대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 3, 311 ~ 331. Aug 2014

정의 없이 정의 가르치기[1]: 예비교사는 어떻게 자신이 배웠던 방식과 다르게 가르칠 수 있는가?[2]

이 지 현*

예비교사들의 정의에 대한 도구적인 교수학적 내용지식을 관계적인 교수학적 내용지식으로 변화하도록 하기 위하여, Kinach의 인지전략을 반영한 교수과제를 단계적으로 제시하였다. 연구자는 먼저 예비교사들이 '정의'와 '정의를 가르친다는 것'을 어떻게 이해하는지를 확인하였으며, 예비교사들의 통념에 도전함으로서 정의의 재발명이라는 새로운 교수방법을 포용할 수 있는 동인을 부여하였다. 예비교사의 PCK '성장' 과정은, 정의의 교수법에 대한 백지상태의 PCK를 수학교육이론으로 채우는 것이 아니라, 도구적 PCK를 확인하고 도전하며 변화 및 확장하였던 정반합(正反合)적 과정이었다. 이와 같은 사례는 교사의 지식 성장과 교사교육의 방법론에 대한 새로운 방향을 모색하는 데 기여할 수 있을 것이다.

Ⅰ. 서 론

Freudenthal(1973: 402)은 기하교육의 실패 원인이 학생들에게 완성된 연역 체계를 그대로 부과하였기 때문이라고 보았다. Freudenthal(1971)는 그 대안으로 연역은 재발명의 방법으로 지도해야 한다고 주장하였다. 예를 들어 도형의 정의도 처음부터 완성된 정의를 용어에 대한 약속으로 제시하는 것이 아니라, 도형의 여러 성질을 연역적으로 조직하면서 이 중 어떤 성질이 다른 성질을 끌어내는 기본 성질이 될 수 있는지를 발견하고 이러한 기본 성질을 정의로 선택하는 정의의 재발명으로 가르쳐야 한다고 주장하였다.

서동엽(1998), 이호철(2007)등의 연구에 의하면, 정의를 이용하여 도형의 성질에 대한 증명까지 배운 중학생들도 정의를 정확하게 서술하지 못하며, 도형의 정의와 성질을 매우 혼동한다. 이들 연구자들이 보고하는 도형 정의 서술의 오류는, 많은 학생들이 도형을 왜 그렇게 정의하는지, 또 정의가 어떤 의미가 있는지에 대해서는 거의 이해하지 못한 도구적 이해 수준에 머무르고 있음을 보여준다. 이와 같은 도구적 이해는 도형의 정의를 처음부터 약속으로 도입하는 전통적인 정의

---

* 인천대학교, leeji_hyun@naver.com.

1) 역설처럼 보이는 이 제목은 연구자가 교사교육자로서 예비교사들에게 가르치고 싶었던 목표였으며, 다음과 같은 두 가지 의미를 담고 있다. 첫 번째 의미는, 처음부터 완성된 정의 없이 정의의 재발명을 가르치자는 Freudenthal의 취지를 대변한 것이었다. 한편, 이것은 '정의' 및 '증명'이라는 용어가 삭제된 2009 개정교육과정에서 '정의' 없이 중학교 기하를 가르쳐야 하는 상황을 표현하기도 한다.

2) 이 논문은 2014년도 인천대학교 교내연구비에 의하여 연구되었으며, 이 논문의 초고는 대한수학교육학 회 제45회 수학교육학 연구논문 발표대회에서 발표되었음.

교수 관행과 무관하다고 보기는 어렵다.

도형의 정의를 일방적으로 선언하는 기하교육의 문제점과 또 그 대안으로서 정의의 재발명에 관한 Freudenthal의 주장은 비교적 잘 알려져 있다. 예를 들어 2009 개정교육과정의 교수학습방법 ‘사’항은 다음과 같이 Freudenthal의 주장을 반영하고 있다.

> (4) 수학 개념이나 용어의 정의를 직접적으로 제시하기보다 학생 스스로 개념과 용어의 필요성을 인식하고 정의해 보게 한다(교육과학기술부, 2011: 34).

하지만 전통적 교육방식에 젖어있는 대부분의 수학교사에게 정의의 재발명이라는 교수학습방법은 매우 낯선 것이다. 이지현(2013a)의 연구에서, 주입식 정의 교육의 문제점에 공감하는 교사도 정의를 그 어떤 용어에 대한 언어적 약속이라고만 생각하여 정의의 재발명이 왜 필요한지를 충분히 수용할 수 없었다. 또 어떤 교사는 자신이 알고 있는 도형 정의만을 유일한 옳은 정의라고 고집하여, 연역적 조직화를 통하여 논리적으로 대등한 정의를 선택할 수 있음을 함의하는 Freudenthal의 관점을 수용하는 데 혼란을 겪기도 하였다. 이지현(2013a)의 사례연구는 수학교사 역시 학생들과 마찬가지로 정의에 대한 도구적 이해의 문제에서 자유롭지 않을 수 있으며, 정의에 대한 관계적 이해를 지향하는 교수이론을 소개하는 것만으로는 교사들의 교수관행을 변화시키기 어렵다는 점을 보여주고 있다.

예비수학교사들의 교수학적 내용지식에서 학창시절 학교수학을 공부한 경험은 큰 비중을 차지한다. Ball(1990)은 예비교사들에게 초중고에서의 교육경험이 수학교육에 대한 전통적이고 통상적인 견해를 무의식적으로 습득하는 일종의 도제경험으로 작용함을 지적하였다. 따라서 교사교육과정에 처음 입문한 예비교사라 할지라도 전통적인 수학교사로서의 자신을 상상하는 데에는 별다른 어려움을 겪지 않는다. 그러나 학교수학에서의 도구적 학습경험은 예비교사들이 자신이 배웠던 방식과 다른 관계적 이해를 지향하는 교수학습 방법을 수용하는 데 방해 요인으로 작용한다.

Kinach(2002)은 예비교사의 교수학적 내용지식(pedagogical content knowledge : 이하 PCK)의 성장을, 도구적 교수학적 내용지식(instrumental pedagogical content knowledge : PCKi)에서 관계적 교수학적 내용지식(relational pedagogical content knowledge : PCKr)으로의 변화로 개념화하였다. Kinach(2002)는 수학교육방법론 강의에서 이와 같은 PCK 성장을 안내할 수 있는 인지전략을 단계적으로 적용함으로서, 예비교사교육에서 관계적 교수학적 내용지식의 성장이 어떻게 가능할 수 있는가를 구체적으로 논의하였다.

연구자가 예비교사들을 대상으로 실시한 교수실험역시 Kinach(2002)의 시도와 마찬가지로, 정의에 대한 도구적인 교수학적 내용지식에서 관계적인 교수학적 내용지식으로의 변화를 위한 것으로서, 구체적으로 ‘수학에서 정의란 무엇이며, 정의를 어떻게 가르쳐야 하는가?’에 대한 예비교사들의 고정관념에 도전하기 위하여 Kinach (2002)의 인지전략을 반영한 교수과제를 단계적으로 제시하였다. 이 연구는 위와 같이 진행된 교수실험과정에서 예비교사의 반응 변화 및 교사교육자와의 상호작용을 다음의 연구문제들을 중심으로 기술 및 분석함으로서, 예비교사들의 정의에 대한 PCK의 변화과정을 살펴보는 것을 목적으로 하고 있다.

[1]①정의에 대한 교수내용지식
(subject matter knowledge: 이하 SMK)
예비교사들은 정의를 어떻게 이해하고 있었는가?
②정의에 대한 교수학적 내용지식
(pedagogical content knowledge: 이하 PCK)

예비교사들은 ‘정의를 가르친다’는 것을 어떻게 인식하였는가?

[2]예비교사들의 정의와 정의를 가르친다는 것에 대한 인식을 변화시키기 위해 필요했던 교수 전략은 무엇이었는가?

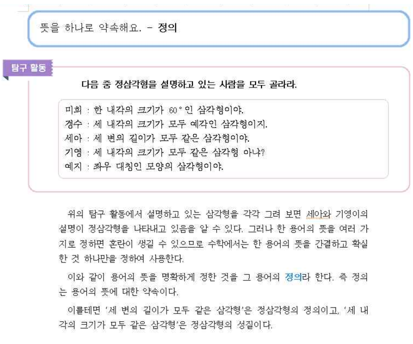
[3]정의와 정의를 설명한다는 것에 대한 예비교사들의 인식 변화는 무엇인가? 예비교사들이 정의를 가르치는 방법을 어떻게 배울 수 있는가?

이상과 같은 연구문제에 대한 탐색은, 학교수학에서 정의교육의 문제점뿐만 아니라 ‘예비교사의 PCK 성장이란 무엇인가?’ 또 ‘이러한 성장을 위해 교사교육자는 무엇을 또 어떻게 가르쳐야 할 것인가?’와 같은 예비수학교사교육의 문제에 대하여 구체적인 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. ‘완성된’ 수학과 ‘발생 중’ 수학에서의 ‘정의’

2007 개정 교육과정까지 우리나라 교과서에서는 ‘정의’ 라는 용어를 중학교 수학 2의 논증기하에서 도입하였다. 다음 정삼각형의 정의 상황([그림 Ⅱ-1])은 많은 중학교 2학년 교과서에서 정의 개념을 설명하기 위한 예로 등장한다.


뜻을 하나로 약속해요. - **정의**

탐구 활동

다음 중 정삼각형을 설명하고 있는 사람을 모두 골라라.

미희 : 한 내각의 크기가 60°인 삼각형이야.
경수 : 세 내각의 크기가 모두 예각인 삼각형이지.
세아 : 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형이야.
기영 : 세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형 아냐?
예지 : 좌우 대칭인 모양의 삼각형이야.

위의 탐구 활동에서 설명하고 있는 삼각형을 각각 그려 보면 세아와 기영이의 설명이 정삼각형을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나 한 용어의 뜻을 여러 가지로 정하면 혼란이 생길 수 있으므로 수학에서는 한 용어의 뜻을 간결하고 확실한 것 하나만을 정하여 사용한다.

이와 같이 용어의 뜻을 명확하게 정한 것을 그 용어의 정의라 한다. 즉 정의는 용어의 뜻에 대한 약속이다.

이를테면 ‘세 변의 길이가 모두 같은 삼각형’은 정삼각형의 정의이고, ‘세 내각의 크기가 모두 같은 삼각형’은 정삼각형의 성질이다.

[그림 Ⅱ-1] 중학교 교과서의 정의
(박영훈 외, 2011: 189)

중학교 교과서에서는 정삼각형에 대한 학생들의 여러 설명 중 삼각형의 세 변 혹은 세 각이 같으면 정삼각형이지만, ‘용어의 뜻을 제각기 다르게 정하여 사용하면 혼란이 생길 수 있으므로’ 정삼각형의 뜻을 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형으로 약속하며, 이때 세 각의 크기가 같다는 것은 성질이 된다는 것을 [그림 Ⅱ-1]과 같이 설명한다. 그러나 이와 같은 설명이 ‘도형을 다른 성질로 정의하면 안 되는가?’, 또 ‘도형의 성질 중 정의를 어떻게 구별하는가?’와 같은 학생들의 의문에 대한 대답이 된다고 보기는 어렵다(이지현, 2013b). 결국 이와 같은 의문에 대한 대답 없이 정삼각형의 뜻을 뭐라고 정할지 친구들과 합의한다는 상황은, 중학교 교과서에서 다루는 ‘정의’ 도 초등학교 수학에서 일상용어로 다룬 ‘약속’과 크게 다르지 않음을 보여주고 있다. 위와 같이 우리 중학교 교과서에서는 정의를 “용어나 기호의 뜻을 명확하게 하나로 정하여 나타낸 것”으로 일상적인 정의와 별 다른 차이 없이 설명하고 있다. 그러나《Geometry seeing, doing, understanding》과 같은 미국교과서에서는 정의는 조건명제로 표현하면 원 명제뿐 아니라 그 역도 성립하는 필요충분조건임을 설명하기도 한다 (Jacobs, 2003: 46-47).

Freudenthal(1971)은 수학에서의 ‘정의’는 용어의 의미에 대한 단순한 약속 이상의 연역적 사슬의 연결고리라고 하였다. 그는 수학적 정의의 의미를 위와 같은 교과서에서의 ‘정의’에 대한 정의에서가 아니라, 도형의 여러 성질을 논리적으로 조직화하는 과정을 통하여 도형의 정의를 찾는 과정에서 배울 수 있다고 주장하였다. 특히 연역적 사슬의 연결고리로서 수학적 정의는 최소성, 임의성이라는 특징을 보유하고 있다. 정의의 최소성이란, 수학적 정의는 그 개념을 결정하는 최소한의 정보만을 가지고 있으면 충분하며 불필요한 정보는 포함하지 않는 속성이다

(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992). 또 수학에서는 어떤 개념에 관한 동치 명제 혹은 필요충분조건이 여러 개 존재할 수 있으며, 수학적 정의는 이러한 동치명제 중 임의로 어느 한 명제를 그 개념의 정의로 선택할 수 있다는 의미에서 임의적이다(Linchevsky, Vinner, Karsenty, 1992). 한편 수학적 정의의 임의성은, 정의와 정리(성질)의 지위가 고정된 혹은 절대적인 것이 아니며 상호 교환될 수 있음을 함의한다. 연역적 조직화에 의한 정의의 선택 과정에서, 학생들은 자연스럽게 도형의 정의는 '얼마나 많은 성질을 포함해야 하는가? 왜 이 성질만 포함하면 되는가? 이것이 아닌 다른 성질로 정의할 수는 없는가?'와 같은 정의에 관한 자명하지 않은 질문에 대하여 탐색할 수 있으며, 이를 통해 수학적 정의의 최소성 ·임의성과 같은 속성들을 자연스럽게 수용할 수 있다.

Polya(1986)는 '발생 중의' 수학과 '완성된 엄밀한 연역과학'으로서의 수학을 구별하였다. 특히 완성된 엄밀한 연역과학으로서의 수학은 Bourbaki의 공리적 방법이 보여주듯이 주어진 공리체계로부터 정리들을 연역하는, 소위 top-down 전개 방식이 특징이다. Russel과 Whitehead의 다음 설명은 '완성된 수학'에서 정의의 성격을 잘 보여주고 있다.

> 정의는 새로 도입된 어떤 기호가 이미 그 의미가 알려진 (기지의)기호들의 또 다른 조합과 같다는 선언이다. 정의는 primitive idea에 포함되지 않는다. 왜냐하면 정의는 기호화되는 대상이 아니라 오직 기호와만 관계있는 것이기 때문이다. 정의는 실제적인 편의를 위해 도입되는 것이며, 이론적으로 반드시 필요한 것은 아니다(Russel, Whitehead, 1927: Brown, 1998, p.111에서 재인용).

이와 같이 완성된 공리 연역체계에서 정의란 무정의 용어들의 집합에 기초하여 어떤 용어의 의미를 약정하는 선언이다. 예를 들어 '집합 A는 집합 B의 부분집합이다'의 정의는 피정의항 '$A \subset B$'이 정의항 '$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$'과 같다는 선언이며, 이때 피정의항은 정의항의 언어 혹은 표기상의 축약으로 기능한다(Brown,1998).

반면 '발생중의' 수학이란, 완성된 정적인 지식체계가 아닌 성장하는 동적인 지식체계로서의 수학을 말한다. 이때 정의는 '완성된 수학'에서와 같이 단순한 표기상의 축약이 아닐 뿐만 아니라 반드시 그와 관련된 증명보다 먼저 존재하는 것도 아니다. 오일러는 다면체에 대한 엄밀한 정의 없이도 오일러 정리를 증명할 수 있었으며, Lakatos(1976)의 분석은 다면체의 정의란 처음부터 존재했던 것이 아닌 오일러 정리 증명의 개선과 함께 성장한 증명생성개념이었음을 잘 보여주고 있다. 이와 같은 수학사적 사례는 '발생

<표 Ⅱ-1> '완성된 수학'과 '발생 중의' 수학에서 정의의 성격과 정의의 교수관행

수학관	'발생 중의' 수학	'완성된 엄밀한 연역과학'으로서의 수학
정의의 성격	- 문제를 해결하기 위해 제안된 잠정적 '가설' - 개념의 분석과 탐구로 얻어진 최종 산물	- 무정의 용어의 집합을 기초로 어떤 용어의 의미를 약정하는 선언 혹은 표기상의 축약 - 연역의 기초로서 반드시 증명보다 먼저 존재하는 출발점.
정의의 교수관행	정의의 재발명(Freudenthal)	처음부터 정확한 정의를 용어에 대한 약속으로 제시
정의의 이해	정의가 무엇인가 뿐만 아니라 그 정의의 합리성도 이해하는 관계적 이해	해당 개념의 정의가 무엇인지는 알 수 있지만 관계적 이해를 반드시 수반하는 것은 아님

중의 수학'에서의 정의가 완성된 수학에서와 같이 연역적 이론의 논리적 전개를 위해 처음부터 약정된 것이라기보다는, 당면한 문제를 해결하기 위해 잠정적으로 도입된 '가설'이었음을 시사한다(Cellucci, 2013).

정의를 용어의 의미에 대한 약속으로 제시하는 통상적인 기하교수관행은 완성된 수학에서의 정의를 가르치는 반면, Freudenthal(1971)이 주장한 정의의 재발명은 '발생 중의' 수학에서의 정의를 가르치고자 한다. 완성된 수학의 관점에서 처음부터 정확한 정의를 용어에 대한 약속으로 제시하는 전통적인 정의 교육은 내용 전개상의 논리적 엄밀성과 경제성 및 교사의 입장에서 가르치기 용이하다는 장점을 가지고 있다.

그러나 Linchevsky, Vinner, Karsenty(1992), Gavender, de Villiers(2004), Zaslavsky, Shir(2005), 이지현(2013a)등의 연구는 학생들뿐만 아니라 많은 예비교사들조차도 도형 정의가 도형일 필요 충분조건이라는 사실을 정확하게 알고 있지 못할 뿐 아니라, 교과서에서 제시하는 정의만이 유일하게 가능한 정의라고 생각하는 등 정의의 임의성 및 최소성과 같은 특징에 대한 이해가 부족함을 보고하고 있다. 이러한 연구 결과는 많은 학생들이 도형의 정의를 용어의 뜻으로만 배우고 있으며, 어떤 도형을 왜 그렇게 정의해야 하며 또 그 정의는 어떤 의미가 있는가에 대해서는 거의 이해하지 못한 도구적 이해(instrumental understanding)에 그치고 있다는 점을 보여준다. 정의를 용어에 대한 단순한 약속 이상으로 그 정의가 왜 합리적인지를 관계적으로 이해하기 위해서는, 완성된 정의를 그대로 수용하는 것이 아니라 Freudenthal이 주장했듯이 정의의 재발명 과정을 경험해야 한다. 그러나 정의를 용어에 대한 단순한 약속으로만 간주하며, '공리 및 정의-정리-증명'의 전개 논리만을 정의를 가르칠 수 있는 유일한 방법으로 생각하는 많은 교사들에게 정의의 재발명이란 결코 포용하기 쉽지 않은 교수방법이다.

2. PCK변화를 위한 인지전략

Shulman(1986, 1987)은 교사의 전문적 지식을, 교과지식(subject-matter knowledge: 이하 SMK)[3], '어떤 교과를 다른 사람들이 이해할 수 있도록 표현하며 형식화할 수 있는 지식'인 교수학적 내용지식(pedagogical content knowledge: 이하 PCK)과 교육과정지식으로 범주화하였으며, 교사의 지식 변환(transformation)을 SMK가 교수에 적합한 형태의 지식, 즉 그가 말한 PCK로 변화하는 것으로 보았다. 이와 같은 Shulman(1987)의 교사 지식 변환은 암묵적으로 예비교사의 PCK를 백지상태(tabular rasa)로 간주하고 있음을 알 수 있다. 그러나 Ball(1990)은 교사교육에 처음 입문한 예비교사의 PCK도 백지 상태가 아닐 뿐만 아니라, 학교수학의 경험으로부터 무의식중에 형성한 많은 예비교사의 PCK가 도구적 이해의 문제점을 가지고 있음을 지적하였다.

Kinach(2002)은 수학교사의 도구적 이해와 관계적 이해의 문제에 주목하여, Shulman과 달리 교사지식의 성장을 PCKi(도구적 교수학적 내용지식)에서 PCKr(관계적 교수학적 내용지식)로의 변화라는 관점에서 논의하였다. Kinach는 교과교

3) Shulman 이후 대부분의 학자들이 교과지식(SMK) 혹은 교과내용지식(content knowledge)을, 교육과정에 대한 이해를 바탕으로 개념에 대한 정의, 사례의 구분, 연결성 등을 포함하는 중등학교수준의 수학지식으로 개념화하였다(조완영, 2011). 한편, Ball et al(2008: 조완영, 2011: 347에서 재인용)은 교과내용지식을 공통내용지식(common content knowledge)와 특수내용지식(special content knowledge)로 세분하였다. 이때 공통내용지식은 학습자에게 가르칠 수학지식을 의미하며, 특수내용지식은 학습자에게 직접 가르치지 않더라도 교사가 이해하고 있어야 하는 수학지식이라는 점에서 학교 수학뿐만 아니라 학문수학까지도 포괄하는 개념이다.

육방법론 강의에서, 어떤 특정 주제에 대한 SMK와 PCK의 단순한 신장이 아닌, 예비교사들이 가지고 있을 수 있는 학교수학에 대한 바람직하지 않은 SMKi 혹은 PCKi를 SMKr 및 PCKr로의 변화를 유도하기 위한 다음과 같은 5단계 교수전략을 제시하였다[4].

PCK변화를 위한 IACTS교수전략(Kinach, 2002:55, 66)

1. 확인(Identify): 'X를 처음 배우는 학생에게, X를 설명해보라'는 과제를 제시하여, X에 대한 예비교사들의 PCK를 확인한다.
2. 평가(Assess): 예비교사들이 제시한 교육적 설명을 내용(content)·개념(concept)·문제해결(problem solving)·인식론적(epistemological)·탐구(inquiry)수준으로 평가한다.
3. 도전(Challenge): 확인단계에서 예비교사들이 제시한 교육적 설명의 적절성에 도전한다. 소크라테스적인 대화를 사용하여, 예비교사들이 자신이 제시한 (관계적 이해를 수반할 수 없는) 교육적 설명에 대한 문제의식을 느낄 수 있는 창조적인 긴장을 조성한다.
4. 변환(Transform): 상황 A에서 X를 설명하게 함으로서 예비교사의 PCK와 SMK를 심화한다. 전 단계에서의 긴장을 유지하면서, 예비교사들이 자신이 제시한 설명의 적절성을 평가하게 한다. 교사학습에 대한 구성주의 철학을 토대로, 예비교사들이 어떤 설명이 바람직한가를 스스로 결정할 수 있는 기회를 부여한다. 상황 A에서 경쟁하는 두 설명 방식 사이의 긴장을 해소하면서, 예비교사의 신념체계와 PCK는 변화하기 시작한다.
5. 유지(Sustain): 예비교사들이 X를 새로운 상황 B에서 설명해보게 함으로서, 도전 단계에서의 혼란을 해소하게 한다. 예비교사들이 위와 같은 5단계의 인지전략을, 내용과 그것을 가르치는 방법에 대한 습관적 사고를 이해를 위한 교수 지향으로 전환하는 발견술로 활용할 수 있게 한다.

Kinach(2002) 교수모델의 핵심은 바로 과거 학교수학 경험으로부터 연유했을 예비교사의 PCKi와 PCKr이라는 교사교육의 목표 사이에서 발생하는 긴장 혹은 갈등이다. Kinach는 자신의 교수 실험에서, '무엇을 가르쳐야 하며 어떤 설명이 좋은 설명인가?'에 대한 Pcki와 Pckr관점의 차이로 야기되는 인지적·심리적 긴장과 '좋은' 설명을 찾고자 했던 예비교사의 열망이 PCK 변화를 자극하는 동인이 되었다고 분석하고 있다. Kinach는 위와 같은 교수전략을 적용하여, 예비교사들이 스스로 자신의 교수학적 신념과 수학적 설명에 대한 기초를 반성할 수 있었으며, 관계적 이해를 지향하는 새로운 교수철학(SMKr/PCKr)과 자신의 과거 도구적인 교수학습경험(SMKi/PCKi)사이의 조정이라는 도전적인 과업을 수행할 수 있었다고 하였다.

Ⅲ. 연구방법론

2013년도 2학기 연구자의 '수학교육과정과 교재연구' 강의를 수강한 예비교사 13명[5]을 대상으로, Kinach의 교수전략에 부합하는 교수과제[6]를 단계적으로 제시하였다(<표 Ⅲ-1>).

4) Kinach(2002)는 많은 예비교사들이 $(-8)-(-2)=-6$과 같은 음수연산에 대하여, 음수의 부호규칙만 설명하면 충분하다는 도구적인 교수관을 가지고 있음을 확인하고, 관계적인 교수 관점으로의 변화를 유도하기 위하여 위와 같은 5단계의 교수전략을 적용하였다.

5) 교수실험에 참여한 수강생 13명중, 학부생은 9명(모두 여학생), 교육대학원생은 4명(2명 남학생, 2명 여학생)이었으며, 교생실습과 같은 공식적인 교육 경험이 없었던 예비교사들이었다. 교수과제 1·2는 Freudenthal의 정의교육관점에 대한 강의 전에 제시하였으며, 교수과제 3은 강의와 토론 후 제시한 최종보고서로서 정의를 재발명하는 lesson play와 정의교육에 대한 여러 논점에 대한 반성을 쓰게 하였다. [교수과제 1]의 제시에서 [교수과제 3]의 수합까지 교수 실험의 과정은 2013년 11월 한 달 동안 진행되었다.

6) 교수과제의 개요는 <표 Ⅲ-1>에, 구체적인 문항은 부록에 제시하였다.

이 연구의 교수실험은 크게 세 단계로 구조화할 수 있었다. 연구자는 평행사변형의 정의에 대한 예비교사들의 SMK와 PCK를 확인하고(1단계), 만약 예비교사들이 도구적인 PCK를 가지고 있을 경우 이에 도전하여 관계적인 PCK로 변화할 수 있도록 유도하였으며(2단계), 예비교사의 변화된 PCK를 정착 및 반성하도록(3단계)하였다. 첫 단계의 교수과제는 도형 정의에 대한 학생들의 응답을 평가 및 진단한 후 이에 대한 나름의 설명을 제시하는 것이었다. 두 번째 단계에서 연구자는 예비교사들에게 소크라테스적인 질문을 제기하여 앞 단계에서 제시했던 설명의 적절성에 대해 다시 생각할 수 있는 기회를 부여하였다. 특히 평행사변형 정의에 대한 일부 예비교사들의 모순적인 사고에 직면하게 함으로서, 정의에 대한 관계적 관점을 수용하는 데 잠재적 방해 요인을 극복할 수 있는 동인을 제공하였다. 연구자는 Freudenthal의 정의교육관 및 2009개정 교육과정에서의 정의 교육의 변화를 소개하고 이에 대해 예비교사들과 토론한 후, 마지막으로 도형 정의를 재발명하는 lesson play를 작성하고 자신의 변화한 PCK를 반성하도록 하였다.

연구자는 예비교사들이 제출한 각 교수과제, lesson play, 강의 및 토론·강의 전 후 실시된 인터뷰에 대한 전사 기록 등의 자료를 분석하였다. 이후 연구 결과에서는 교수과제에 대한 예비교사들의 반응, 또 연구자와의 상호작용의 흐름과 논리를 기술함으로서 예비교사의 정의에 대한 교수학적 내용지식의 변화과정을 분석한다.

<표 Ⅲ-1> 교수과제의 개요

Kinach의 인지전략	목적	단계 별 교수 과제
확인 (Identify)	예비교사의 '정의'와 '정의를 가르치는 것'에 대한 생각을 확인	**[1단계]** 학생이 쓴 도형 정의를 평가 및 진단하고, 이러한 학생에게 정의를 설명해 보아라.
평가 (Assess)	예비교사들의 정의에 대한 SMK와 PCK를 분석	
도전 (Challenge)	예비교사들이 자신이 제시한 설명에서 모순점을 발견하게 함으로서, '정의'와 '정의를 가르치는 것'에 대한 예비교사들의 도구적 이해에 도전한다.	**[2단계]** 소크라테스적인 질문을 제기함으로서 자신이 제시한 설명에 대해 다시 생각하게 하기. **(예)**도형 정의만을 다시 알려준다면, 학생들은 정의와 성질을 혼동하지 않을까? 어떤 성질이 정의이고 성질이 되는지를 어떻게 구별할 수 있을까? '정의'와 '성질'은 반드시 고정된 것일까? -교과서 정의만이 유일한 도형 '정의'라는 예비교사의 통념에 도전 **(문제제기)** 평행사변형의 다른 성질들을 이끌어낼 수 있는 성질은 정말 '두 쌍의 대변의 길이가 평행하다' 뿐인가?
변환 (Transform)	완성된 수학과 발생 중의 수학에서의 정의 사이의잠재적 긴장을 해소함으로서, Freudenthal의 정의 교육관점을 수용	**[3단계]**정의와 정의를 가르치는 것에 대한 통념의 붕괴를 통해 예비교사들은 정의에 대한 관계적 관점 수용의 방해 요인을 스스로 극복할 수 있으며, 정의에 대한 PCK의 변화가 시작된다. Freudenthal의 정의교육관점을 소개하고, 이를 구체적으로 구현하는 lesson play를 작성하게 한다.
유지 (Sustain)	정의에 대한 자신의 PCK 변화를 반성하기	예비교사들의 개념적 변화를 다음 논점에 대해 반성함으로서 정착하게 한다. (예) 결과적으로 정의는 하나로 정하는 것이라면, 다른 정의 선택의 가능성을 아는 것이 어떤 의미가 있을까? 처음부터 도형의 정확한 정의를 바로 전달하는 수업과, 연역적 조직화의 과정을 거쳐 도형의 정의를 접한 학생들이 수학의 '정의'에 대해 배우게 되는 것은 어떠한 차이가 있는가? 정의를 '완성된 수학' 외의 관점에서도 볼 수 있는가?

Ⅳ. 연구결과: 정의에 대한 PCK의 변화

1. 1단계 : 정의에 대한 PCK를 확인하기

연구자는 예비교사들의 '정의'와 '정의를 가르친다는 것'에 대한 SMK와 PCK를 확인하기 위하여, 다음과 같은 평행사변형의 정의에 대한 네 학생의 답[7]에 5점 만점으로 점수를 부여한 후 첫째, 학생들이 왜 이렇게 정의를 썼을 지를 진단하고, 둘째, 이러한 학생들에게 무엇을 설명할 것인가를 서술하는 [교수과제 1]을 제시하였다.

> [교수과제 1] 평행사변형의 정의 채점하기
> 진희: 두 쌍의 대각의 크기가 같고, 두 쌍의 대변이 평행하고, 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이다.
> 효종: 두 쌍의 대각의 크기가 같은 사각형이다.
> 은희: 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이다.
> 성철: 한 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이다.

네 학생의 서술 중 효종·은희의 응답은 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형'이라는 교과서의 정의와 동등한 정의이지만, 이것도 평행사변형의 정의로 인정하여 만점을 부여한 예비교사는 없었다. 사실 예비교사들 뿐만 아니라 서동엽(1998), 이호철(2007)의 연구에서도 평행사변형의 정의와 대등한 정의를 정답으로 인정하지는 않았다. 반면, Gavender와 de Villiers(2004)는 공식적인 도형 정의와 다르나 논리적으로 대등한 정의는 정답으로 인정하고 있다. 다음은 예비교사들이 진단한 평행사변형 정의의 '오답'요인[8]이다.

-평행사변형의 정의, 조건, 성질(정리)의 혼동(13명)
-특정 조건을 만족하면, 해당 도형이 된다는 것 자체를 정의로 인식하고 있다(2명)
-평행사변형을 정의할 수 있는 중요성질이지만(효종·은희), 그것이 실제 평행사변형의 정의는 아니다(1명)

모든 예비교사들이 평행사변형의 정의와 성질(혹은 조건)을 혼동하고 있음을 지적하였다. 효종·은희의 응답과 관련하여 "조건을 만족하면 해당도형이 되는 것"을 정의로 인식하는 것을 오개념으로 간주한 것은, 예비교사들이 교과서 정의와 동치인 다른 정의의 가능성을 생각하지 않았음을 보여준다. 반면 한 예비교사만이 효종·은희의 답에 만점을 부여하지는 않았으나, 이 성질들이 평행사변형을 정의할 수 있는 중요 성질이라고 언급하였다.

한편, 다음의 반응에서 대부분의 예비교사들이 교과서에서 제시된 평행사변형의 정의 및 성질이 무엇인가를 다시 정확히 반복하는 것 외에 다른 설명의 대안을 갖고 있지 않았음을 알 수 있다.

> 평행사변형의 정의란 평행사변형이라는 단어 즉, 말에 대한 '약속'이라는 설명을 하고 다시 한 번 '평행사변형이란 두 변이 평행한 사각형'임을 얘기한다. 성질이란 평행사변형이라고 정의된 것이 가지고 있는 특성이라 말하고 평행사변형의 성질을 말한다. 마지막으로 조건은 '무엇 무엇'이면 평행사변형이다'에서 '무엇 무엇'이 의미하는 것이라 설명하고 조건을 말해준다(예비교사 J).

> 정의는 정해진 약속으로 여러분이 외워야하는 어떤 수학용어의 뜻이고 성질은 평행사변형의 정의와 여러 가지 수학 공리를 이용하여 증명해야 하는 것입니다. 여러분이 알고 있는 것은 평행사변형의 성질입니다. 평행사변형의 정의는

7) 이 문항은 서동엽(1998), 이호철(2007)의 연구에서 보고한 학생 반응을 토대로 작성한 것이다.
8) 예비교사들의 진단을 크게 3가지로 유형화하여 해당된 예비교사의 수를 제시하였다. 한 예비교사가 두 유형의 언급을 한 경우도 있으므로, 각 유형에 해당된 예비교사들이 배타적인 것은 아니다.

두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형입니다(예비교사 R).

내가 만약 이 학생들의 선생님이었다면, 정의가 무슨 말인지를 다시 한 번 보자고 했을 것이다. 평행사변형의 정의와 평행사변형의 성질은 다른 말이라는 것을 알려주고 평행사변형의 정의, 평행사변형의 성질 3가지, 평행사변형이 되기 위한 조건 5가지를 같이 살펴봤을 것이다(예비교사 I).

일단 정리와 정의의 차이점에 대하여 설명을 한다. 정의란 모두가 약속한 것이다. 즉 불변의 진리, 절대 바뀌지 않는 것을 말한다. 평행사변형의 정의는 두 쌍의 대변이 평행하다는 것이다. 정리는 이러한 정의를 가지고 증명된 것이라고 할 수 있다(예비교사 K).

예비교사들은 평행사변형의 정의를 너무나 당연한 약속으로 받아들이고 있었으며, 왜 이것이 정의인가? 왜 학생들은 정의와 성질을 혼동할 수 있으며 또 어떻게 구별할 수 있는가?에 대한 설명이 필요할 수 있다는 것을 생각하지 않음을 알 수 있었다. 세 예비교사만이 '두 쌍의 대변이 평행하다'는 정의에서 다른 성질들을 이끌어 낼 수 있다는 점을 언급하거나 혹은 진희와 성철의 응답은 왜 정의가 될 수 없는지를 설명함으로서 정의를 관계적으로 설명하고자 노력하였다. 그 외의 예비교사들은 학생들이 평행사변형의 정의와 성질을 혼동하고 있다고 진단하였음에도 불구하고, 왜 학생들이 평행사변형의 정의와 성질을 혼동할 수 있는지에 대해서는 고민하지 않았다. 예비교사들은 정의에 대해 "(유일한) 약속, 외워야 하는 것, 증명할 수 없는 것, 불변의 진리"와 같은 언급과 함께 교과서의 정의와 성질을 다시 나열하는 것 외의 대안을 가지고 있지 않았을 뿐만 아니라, 대안을 가지고 있어야 할 필요성도 인식하지 못하는 것처럼 보였다. 연구자는 위와 같은 예비교사들의 반응에서 대다수의 예비교사들에게 '평행사변형의 정의를 안다'는 것은 단순히 평행사변형이라는 용어의 뜻을 정확히 재생할 수 있는 도구적 이해라는 것을 확인할 수 있었다.

2. 2단계: 자신의 정의 이해에서 모순을 발견하기

앞서 확인한 예비교사들의 정의에 대한 도구적 이해에 도전하기 위하여, [교수과제 2]에서 연구자는 일련의 소크라테스적 질문[9]들을 제기하였다. 먼저 연구자는 왜 학생들이 정의와 성질을 혼동할 수 있는지를 생각해보도록 하였다. 다음과 같이 여섯 명의 예비교사는 교과서에 제시된 평행사변형의 성질과 정의가 사실 필요충분조건이기 때문이라고 하였다.

평행사변형의 성질을 말해주고 "이 도형이 뭘까?"라는 질문에도 평행사변형이라고 답할 수 있고 평행사변형의 정의를 말해줘도 그 도형이 평행사변형임을 알 수 있기 때문에 어떤 것이 정의이고 어떤 것이 성질인지를 혼동한다고 생각한다(예비교사 R).

한편 네 예비교사는 학생들이 단어에 대한 약속이라는 '정의'와, 이로부터 증명되는 '성질'의 사전적인 뜻을 모르기 때문이라고 보았다. 이어진 질문에서 연구자는 도형의 정의와 성질을 혼동

9) 소크라테스는 어떤 주제에 대한 자신의 무지를 고백하면서, 상대방에게 그 주제에 대한 견해를 말해달라는 요청으로 대화를 시작한다. 대화의 과정에서, 소크라테스의 대화자들은 종종 매우 단정적인 주장들을 제시한다. 이때 소크라테스는 상대방이 개진한 주장을 자신의 논리로 대응하는 것이 아니라, 상대방의 생각을 전제하면 모순이 발생한다는 점을 보임으로서 상대방의 주장을 논파한다. 연구자 역시 소크라테스와 같이 예비교사들에게 정의에 대한 생각을 개진하도록 하였으며(1단계), 예비교사들은 앞 절에서 살펴본 바와 같이 정의 교육에 대한 단정적인 의견들을 제시하였다. 이 절에서 연구자가 제시한 일련의 질문들은, 정의교육에 대한 예비교사들의 생각을 전제했을 때 직면하는 한계를 보여주기 위한 과정이었다.

하는 학생에게 정의·성질·조건을 어떻게 구별할 수 있는지를 설명해보도록 하였다. 예비교사들은 성질은 '정의를 이용하여 증명할 수 있는 것', 조건은 '성질의 역과 비슷한 것으로, 그 용어가 될 충분조건' 등과 같이 설명하였다. 특히 다음 설명은 정의에 대한 예비교사들의 SMK를 잘 보여주고 있다.

- 사람들끼리 한 약속, 수학공동체의 인정을 거쳐 사회적으로 합의됨으로서 보장되는 것(예비교사 M)
- 정의는 정해진 수학용어의 뜻이므로 외워야 합니다(예비교사R).
- 정의는 말 그대로 평행사변형이라는 도형의 이름이야(예비교사 H).
- 정의: 용어의 약속, 증명이 필요 없음(예비교사J).
- 평행사변형이라는 단어 즉, 말에 대한 약속이다. 약속을 중학교에서는 정의라고 한다. 즉, 어떤 수학에 쓰이는 용어에 대한 낱말 뜻이라고 할 수 있다(예비교사I)
- 정의는 유일하므로 정의 외의 것들은 모두 성질이 된다고 알려준다(예비교사Y).
- 정의는 약속이다. 모든 도형의 정의는 하나지. 그럼 여러 성질들 중 어떤 것이 정의가 될 수 있는 것이냐면 정의로는 모든 정리를 증명할 수 있어야해. 그래서 평행사변형의 정의는 모든 정리들을 증명할 수 있는 두 쌍의 대변의 길이가 평행한 사각형이 평행사변형의 정의가 되는 거지(예비교사K).

대부분의 예비교사들이 정의를 용어의 뜻에 대한 '약속'으로 설명하였으며, 한 발 더 나아가 교과서의 정의는 유일한 약속이라고 설명한 예비교사들도 있었다(예비교사 Y · K). 또 여섯 명의 예비교사들이 도형의 정의란, 그 성질을 가정함으로서 다른 성질을 이끌어 낼 수 있는 기본성질이라고 설명하고 있었다.

한편, 연구자는 평행사변형의 정의와 성질은 고정된 것인지, 아니면 바뀔 수도 있는 것인지에 대한 자신의 견해를 쓰고 이를 정당화하게 하였다. [교수과제 1]에서 평행사변형의 조건은 정의가 될 수 없다고 단정했던 예비교사 중 일부는 성질이 정의와 필요충분조건이라면 정의와 성질의 지위는 바뀔 수 있다고 하였으며, 자신의 종전 생각의 변화를 인정하였다[10]. 그러나 일곱 명의 예비교사들은 정의를 한 가지로 정해야 '그로부터 나머지 성질을 이끌어 낼 수 있고(예비교사 D)', '용어를 정의한다는 것이 의미가 있으므로(예비교사Y)', 정의와 성질은 고정되어 있다고 생각하였다. 같은 생각을 가지고 있었던 예비교사 K는 다음과 같이 서술하였다.

> 내가 도형의 정의와 성질은 고정된 것이라고 생각하는 이유는, 어떤 한 가지 성질을 정의로 정하면, 그 성질을 이용해서 모든 성질(정리)를 증명할 수 있어야하기 때문이다. 따라서 정의는 변할 수 없는 고정된 것이라고 생각한다. 예를 들어 평행사변형의 성질 4가지를 보면,
> 1. 두 쌍의 대변이 평행하다.
> 2. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
> 3. 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
> 4. 두 대각선은 서로 다른 대각선을 이등분 한다.
> 이러한 4가지 성질 중 평행사변형의 정의가 되는 것은 성질 1번뿐이다. 1번의 성질로 나머지 성질을 증명할 수 있다(예비교사K).

예비교사 K는 도형의 정의는 그로부터 나머지 성질을 이끌어낼 수 있는 기본성질임을 잘 알고 있었다. 그러나 K는 평행사변형의 성질 중 다른 성질을 이끌어 낼 수 있는 기본성질은 '두 쌍의 대변이 평행하다'는 성질뿐이며, 따라서 정의와 성질은 바뀔 수 없다고 주장하였다.

사실 중학교 교과서에서는 [그림 Ⅳ-1]과 같이 K가 언급한 나머지 성질들이 평행사변형의 성질이자 조건이라는 것, 즉 평행사변형의 정의와 필요충분조건임을 증명하고 있다. 사실 [그림 Ⅳ-1]과

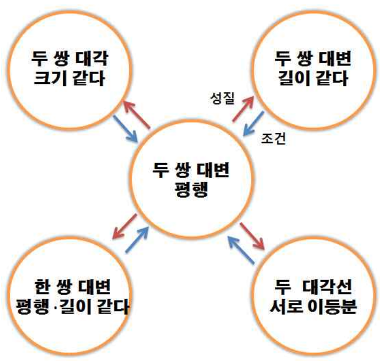
10) [교수과제 2]에 참여한 예비교사 12명 중, 이렇게 생각이 변화한 예비교사는 5명이었다.

[그림 Ⅳ-2]의 논리적 구조는 같은 것임에도 불구하고, 예비교사 K는 [그림 Ⅳ-2]와 같이 교과서의 정의 외의 다른 성질로부터 평행사변형의 다른 성질을 증명할 수 있다는 것은 부정하였다. K와 같은 모순적인 사고의 단편은 다른 예비교사의 반응에서도 찾아볼 수 있었다. 예비교사 L은 두 쌍의 대변의 길이가 같고, 대각의 크기가 같고, 대각선이 서로 이등분한다는 성질은 평행사변형의 성질이자 조건이 되므로 평행사변형 정의와 필요충분조건이며, 따라서 이들 성질 중 하나를 가정하면 나머지 성질들을 증명할 수 있다고 하였다. 반면 '한 쌍의 대변의 길이가 같고 평행하다.'는 성질은 교과서에 조건으로만 제시되어 있으므로 충분조건만 되며 따라서 이 성질로부터는 평행사변형의 다른 성질을 증명할 수 없다고 하였다. 이상과 같은 예비교사 K와 L의 반응에서 이들이 필요충분조건과 같은 논리적 관계를 생각할 수 있었을 것임에도 불구하고, 중학교 교과서에 제시된 도형 성질의 함의 관계만을 절대적으로 받아들여 교과서에 제시되지 않은 함의 관계는 아예 불가능한 것으로 배제하고 있음을 알 수 있었다. 연구자는 다른 예비교사들도 K와 같은 생각을 가지고 있는지 살펴보기 위하여, Freudenthal의 정의교육관점을 소개하는 강의 직전, 다음과 같이 중학교 교과서에 등장하는 평행사변형의 성질을 제시하고 이 중 나머지 성질들을 모두 이끌어 낼 수 있는 기본성질이 될 수 있는 것을 모두 골라보도록 하였다.

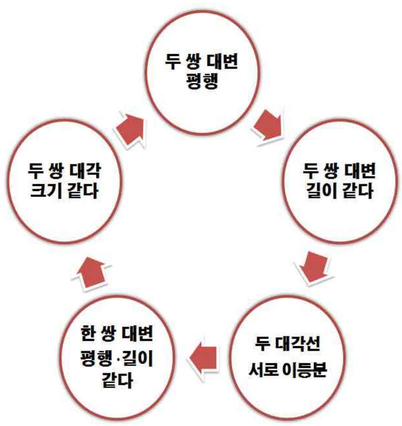
[활동]평행사변형의 성질 연역적 조직화하기
① 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
② 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
③ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
④ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
⑤ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

사전과제에서 많은 학생들이 도형의 정의란, 그로부터 다른 성질들을 끌어낼 수 있는 것이라고 설명하였습니다. 우리는 이미 성질 ①만 있으면 그로부터 나머지 네 성질을 모두 끌어낼 수 있음을 알고 있습니다. 그런데 혹시 ①외에 다른 성질들은 이러한 역할을 할 수 없는지 생각해보십시오.

이날 강의에 참여한 13명의 예비교사 중, 다음과 같이 ①외의 다른 평행사변형의 성질들도 조건이며 따라서 ①과 필요충분조건이 되므로 이 중 어느 한 성질을 가정하면 다른 모든 성질을 이끌어낼 수 있다는 것을 알고 있었던 예비교사는 다섯 명에 지나지 않았다. 네 예비교사는 이 중 일부 성질만이 그것을 가정했을 때 다른 성



[그림 Ⅳ-1] 교과서에 제시된 평행사변형 성질사이의 논리적 관계



[그림 Ⅳ-2] 평행사변형의 성질사이의 논리적 동치관계

질들을 모두 이끌어낼 수 있는 기본성질이 될 수 있다고 생각하고 있었다. 예비교사들이 위 성질이 모두 평행사변형의 성질임을 잘 알고 있었다는 점을 고려하면, 관건이 되는 것은 과연 이 성질들이 평행사변형일 (충분)조건도 되느냐라는 것이었다. 특히 이렇게 응답한 예비교사들은 성질 ④가 평행사변형을 결정할 수 있는 조건이 될 수 있을지를 의심하였다. van Hiele(2009)는 도형의 상징특성(symbol character)과 신호특성(signal character)를 구분하였다. 상징특성이란 그 도형이 소유한 성질(즉 도형일 필요조건)이며, 신호특성이란 도형일 충분조건, 즉 어떤 도형이 평행사변형의 일부 성질을 소유한다는 것을 근거로 그 도형을 평행사변형이라고 판정할 수 있는 성질이다. van Hiele(2009)은 상징특성보다 신호특성을 이해하는 것이 쉽지 않으며, 상징-신호특성을 총체적으로 바라볼 수 있어야 도형의 성질 사이의 함의 관계를 이해할 수 있다고 하였다. 따라서 위와 같은 반응은 일부 예비교사들 역시 도형의 신호특성에 대한 이해가 충분하지 않았음을 시사한다. 한편, 예비교사 K를 포함한 네 예비교사는 다음 반응과 같이 성질 ① 외의 다른 성질은 다른 성질을 이끌어낼 수 있는 기본성질이 될 수 없다고 생각하고 있었다.

> 성질 ①은 하나의 약속으로 정해진 '정의'이므로 증명이 필요 없으나 나머지 성질들은 증명이 필요하기 때문이다(예비교사 Y).

예비교사들은 교과서의 정의인 ①외의 다른 어떤 성질(②·③·④·⑤)을 가정하더라도 평행사변형의 모든 성질을 이끌어낼 수 있다는 점을 확인하고 크게 동요하였다[11]. 예비교사들의 놀라움은 단순히 이 결론이 자신의 예상 혹은 기대와 어긋났다는 점 때문만은 아니었다. 예비교사들은 사실 중학교 교과서에서 이 성질들이 평행사변형의 정의와 필요충분조건임을 증명하였음에도 불구하고, 자신이 평행사변형의 다른 성질도 나머지 성질을 모두 이끌어낼 수 있는 기본성질이 될 수 있다는 가능성을 한 번도 생각해보지 않았거나 아니면 막연히 안 될 것이라고 단정해 버렸다는 사실을 더 큰 충격으로 느끼고 있었다. 한 예비교사는 그 이유에 대해 다음과 같은 분석을 내놓기도 하였다.

> 학생들은 '두 쌍의 대변이 평행하다'는 성질만을 정의라는 명확한 선을 그어, 다른 성질과 질적으로 다른 것으로 받아들이므로 다른 성질이 정의와 필요충분조건일 수 있다고 생각할 수 없다(예비교사 M).

연역적 조직화의 과정에 의한 평행사변형 정의의 재발명은, 예를 들어 '두 쌍의 대변이 같은 사각형' 과 같은 다른 정의의 가능성 혹은 정의와 성질의 교환 가능성을 내포하고 있다. 그러나 이와 같은 '발생 중의' 정의는 통상적인 기하교수학습관행에서 '용어나 기호의 뜻을 명확하게 하나로 정하여 나타낸 것(강신덕 외 5인, 2010 :170)'이라는 정의 설명, 또 정의와 성질(혹은 정리)의 엄격한 구별과 표면적으로 상충되는 요소를 가지고 있으며, 이러한 상충요소는 교사들이 Freudenthal의 정의교육관점을 포용하는 데 장애요인으로 작용한다(이지현, 2013a).

이와 같은 두 번째 단계에서 예비교사들은 도형 정의에 대한 자신의 도구적 이해로 인한 모순을 자각할 수 있었다. 예비교사들에게 이러한 자각이 위와 같은 정의에 대한 관계적 관점 수용의 방해 요인을 극복하고, 정의를 가르치고 배

11) 이 점은 강의시간에 연구자가 체감했던 예비교사들의 반응만이 아니라, 예비교사들이 이후에 작성한 최종 과제에서도 이 장면이 정의에 대한 자신의 도구적 이해와 그 원인을 생각하게 한 계기가 되었음을 확인할 수 있었다.

우는데 무엇이 중요한가에 대한 내적 선호를 바꾼 동인으로 작용하였음을 이후 예비교사들이 쓴 반성에서 확인할 수 있었다.

3. 3단계: 변화한 PCK를 반성하기

연구자는 '정의 없이 정의 가르치기'라는 제목으로 다음 내용을 강의하였다. Lakatos와 Freudenthal의 전통적 정의교육에 대한 비판을 소개한 후[12], 이 강의의 주 교재인『수학교육과정과 교재연구(김남희 외 5인, 2011)』의 내용을 중심으로 정의교육에 대한 Freudenthal의 대안을 소개하였다. 이와 함께 일상적-수학적 정의의 차이, 우리 교과서와 미국 교과서에서의 정의 설명, 정의의 임의성과 관련하여 위상수학의 연결성(connectedness)개념에 대해 여러 텍스트에서 다른 동치명제를 정의로 선택하고 있음을 구체적으로 찾아보기도 하였다. 한편, 2009개정교육과정은 중학교 수준에서의 증명을 '정당화'로 대치하였으며, '정의', '증명', '명제', '역' 등의 용어 없이 중학교 기하를 전개하고 있다는 것도 살펴보았다[13].

예비교사들이 토론에서 가장 예민하게 반응했던 이슈는, 도구적 정의교수관행의 문제점을 보여주는 단편적 사례로 연구자가 제시했던 다음과 같은 객관식 문제[14]에 관한 것이었다.

> 다음 중 평행사변형의 정의로 옳은 것은?
> ①한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형
> ②두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형
> ③두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형
> ④두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형
> ⑤두 쌍의 대변의 길이가 각각 평행한 사각형

예비교사들은 위와 같이 정의에 대한 도구적 이해가 강요되는 현장에서 정의를 과연 어떻게 가르쳐야 하는가에 대해 고민하였다. 예를 들어 한 예비교사는 이러한 문제가 중학교 정기고사에도 많이 출제되는데, 위 문제의 출제의도와 같이 평행사변형의 정의를 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형' 하나만을 가르친다면 틀린 것인지를 묻기도 하였다. 이 질문에 연구자는 이 문제가 묻는 것은 도형 정의에 대한 이해가 아닌 단지 교과서에 제시된 정의를 정확히 재생할 수 있는 지의 여부뿐이며, 또 교과서에 제시된 정의와 다른 보기를 고른 것을 오답으로 간주하는 것은 $\frac{1}{2}$이 정답인 문제에 $\frac{2}{4}$라는 응답을 오답으로 처리하는 것과 같은 교육적 오류일 수 있다고 지적하였다. 예비교사 M은 위와 같은 중학교의 정의에 대한 도구적 교수학습관행의 문제점이 2009개정교육과정과 같이 중학교 기하에서 '정의' 라는 용어 없이 도형의 정의를 가르쳐야 하는 이유가 될 수 있다는 의견을 개진하기도 하였다.

연구자는 예비교사들에게 평행사변형의 여러 성질의 연역적 조직화를 통하여 정의를 재발명하는 대화를 lesson play로 작성하도록 하였다. 교사와 학생 사이의 대화의 극본이라는 형식을 가진 lesson play는 어떻게 가르칠 것인가를 대략적으로 제시하는 수준을 넘어, 이것을 구체적으로 구현하는 행동과 언어를 정확하게 제시해야

12) '왜 이렇게 정의해야만 하는가?'에는 대답하지 않은 채 처음부터 정의를 주입하는 정의교육을 Freudenthal (1971)은 받아쓰기 교육, Lakatos(1976)는 'take it or leave it philosophy'라고 신랄하게 비판하였다.

13) 2009개정교육과정에서 중학교 기하에서의 '정의' 용어의 삭제는 '증명'의 삭제와 함께 이루어진 것으로 보인다. 그러나 이러한 정의, 증명 등의 용어 삭제에도 불구하고 2009개정 교육과정에서 다루는 중학교 기하의 내용은 종전과 크게 다르지 않다.

14) 이 문제는 선행연구(이지현, 2013a)에 참여했던 한 교사가, Freudenthal의 정의교육관점이 현행 중학교의 교수학습관행과 모순된다는 증거로 문제집에서 발췌하여 제보했던 것이다. 연구자는 이 문제를 통하여 예비교사들과 이론과 실제의 간격에 대해서도 논의하고자 하였다.

하는 매우 도전적인 교수과제일 뿐만 아니라 예비교사들에게 다른 교수학적 선택의 가능성과 그 결과에 대해 고민할 수 있는 기회를 제공할 수 있다(Zazkis, Liljedahl, Sinclair, 2013). lesson play에서 예비교사들이 학생들과의 대화를 통해 정의를 재발명한 교수학습경로는 다음과 같이 네 유형으로 분류할 수 있었다.

[유형1] (학생들이 언급한 것과 같은) 평행사변형의 성질은 사실 조건도 되므로(따라서 필요충분조건), 평행사변형의 정의는 이 중 하나를 선택할 수 있다(2명).

[유형2] 학생 각자의 정의에서도 다른 학생들이 말한 평행사변형의 뜻을 이끌어낼 수 있다. 따라서 이 중 하나를 정의로 선택한다(4명).

[유형3] 교과서에서의 통상적인 방식과 비슷하게,
첫째, 평행사변형의 정의(두 쌍의 대변이 평행하다)로부터 각 성질을 증명하고,
둘째, 이 성질들의 역도 성립함을 증명한다(즉 이 성질들이 평행사변형의 조건임을 증명).
셋째, "두 대각선이 서로를 이등분하는 것과 두 쌍의 대변이 길이가 같다는 성질은 어떤 관계가 있을까?"와 같이 평행사변형의 다른 성질 사이의 논리적 관계를 질문하고, 이에 대한 답은 ①과 ②의 결론을 종합하여 얻을 수 있음을 설명한다(6명).

[유형4] 학생들과의 대화를 통해 평행사변형의 정의를 합의하려 하지만, 여전히 교과서의 정의 성질만이 다른 성질을 이끌어 낼 수 있는 기본 성질이라고 고수하였다(1명).

연구자는 lesson play를 통해, 한 명을 제외하고는 모든 예비교사들이 정의의 재발명이라는 교수방법을 적절히 수용하였으며 그것을 구체적인 대화로 구현할 수 있었음을 확인할 수 있었다. [교수과제 3]의 다음 질문은 예비교사들이 lesson play에서 가상적으로 구현한 정의의 재발명이라는 교수방법에 대한 반성을 위한 것이었다.

[교수과제 3]
결과적으로 도형의 정의를 하나로 약속할 것이라면, 이러한 도형의 정의에 사실 여러 선택의 가능성이 있었음을 학생들에게 설명하는 것이 어떤 의미가 있을까요? 처음부터 도형의 정확한 정의를 바로 전달하는 수업과, lesson play를 작성하면서 여러분이 상상했었을 연역적 조직화의 과정을 거쳐 도형의 정의를 접한 학생들이 수학의 '정의'에 대해 배우게 되는 것은 어떠한 차이가 있을 것이라고 생각합니까?

예비교사들은 처음부터 정확한 정의를 제시하는 전통적 교육과 연역적 조직화에 의한 정의의 재발명은, 같은 기하 내용을 다루더라도 학생들이 정의에 대해 배우는 것은 매우 다를 수 있다고 지적하였다. 예비교사들은 처음부터 정확한 정의를 제시한다면, 학생들은 '도형이 왜 이렇게 정의 되었는가'를 이해할 수 없으며 결국 정의는 무조건적인 암기의 대상이 될 수밖에 없다고 하였다. 예비교사 H는 처음부터 도형 정의를 제시하고 이를 이용하여 성질 및 조건을 증명하는 교과서의 전개방식보다 정의의 재발명 과정에서 학생들이 도형의 여러 성질 사이의 논리적 관계를 더 자연스럽고 정확히 인식할 수 있음을 다음과 같이 설명하고 있었다.

처음부터 정의를 어느 하나로 정해놓고 가르친다면, 사실 논리적으로 평행사변형의 정의와 동치인 여러 성질들에 대해서 조건과 성질로 구분하여 증명하는 과정이 학생들에게 많은 혼란을 줄 수 있고, 왜 그렇게 정의하는지도 알 수 없을 뿐만 아니라, 정의-조건-성질이 무슨 차이가 있는지를 제대로 이해할 수 없다.(중략) lesson play와 같이 평행사변형에 대한 학생들의 시각적인 관찰을 토대로 각자가 정의를 내려보고, 여러 성질들도 평행사변형의 정의가 될 수 있으며 그 중 하나를 평행사변형의 정의로 정한 것을 알 수 있는 수업을 접한 학생이라면, 평행사변형에 대해 외우는 식의 공부가 아닌, 훨씬 더 정확한 이해를 할 수 있을 뿐 아니라,

수학적인 정의가 무엇인지까지도 알 수 있다(예비교사H).

한편 예비교사 M은 정의의 재발명으로 증명을 자연스럽게 도입할 수 있을 뿐만 아니라, 새로운 도형의 성질을 발견할 수 있는 등 학생들의 수학적 자신감과 창조력을 신장시킬 수 있다고 생각하였다.

연역적 조직화를 통한 '정의하기'의 수업은, 학생들이 직접 자신이 내린 정의를 바탕으로 성질들을 이끌어 냈기 때문에 성질 사이의 관계를 잘 알 수 있을 뿐 아니라, 발견한 성질을 더 오래 기억할 수 있다. 또 자신이 내린 '정의'에서 성질을 이끌어내기 위한 수단으로 증명을 자연스럽게 도입할 수 있다. 나의 lesson play에서 상수가 자신이 생각한 평행사변형의 뜻을 애들에게 확인시켜 주기 위해서 증명한 것이 이에 해당한다. 상수는 증명이라고 생각하지 않았겠지만 말이다. 더 나아가, 학생들은 아직 발견하지 못한 도형의 성질을 발견해 낼 수도 있다. 즉, 학습자 자신이 정의를 내릴 수 있다고 생각함으로써 수학적 자신감이나 창조력·상상력을 키울 수 있다(예비교사M).

완성된 수학의 입장에서 정의는 반드시 증명보다 선행해야 한다는 고정관념은 정의의 재발명이라는 교수방식을 수용하는 데 장애요인으로 작용할 수 있다[15]. 연구자는 예비교사들이 자신이 과거에 접했던 '완성된 수학' 뿐만 아니라 '발생 중의' 수학의 관점에서도 정의를 생각할 수 있는지를 살펴보기 위하여 '증명 없이 받아들여야 하는 약속'으로서의 정의에 대한 생각을 질문하였다.

수업을 듣기 전엔 나도 정의는 하나의 약속이라고 생각했다. 그런데 정의는 약속이라기보다는 성질 중에 하나를 선택한 것이라는 생각에 가까워졌다. 다른 성질도 논리적으로 봤을 때 정의로 선택할 수 있다는 것을 깨달았다.(중략) 정의는 증명이 필요 없는 것, 성질은 정의를 이용하여 증명해야 하는 것이라고 생각했었다. 그런데 수업을 듣고 과제를 하면서 그게 아니고 증명을 통해 성질 사이의 관계를 살펴보고 정의를 선택하는 것이라는 생각을 가지게 되었다. 즉, 정의로 성질을 증명하는 것이 아닌 성질을 먼저 찾고 성질과 성질의 필요 혹은 충분 관계를 증명을 통해 확인하는 것이다. 정의를 하고 성질을 찾는 것이 아닌 성질을 찾고 정의를 선택하는 것이다. 따라서 마지막에 선택된 정의도 역시 증명을 한 셈이다.(예비교사R).

예비교사 R은 [교수과제 1]에서 정의는 증명 없이 받아들이는, 외워야 하는 정해진 용어의 뜻이라고 설명하였다. 그러나 R의 위와 같은 설명은 완성된 수학에서의 정의로 확립되기 전, 발생 중의 수학에서 평행사변형의 정의는 증명을 통해 생성되는 개념임을 이해하였음을 보여주고 있다. 연구자는 이와 같은 반응에서 예비교사들의 정의에 대한 SMK가 완성된 수학에서만이 아닌 '발생 중의' 수학에서의 정의까지 포용하는 것으로 변화하였음을 확인할 수 있었다.

Ⅴ. 논의 및 결론

많은 연구자들이 예비 교사와 현직 교사의 PCK가 학교수학을 관계적으로 가르치기에 충분하지 않음을 보고하고 있다. 그러나 Ball과 McDiarmid(1990)는 부족한 교과전문성의 문제만을 지적하는 것만으로는 교사교육이 당면한 과제를 해결할 수 없으며, 교사교육연구가 예비 혹은 현직교사의 SMK 혹은 PCK를 어떻게 변화

15) 이지현(2013a)의 연구에서, 한 교사는 정의가 있어야 증명을 할 수 있다는 이유로 연역적 조직화에 의해 정의를 재발명할 수 있다는 것을 받아들이지 못하였다.

혹은 심화시킬 수 있는지에 대해 적극적으로 탐색해야 한다고 주장하였다. 이 연구는 예비교사들의 정의에 대한 PCK의 문제점을 진단한 이지현(2013a)의 후속연구로서, 정의에 대한 도구적 PCK를 어떤 맥락에서 어떻게 변화시킬 수 있는가에 대한 구체적인 사례와 시사점을 제시하고자 하였다.

연구자는 먼저 예비교사들이 '정의'와 '정의를 가르친다는 것'을 어떻게 이해하는지를 확인하였다. 대부분의 예비교사들은 완성된 수학의 입장에서 정의를 용어에 대한 단순한 약속으로만 생각하였으며, '약속'인 정의를 그대로 제시하는 것 외에는 다른 교수학적 대안을 가지고 있지 않았으며 또 필요성을 느끼지도 못하였다. 연구자는 일련의 소크라테스적 질문을 제기함으로서 예비교사들의 '정의'와 '정의를 가르친다는 것'에 대한 통상적인 사고에 도전하였다. 예비교사들에게 '정의를 가르친다는 것'에 대한 공고한 신념의 변화는 바로 일부 예비교사의 정의 이해에서 모순을 발견한 것으로부터 시작되었다. 이로 인하여 예비교사들은 도형 정의에 대한 자신의 도구적 이해와 그 한계를 자각할 수 있었다. 예비교사들에게 이러한 자각은 완성된 수학과 발생 중의 수학에서의 정의의 다른 성격과 같은, 정의에 대한 관계적 관점을 수용하는 데 잠재적인 방해 요인을 스스로 극복할 수 있는 동인으로 작용하였다. 이러한 과정을 통하여 예비교사들은 자신이 정의를 배웠던 방식과 다른 교수방법을 포용할 수 있었다. 이와 같은 정의에 대한 예비교사의 PCK '성장' 과정은, 정의의 교수법에 대한 백지상태의 PCK를 수학교육이론으로 채우는 것이 아니라, 학교수학의 경험에서 연유한 도구적 PCK를 확인하고 도전하였으며 변화하고 확장하였던 정반합(正反合)적인 과정이었다.

이 사례로부터 얻을 수 있는 교사교육에의 시사점은 무엇인가? 통상적인 교사교육에서는 예비교사들이 교과와 그것을 가르치는 것에 대해 이미 알거나 믿고 있는 것을 고려하지 않은 채, 예비교사를 교수학적 지식이 결여된 학습자로 간주한다(Ball, 1988). 구성주의는 학습을 학습자가 학습 환경에 가져오는 것과 새로 배우게 되는 것 사이의 상호작용의 결과로 간주하는데, 이러한 학습관은 학생의 선행지식 및 신념이 새로운 아이디어를 이해하는 방식에 큰 영향을 미친다는 인지심리학의 연구에 의해서도 지지되고 있다. Ball(1988)은 구성주의의 학습관이 교사교육자가 예비교사를 가르치는 방식에는 영향을 미치지 못하고 있으며, 이것이 교사교육의 미약한 효과, 즉 많은 교사들이 사범대학에서의 교사교육과 그 후의 연수 노력에도 불구하고 자신이 과거에 배웠던 방식을 그대로 답습하게 되는 원인이라고 보았다. Ball의 이와 같은 주장 이후 20여년이 지난 지금의 교사교육에서도, 학생뿐만이 아닌 (예비)교사도 구성주의적인 학습자로 바라보는 관점의 전환은 아직도 완전히 정착되지 않았다. 이 연구는 Ball의 주장과 같이, 교사교육에서 왜 예비교사를 구성주의적인 학습자로 바라보아야 하는지에 대한 필요성과 함께, 이러한 관점 하에서 어떠한 교사교육의 방법론을 적용할 수 있는지를 보여주고 있다.

한편, 교사교육자들은 예비교사들의 SMK를 당연시하며, SMK보다는 PCK의 향상에 집중하는 경향이 있다(Ball, 1988). 예비교사들 역시 학창시절 공부한 학교수학으로 자신이 충분한 교과내용지식을 가지고 있다고 생각한다. 그러나 예비교사의 교수학적 지향을 바꾸기 위하여 연구자는 먼저 예비교사의 SMK에 도전하여야 하였으며, SMK의 한계를 인식하면서 예비교사의 PCK가 변화하는 것을 관찰할 수 있었다. 이와 같은 PCK 변화 과정은 교과교육방법론 강의에서 SMK와 PCK를 통합한 접근의 필요성을 시사하고 있다. 본 연구의 사례에서 보고한 교사의

지식 성장과 교사교육 방법론을 적용하여, 예비 교사의 PCK를 변화시킬 수 있는 다른 교수실험의 소재 발굴 및 교수방법의 개발에 관한 후속 연구를 기대한다.

참고문헌

강신덕, 홍인숙, 김영우, 이재순, 전민정, 나미영 (2010). **중학교 수학 2**. 서울 : 교학사.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**(고시 제 2011-361호, 별책 8).

박영훈 외 5인(2011). **중학교 수학 2**. 서울: 천재문화.

서동엽(1998). **증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 : 중학교 수학을 중심으로**. 서울대학교 박사학위 논문.

이지현(2013a). '정의'의 재발명을 상상하다: Lesson play의 분석. **학교수학, 15**(4), 667-682.

이지현(2013b). 정의의 '정의'를 어떻게 가르칠 것인가? **한국학교수학회논문집, 16**(4), 821-840.

이호철(2007). **중학교 기하 증명과정에서 학생들이 보이는 오류분석 : 8-나의 사각형의 성질 중심으로**. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

조완영(2011). 중등 수학교사의 수학내용지식, **학교수학, 13**(2), 345-362.

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 40–48.

Ball, D. L. (1990). Breaking with experience in learning to teach mathematics: The role of a preservice methods course. *For the Learning of Mathematics, 10*(2), 10–16.

Ball, D.L. & McDiarmid, G.W. (1990). The subject-matter preparation of teachers. In W. Robert Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education: A project of the Association of Teacher Educators*. New York: Macmillan.

Brown, J. R.(1998). What is a definition? *Foundation of science, 1*, 111–132.

Cellucci, C(2013). Top-down and bottom-up philosophy of mathematics, *Foundation of science, 18*, 93–106

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*(3&4), pp. 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Govender, R., de Villiers, M.(2004). A dynamic approach to quadrilateral definitions, *Pythagoras, 58*, pp. 34-45.

Kinach, B. M.(2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics method course: toward a model of effective practice, *Teaching and Teacher Education, 18*, 51-71.

Lakatos, I.(1976). **수학적 발견의 논리**(우정호 역). 서울 : 아르케.

Linchevsky, L., Vinner, S., Karsenty, R., (1992). To be or not to be minimal? Student teachers views about definitions in geometry, in Geeslin, W., Graham, K. (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 48–55, Durham, USA.

Jacobs, H. R. (2003). *Geometry seeing, doing, understanding(3rd ed.)*. New York : W. H. Freeman and Company.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand:

Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, 4 – 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), pp. 1 – 122.

Polya, G.(1986). **어떻게 문제를 풀 것인가?**- How to solve it. 우정호 역, 서울: 천재교육.

van Hiele, P. M.(2009). **구조와 통찰**(우정호, 박교식, 남진영 역). 서울: 경문사.

Zaslavsky, O., Shir, K.(2005). Students' conceptions of a mathematical definition, *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), pp. 317-346.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Sinclair, N.(2013). *Lesson play in mathematics education: a tool for research and professional development*. New York : Springer.

Teaching Definitions without Definitions: How Can Preservice Teachers Teach Differently?

Lee, Ji Hyun (Incheon National University)

For preservice teachers' instrumental-to-relational pedagogical content knowledge transformations, this research designed several didactical tasks based on Kinach's cognitive strategies. The researcher identified preservice teachers' understanding about what is a definition and how to teach it. By challenging their fixed ideas about definitions, the researcher could motivate them to embrace the new teaching approach which guides reinvention of definitions.

The PCK development was not the simple process of filling their tabular rasa PCK with theories of mathematics education, but the dialectical process of identifying, challenging, changing and extending preservice teachers' existent PCK. This research will contribute to explore new directions of mathematics teachers' PCK development and the method of teacher education.

* Key Words : Definition(정의), Preservice teacher education(예비교사교육), Pedagogical content knowledge(교수학적 내용지식), Subject matter knowledge(교수내용지식), Instrumental · Relational understanding(도구적 · 관계적 이해), Knowledge transformation(지식 변환)

논문접수 : 2014. 5. 23
논문수정 : 2014. 6. 19
심사완료 : 2014. 6. 27

[부록]

[단계 1] [교수과제 1] 평행사변형의 정의 채점하기

다음은 평행사변형의 정의에 대해 학생들이 쓴 답안입니다.

진희: 두 쌍의 대각의 크기가 같고, 두 쌍의 대변이 평행하고, 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이다.
효종: 두 쌍의 대각의 크기가 같은 사각형이다.
은희: 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이다.
성철: 한 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형이다.

① 네 학생의 답을 5점 만점으로 점수를 매겨보고, 그렇게 점수를 부여한 이유에 대해 설명해보십시오.
② 학생들은 평행사변형의 정의에 대해 왜 이렇게 썼을까요? 각 학생이 정의에 대해 모르는 것은 무엇이라고 생각합니까?
③ 여러분이 이 학생의 선생님이라면, 학생들의 이와 같은 답에 어떻게 설명하겠습니까?

[단계 2] [교수과제 2] '평행사변형 정의 채점하기' 과제에 대한 Feedback

과제에서 보면, 많은 학생들이 도형의 성질과 정의를 혼동하고 있음을 알 수 있습니다.
① 예를 들어, 평행사변형이라고 한다면 학생들은 왜 평행사변형의 성질과 정의를 혼동할 것이라고 생각합니까?
② ①에서와 같이 평행사변형의 정의와 성질을 혼동하는 학생이, 평행사변형의 여러 성질 중에서 **'정의', '성질', '조건'**은 어떻게 구별할 수 있냐고 묻는다면 어떻게 설명해주겠습니까?
③ 평행사변형의 '정의'와 '성질'이란 꼭 고정된 것이라고 생각합니까? 예를 들어, '두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형'이 평행사변형의 '정의'가 되고, '두 쌍의 대변이 평행하다.'가 '성질'이 될 수는 없을까요? 도형의 정의와 성질이 고정된 것이라고 생각한다면, 그렇게 생각하는 이유를, 도형의 정의와 성질은 고정된 것이 아니며 바뀔 수 있다고 생각한다면, 역시 그렇게 생각하는 이유를 써 주십시오.

[강의 전 활동]

다음은 중학교 교과서에 등장하는 평행사변형의 성질들입니다.

① 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
② 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다
③ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
④ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
⑤ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

사전과제에서 많은 학생들이 도형의 정의란, 그로부터 다른 성질들을 끌어낼 수 있는 것이라고 설명하였습니다. 우리는 이미 성질 ①만 있으면 그로부터 나머지 네 성질을 모두 끌어낼 수 있음을 알고 있습니다. 그런데 혹시 ①외에 다른 성질들은 이러한 역할을 할 수 없는지 생각해보십시오.

[단계 3] [교수과제 3]

[lesson play 과제] 위 그림은 여러분들이 살펴보았듯이, 중학교 교과서에서 정의를 설명하는 부분입니다. 위 상황과 비슷하게, 네 학생이 각자 평행사변형의 뜻이라고 생각한 것을 다음과 같이 발표하였습니다.

진영: 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형
상수: 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형
미영: 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형
세희: 두 쌍의 대변의 길이가 같고, 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형

처음부터 정의를 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형'이라고 약속하는 것이 아니라, **이렇게 대답한 네 학생(진영, 상수, 미영, 세희)과 교사가 평행사변형의 여러 성질의 연역적 조직화를 통하여, 평행사변형의 정의를 재발명하는 대화**를 상상하여 lesson play로 작성해 보십시오.

[결과적으로 정의는 하나로 정하는 것이라면, 다른 정의 선택의 가능성을 안다는 것이 어떤 의미가 있을까?]

1. 강의에서 살펴본 바와 같이, 평행사변형의 여러 성질이 사실 동치이므로 우리가 알고 있는 정의 외에도 '두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형', '한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같은 사각형'과 같은 정의도 논리적으로 가능하지만, 보통 한 교육과정 혹은 교과서에서는 평행사변형의 정의를 그 중 어느 하나로 통일하여 약속하게 됩니다. 이와 같이 결과적으로 도형의 정의를 하나로 약속할 것이라면, 이러한 도형의 정의에 사실 여러 선택의 가능성이 있었음을 학생들에게 설명하는 것이 어떤 의미가 있을까요? 처음부터 도형의 정확한 정의를 바로 전달하는 수업과, lesson play를 작성하면서 여러분이 상상했었을 연역적 조직화의 과정을 거쳐 도형의 정의를 접한 학생들이 수학의 '정의'에 대해 배우게 되는 것은 어떠한 차이가 있을 것이라고 생각합니까? 이 문제에 관한 자신의 생각을 자유롭게 써 주십시오.

[과연 정의는 증명 없이 받아들여야 하는 것인가?]

2. 많은 학생들이 사전과제에서, 수학은 용어의 정확한 정의로부터 시작하는 학문이며,
예를 들어 '두 쌍의 대변이 평행한 사각형'과 같은 평행사변형의 **정의는 하나의 약속이므로 증명이 필요 없는 것 혹은 증명 없이 받아들여야 하는 것**이지만, 나머지 평행사변형의 성질들은 증명이 필요하다고 설명하였습니다. 혹시 이점과 관련된 자신의 기존 생각이 lesson play를 작성하면서 변한 점이 있다면, 이 문제와 관련한 생각 혹은 이해의 변화에 대해 설명해 주십시오.

3. 여러분들이 이 lesson play project의 사전과제 및 강의, 그리고 최종보고서의 작성 과정에서 배우고 느낀 점, 혹은 질문이나 문제의식을 자유롭게 써 주십시오.