수의 용어로 선택되는 단계를 거친 후 대수 기호가 출현함으로써 명료성과 간편성을 증가시키고 그 조작의 용이성은 수학의 역사에서 획기적인 발달을 유도한 것이 사실이다. 한편, 대수의 교수·학습과 관련한 수학교육적 관점에서 대수 기호는 수학 학습을 보다 어렵게 만든 하나의 요인으로 작용할 수 있다. 기호의 출현은 대수 증명을 더욱 추상화시켰고, 그로 인해 증명을 그 맥락과 동떨어진 식의 조작으로 인식하도록 함으로써 식이 포함된 문맥의 의미를 파악하기 어렵게 만드는 부작용을 초래하게 된 것이다.

본 연구에서는 이러한 문제점에 대한 인식으로부터 출발하여 중학교 3학년 학생들을 대상으로 두 3의 배수의 합은 3의 배수라는 명제에 대한 증명에 포함된 문자식의 의미를 적절하게 파악할 수 있는가를 조사하고자 하였다. 그 결과, 증명에 포함된 식 $3m+3n=3(m+n)$으로부터 두 3의 배수의 합 역시 3의 배수가 된다는 의미 대신 반 이상의 학생들이 식 자체가 함의하는 분배법칙에 초점을 맞추는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 두 가지로 설명될 수 있는데, 하나는 대수 증명에서 증명의 의미와 맥락을 파악하지 못하고 문자식에만 초점을 두고 파악한다는 점이며, 다른 하나는 식을 구조적으로 보지 못하고 절차적으로 파악한다는 사실이다. 후자는 대수적 관점과 산술적 관점의 대조라고 할 수 있으며(van Amerom, 2003), 따라서 연구 참여자들은 아직 완전히 대수적 관점을 취하지 못한 것으로 간주될 수 있다. 주어진 대수 증명이 무엇에 대한 증명인지를 파악하는 문제에서 학생들은 증명의 맥락을 고려하지 못하였으며, 식 자체에만 의존하여 무엇에 대한 증명인지를 찾으려는 경향이 있음을 보여주었다.

한편, 연구 참여자 중 증명의 문맥을 고려하지 못한 응답을 한 3명을 대상으로 개별 면담을 실시함으로써, 다음과 같은 인지적 특성을 파악할 수 있었다.

첫째, 이들은 대수식이 성립한다는 사실에 초점을 두고 대수식의 항등성을 확인하는 과정이 곧 증명이라는 증명관을 가지고 있었다. 특히 S1, S2에게서 관찰된 특징으로, 중학교 2학년 '도형의 성질' 단원에 처음으로 등장하는 증명의 의미를 배웠음에도 불구하고 그릇된 증명관을 지닌 사례이다. 증명은 '어떤 명제의 가정과 이미 알고 있는 정의나 성질을 근거로 하여 그 명제가 참임을 밝히는 과정'이라고 명시적으로 제시되어 있지만, 연구 참여자들은 대수식으로 나타낸 법칙을 증명의 근거로서 인식하기보다 그것을 곧 증명할 대상으로 인식한 것이다. 중학교 증명의 대다수가 기하 영역의 명제 위주로 이루어져 대수 증명에 익숙하지 못한 것이 하나의 원인으로 생각된다.

둘째, 대수식에 초점을 두고 증명의 문맥을 보지 않는 것은 대수식 이외의 나머지 요소는 불

필요하다는 인식 때문이었다. 이는 S1, S2, S3 모두에게서 관찰된 특징이다. S1은 대수식 이외의 것은 증명의 이해를 돕는 요소로서 제시되었을 뿐이지 본질적인 것은 아니고 따라서 불필요한 것으로 인식하고 있었다. S2와 S3 역시 대수식과 대수식에 사용된 문자의 제한 조건 이외에는 불필요한 것으로 인식하고 있었다. 이와 같은 특징은 그들이 가진 증명관과 무관하지 않은 결과로 보인다. S1과 S2는 대수식의 항등성 확인이 곧 증명이라고 이해했기 때문에, 증명에서 대수식만 제시되면 되는 것이지 그 외의 것은 불필요한 것이라고 생각하였다. 또한 S3는 명제를 모르는 사람에게 설명하기 위한 수단이 곧 증명이라고 생각했으며, 대수식 이외의 것은 증명의 대상인 분배법칙을 모르는 사람들에게 설명하기 위한 수단으로 제시된 것이지 실제로는 불필요한 것으로 인식하였다.

셋째, 연구 참여자들은 대수식의 의미 해석에 주목하지 못하고, 대수식이 함의하는 법칙에만 주목하였다. 검사 문항의 둘째 문장은 $3m$, $3n$을 3의 배수로 해석해야 함을 명시하는 것이지만, 이를 인식하지 못하고 이 문장을 오히려 불필요한 것으로 인식하였다. 증명의 문맥상 분배법칙은 증명을 위해 이용해야할 성질이자 근거이지 대수 증명의 대상이 될 수 없고 대수식 자체가 공통인수 3을 묶어내는 분배법칙의 과정을 함의하므로 공통인수 3을 추출하는 과정이 대수식의 성립을 보장하는 이유가 될 수 없음에도 불구하고, S1은 3을 묶는다는 이유를 들어 주어진 증명이 분배법칙을 증명하는 것이라고 생각하고 있었다.

넷째, 증명의 수행과 이해 사이에서 대수식 해석의 괴리가 있었다. S3는 '두 짝수의 합은 짝수임'을 보이는 과정에서 비록 연구자의 도움이 있기는 하였지만, $2m+2n=2(m+n)$이라는 대수식을 사용하여 증명을 완성할 수 있었다. 이로 인해 검사문항에 포함된 $3m+3n=3(m+n)$에 대해서도 올바른 해석을 할 수 있을 것으로 기대하였다. 그러나 연구자의 기대와는 다르게, 대수식 $3m+3n=3(m+n)$에 대해서는 3의 배수를 만드는 공식으로 이해하였다. 이는 좌변의 식 $3m+3n$은 해석하지 않고, 우변의 $3(m+n)$만 3의 배수로 해석한 결과이다. 이것은 증명의 수행이 반드시 그 이해를 보장하는 것은 아님을 시사한다.

다섯째, 증명에서 나타나는 대수식을 어떤 관점으로 이해하는지에 따라 증명의 해석이 달라질 수 있었다. 이를테면 대수 증명에서 대수 조작이 항등 관계로 이해되는지, 조작 대상으로 이해되는지에 따라 증명에 대한 해석이 달라질 수 있다. 본 연구에서 S1과 S2는 대수식을 항등 관계로만 이해하고 있었기 때문에, 증명을 구성하고 있는 나머지 말들을 불필요한 요소로 인식하였던 것이다. 따라서 증명에 나타난 대수식을 어떤 관점에서 이해하는지는 대수 증명 이해에 중요한 요소임을 알 수 있다.

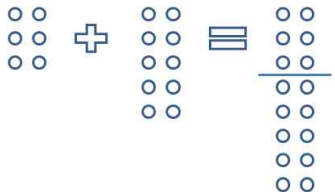
검사 문항이나 면담 대상의 수적 부족으로 인해 연구 결과의 일반화와 관련하여 본 연구가 지닌 한계점에도 불구하고, 연구 참여자들이 보인 인지적 특징에 대한 논의를 바탕으로 다음과 같은 교수학적 시사점을 도출하는 것은 의미 있는 일일 것이다.

첫째, 증명 교육에는 올바른 증명관 수립을 위한 이해가 수반되어야 할 것이다. 3명의 연구 참여자는 모두 대수 증명에 대하여 잘못 인식하고 있었으며, 이는 대수식 외의 문맥에 주목하지 못하는 오류로 이어졌다. 따라서 대수 증명 지도시 대수 증명을 어떻게 보아야 하는지, 대수 증명에 사용되는 대수 법칙은 어떤 역할을 하는 것인지, 대수 증명에서 대수가 갖는 이점은 무엇인지 등을 논의하는 기회가 제공될 필요가 있으며, 이를 통해 대수 증명에 대한 올바른 태도를 형성하는

것은 대수 증명 교육의 중요 부분일 것이다.

둘째, 대수 증명에서 대수식이 아닌 문맥에 대한 이해를 강화하는 교육이 수반되어야 한다. 증명에서 대수식 이외의 요소는 불필요한 요소라고 인식하고 있었음을 주목할 때, 증명에서 대수식 이외의 문구가 어떤 가치를 지닌 것인지를 논의하는 기회가 제공되어야 할 것이다. 이를 통해 대수식 이외의 문맥이 증명에서 지닌 역할을 이해할 수 있어야 하며, 궁극적으로 증명은 단순한 대수 조작이 아닌, 논리성을 갖춘 문맥임을 이해할 수 있어야 한다.

셋째, 대수식의 의미 해석을 돕는 교수·학습 활동이 병행되어야 할 것이다. 중학 수학에서 문자가 도입됨으로써 대수식 및 그 조작을 학습하게 된다. 그런데 대수에서 방정식이 차지하는 비중이 크기 때문에, 대수는 방정식과 직결되는 것으로 이해되고 해를 구하기 위한 식의 조작에 치우쳐 그 조작이 갖는 의미 해석은 부차적인 것이 되는 경향이 있다. 이에 반하는 교수·학습 활동으로 대수식을 시각적 표현과 연결 짓는 것을 제안할 수 있다. Mason & Pimm(1984)은 '두 짝수의 합이 짝수임'을 보이는 과정에서 대수식 이해의 어려움을 시각적 표현을 통해 감소시킬 수 있음을 제안하고 있다. 이를테면, $2m+2n=2(m+n)$의 대수적 조작을 [그림 V-1]과 같은 시각적 표현을 이용하여 의미 충실한 조작으로 이해하는 것이다.



[그림 V-1] 시각적 표현을 이용한 대수식의 의미 이해

넷째, S3의 사례에서 보았듯, 증명 수행이 곧 증명 이해로 이어지는 것은 아니므로, 증명 수행과 별도로 주어진 증명을 이해할 수 있는 별도의 기회가 제공되어야 한다. 증명의 수행에 못지않게 주어진 증명을 이해하는 능력 또한 중요함에도 불구하고 전자가 반드시 후자로 전이되는 것은 아니다. 따라서 증명 수행과는 별도로 주어진 증명의 이해에 대한 경험을 제공할 필요가 있다. 어떤 명제에 대한 증명을 제시하고, '이 증명은 무엇을 증명하고자 하는 것인가?', '이 증명은 타당한가?', '왜 타당한가?' 등을 토론하는 기회의 제공은 한 가지 방법일 수 있다.

다섯째, 증명의 맥락 속에서 대수식을 어떻게 이해해야 하는지를 지도해 주어야 할 것이다. 본 연구의 검사 문항의 증명에서 대수식은 대수식의 법칙에 의거해 증명하고자 하는 바를 성취해 가야 하는 근거로 역할하며, 증명 대상이 아니다. 또한 대수 조작은 항등적 개념으로 이해되어야 하는 것이 아니라, 조작적 개념으로 이해되는 것이 바람직하다. 즉, $3m+3n$꼴의 대수식은 언제든지 $3(m+n)$으로 변형될 수 있는 조작의 맥락으로 이해되어야 한다. 그러나 S1, S2는 이들을 조작의 맥락이 아닌 항등적 개념으로 이해하고 있었다. 이런 점을 고려할 때, 대수 법칙을 증명의 대상이 아닌 증명의 근거로서 인식할 수 있는 안목을 길러주는 것이 필요하다. 이를 통해 궁극적으로 대수가 갖는 위력을 인식하는 계기가 되어야 할 것이다.

참고문헌

강정기, 장혜원(2014). 대수 증명에서 종속적 일반성의 인식 및 특정수 전이에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>. 53**(1), 93-110

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**(교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8])

박지혜(2010). **중학교 2학년 기하 증명에 대한 읽기 이해 능력 실태 조사**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

우정호・박교식・이종희・박경미・김남희・임재훈・남진영・권석일・김진환・강현영・조차미・허선희・전지영・고현주・이정연・최은자・김준식(2013). **중학교 수학 1**. 서울: 두산동아.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2009a) **중학교 수학 3**. 서울: 천재교육.

이준열・최부림・김동재・송영준・윤상호・황선미(2009b) **중학교 수학 익힘책 3**. 서울: 천재교육.

이진경(2013). **중등기하 증명의 이해에 관한 연구: 중학교 2학년 도형 단원을 중심으로**. 숙명여자대학교 교육대학원 석사학위논문

이화영・장경윤(2010). 조기 대수(Early Algebra)의 연구 동향과 접근에 관한 고찰. **대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 20**(3), 275-292

조지영, 권오남(2012). 대학생들의 증명 구성 방식과 개념 이해에 대한 분석 -부분 공간에 대한 증명 과정을 중심으로-. **대한수학교육학회지 <학교수학>, 14**(4), 469-493

Easdown, D.(2009). Syntactic and semantic reasoning in mathematics teaching and learning, *International journal of mathematics education in science and technology, 40*(7), 941-949

Inglis, M. & Alcock, L.(2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for research in mathematics education, 43*(4), 358-390

Katz, V.J.(2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational studies in mathematics 66*, 185-201

Lin, F., Yang, K, & Chen, C.(2004). The features and relationships of reasoning, proving and understanding proof in number patterns, *International journal of science and mathematics education* 2: 227-256

Mason, J. & Pimm, D.(1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational studies in mathematics, 15*, 227-289.

Radford, L. & Puig, L.(2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational studies in mathematics 66*, 145-164

Selden, A., & Selden, J.(2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for research in mathematics education, 34*(1), 4-36

Senk, S.L.(1985). How well do students write geometry proofs? *The mathematics teacher, 78*(6), 448-456

Usiskin, Z.(1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.), The Ideas of Algebra, K-12, pp.8-19. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

van Amerom, B.A.(2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational studies in mathematics*. 54: 63-75

Weber, K.(2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics*. 48: 101-119

Weber, K. & Alcock, L.(2004). Semantic and syntactic proof productions, *Educational studies in mathematics, 56*, 209-234

Understanding of Algebraic Proofs Including Literal Expressions: Expressions or Contexts?

Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)
Kang, Jeong Gi (Namsan Middle School)

Students' difficulties and errors in relation to mathematical proofs are worth while to say one of the dilemmas in mathematics education. The potential elements of their difficulty are scattered over the process of proving in geometry as well as algebra. This study aims to investigate whether middle school students understand the context of algebraic proof including literal expressions. We applied 24 third-grade middle school students a test item which shows a proof including a literal expression and missing the conclusion. Over the half of them responded wrong answers based on only the literal expression without considering its context. Three of them were interviewed individually to show their thinking. As a result, we could find some characteristics of their thinking including the perspective on proof as checking the validity of algebraic expression and the gap between proving and understanding of proof etc. From these, we also discussed about several didactical implications.

* Key Words : algebraic proof(대수 증명), understanding of proof(증명 이해), literal expression(문자식), proof context(증명 문맥), middle school mathematics(중학교 수학)

논문접수 : 2014. 6. 20
논문수정 : 2014. 7. 4
심사완료 : 2014. 7. 7