대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 4, 607 ~ 622. Nov 2014

삼각함수 개념의 역사적 분석

유 재 근*

이 논문의 목적은 삼각함수 개념의 역사적 발달과정을 분석하고, 이를 바탕으로 하여 교육적 함의를 논의하는데 있다. 역사적 분석의 결과는 다음의 두 가지이다. 첫째, 삼각함수 개념은 역사적으로 비를 측정하는 선분(호의 삼각선)에서, 비를 나타내는 수치(각의 함수)로 발달하였으며, 이 과정에서 기하, 산술, 대수, 해석이 통합되었다. 둘째, 실제적 계산에서 이론적 함수로 발달한 결과, 주기성으로 형식화되었으나 '삼각법'이 간과되었다. 그리고 교육적 함의는 다음의 두 가지이다. 첫째, 실제적 계산에서 간과된 삼각법을 닮음의 원리에 의해 관계적 구조적으로 다루어야 한다. 둘째, 삼각함수로의 개념적인 일반화는 인식론적 장애로 인정되어야 하며, 역사에서 드러난 통합을 강조하는 방향으로 개선되어야 한다. 이러한 연구결과는 학습 지도에 있어 유용한 시사점을 제공한다.

Ⅰ. 서 론

학교수학의 삼각법(trigonometry)은 기하 영역의 삼각비(trigonometric ratios)와 해석 영역의 삼각함수(trigonometric functions)로 구분된다. 흔히 학생들은 삼각비의 용어에 익숙하지 않고 변의 길이의 비를 혼동하기 때문에, 여러 예를 통해 반복설명함으로써 익숙해지도록 해왔다. 직각삼각형의 예각의 위치에 따른 혼동이나, 사인과 코사인 값을 서로 바꿔 말하는 혼동도 많다. 이를 줄이기 위해 삼각비는 '기억연상술(mnemonics)'을 쓰는가하면, 특수각의 사인 표를 $\frac{0}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$로 연관 짓고, 삼각함수는 부호를 암기하는 '얼싸탄코', 삼각항등식도 공식을 암기하는 '씨코코씬' 등을 써왔다.

여러 연구에서 학생들은 개념적 이해를 제대로 못하고 암기와 적용에 치중함을 지적해왔다. 삼각비는 기하 영역이지만 함수 관점이 혼재되어 있고, 삼각함수는 함숫값 계산에 삼각비를 수단으로 사용하지만 그 배경적 내용이 빈약하다(김부윤, 정영우, 2010). 삼각비는 많은 교사와 학생들에게 협소한 관점을 취하여 알고리즘에만 치중하도록 하며(Watson, 2008), 삼각함수는 학습-지도에 있어 가장 까다로운 단원임을 밝혀 왔다(강미광, 2011).

삼각함수를 어렵게 만드는 인식론적 장애는 개념 및 이론 발달상의 장애로서 역사적 단계와 관련하여 설명될 수 있다. 수학 지식의 발달 과정을 제시하는 역사는 이런 의미에서 인식론적 장애의 본질을 드러내는데 도움이 되므로, 관련 역사를 고찰하는 것은 학생들의 개념 인식을 이해하고 적절한 지도 방안을 고안하는데 필요하다(장혜원, 2011: 121).

* 서울대학교 대학원, kuki122@chol.com

현행 교사용 지도서는 삼각비와 삼각함수의 역사를 소개하고 있다. 천문학을 연구하면서 거리와 각의 크기를 측정할 필요성에 의해 삼각법이 실용적으로 발생하였음을 소개한다. 그리고 바빌로니아는 원을 360등분한 것, Ptolemy는 사인 표를 구하고 그 계산 방법을 설명했다는 것, 인도는 반현 표를 만들었다는 것, 유럽은 지식을 체계화하면서 직각삼각형의 삼각비를 생각한 것, 급수 전개를 복소수로 확장하면서 복소수의 편각과 삼각함수의 일반각을 형식화한 것, 오일러 공식과 Fourier 급수를 제시하면서 오늘날 미적분의 도구가 되었음을 주요 이슈로 하여 설명하고 있다. 국내 다수의 수학사 관련 논문에서도 이와 유사하게 다루고 있다. 즉, 송은영(2008)이 정의 방식의 변화라는 의미를 주어 분석한 것을 제외하면, 삼각함수의 역사는 양적으로 많은 것에 비하여, 질적으로 주요 문제를 대체로 나열하고 있음을 볼 수 있다(Yi, Yoo, & Lee, 2013; 김부윤, 정영우, 2010; 송일선, 2009; 조정수, 2008 등). 좀 더 구체적으로, 역사를 통해 어떤 간과된 요소 때문에 개념적 이해를 방해하는지 논의하지 않았다. 따라서 실세계와의 연결성, 발생 계기와 관점, 개념적 아이디어를 전-개념인 대수나 기하와 통합하는 것, 학습하는 지식의 가치를 아는 것 등을 고찰한 역사적 분석이 부족한 실정이다.

그러므로 이 논문은 삼각비와 삼각함수를 포괄하는 개념의 본질적 아이디어와, 형식화된 결과 간과된 것이 무엇인지 역사를 통해 밝히는데 목적이 있다. 수학사는 사인 비를 이용한 적절한 이유가 무엇인지, 반각공식 등 삼각항등식의 목적이 무엇인지 보여준다(Katz, 2000: 252-253).

이에 기하학적 계산과 해석학적 함수를 구분하여 역사적 발달과정을 논한다. 이상의 논의를 바탕으로 교육적 시사점을 도출한다.

Ⅱ. 실제적인 기하학적 계산

삼각법의 어원은 세 각의(trigonon) 측정(metron)이다(Crossfield, Shepherd, Stein, & Williams, 2009: 183). 기원전 2000-3000년에 삼각형의 측정술이 발생하였고, 기하학이 꽃피던 그리스 시대에 천문학의 응용도구로서 각의 함수가 되었으며, 대수 기호주의(algebraic symbolism)가 발달한 이후 17세기에는 해석학에 포함되었다(David, 1925: 600). Trigonometry라는 용어는 독일의 Piticus에 의해 1595년 책 제목으로 처음 소개된다(Adamek, PenKalski, & Valentine, 2005).

이 장에서는 실용적 계산에 관한 역사적 분석을 통해 삼각비 개념이 기하학적 단계를 어떻게 거쳐 발달했는지 개념형성의 과정을 고찰한다.

1. 닮은 직각삼각형에서 그림자의 측정

암묵적인 인식 단계는 그노몬, 곧 수직으로 꽂아놓은 막대기의 그림자 측정에서 닮은 직각삼각형을 사용한 단계이다(그림 Ⅱ-1).[1] 이는 탄젠트의 출현이었다.

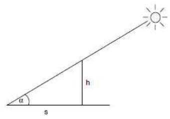
문화적 배경을 보면, 사람들은 그림자의 길이에 의해 계절을 알았다. 토지를 측량하고 지도를 만들고 여행과 무역을 위해 항해를 하였다. 다양한 문화에서 일식과 태양의 위치를 보고 종교의식을 행하였다. 나라의 수장은 탐험을 나가기 전에 하늘의 길조를 기대했다. 이슬람권에서는 달을 보고 달력을 만들었으며, 태양을 보고 단식주기나 일일기도의 방향을 정했다. 이처럼 고대인들은 천체의 본질에 대답하고자 하였다. 그 해법이

1) (삼각법의) 지식은 그림자로부터 비롯되고, 그림자는 그노몬으로부터 비롯된다(기원전 1105년경 고대 중국의 주비산경: Maor, 2003: 41에서 재인용). 그노몬(gnomon)은 어원상 know의 의미이며, 시간을 안다 또는 측정한다는 것이다(Priestley, 1998: 91).

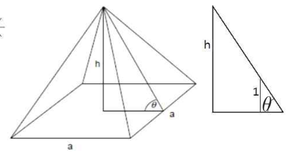
그림자의 측정과 닮은 직각삼각형이었다(Crossfield et al., 2009: 7).

고대인들은 삼각법을 명확한 사용법 없이, 암묵적으로 편리하게 활용할 수 있었다. 고대 이집트와 바빌로니아 인들은 닮은 삼각형의 길이 비에 관한 정리들을 알고 있었다. 이집트인들은 토지측량과 피라미드 건설에 삼각법을 이용하였다. 바빌로니아 천문학자들은 원호와 그 마주보는 현의 길이를 연결시켰다. 이러한 삼각함수의 초기 개념은 일조시간과 그림자 길이의 관계를 표로 나타낸 수열이었다. 그림자 표는 탄젠트와 코탄젠트의 전신(前身)이었다. BC1500년 무렵 이집트인들은 그림자 표를 활용하였다. 유사한 그림자 표가 인도나 그리스 등 다른 문명지에서도 나왔다. 그림자 표는 그림자 길이와 시간을 하나의 함수로서 대응시킨 것이었다. 따라서 적어도 3000년 전부터 함수가 무엇인지 알고 이해하기 훨씬 이전에, 함수관념을 사용하였음을 알 수 있다(Adamek et al., 2005). 구체적인 기록을 몇 가지 살펴본다.

고대 이집트의 린드 파피루스에 직각삼각형의 길이와 관련된 비율(rate)[2]을 계산한 기록이 있다. 문제 56~60에는 피라미드 밑면에서의 이면각의 코탄젠트에 상당하는 '섹트(seqt)'라는 비율이 나와 있다. 당시의 피라미드 구조에서는 각 면이 '똑같은 기울기'를 유지할 필요가 있었다. 이때 탄젠트 대신에, 코탄젠트를 사용하는 것이 관례였다. 그노몬이 단위량이었으므로, 그 단위를 분모로 보는 것, 곧 고정된 양을 기준으로 하는 것이 자연스러웠기 때문이다. 따라서 [그림 Ⅱ-2]에서 단위높이 1에 대한 수평거리의 비율을 썼다(Maor, 2003: 23-26; Cajori, 1983: 83).



[그림 Ⅱ-1] 코탄젠트를 계산한 그노몬 (Maor, 2003: 44)



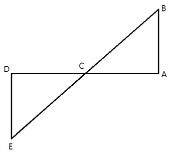
[그림 Ⅱ-2] 높이 $=\frac{\text{수평}}{\text{섹트}}$을 나타내는 피라미드 (Cajori, 1983: 83)

고대 바빌로니아의 점토판에 삼각비의 표로 추정되는 것이 있다. 플림프턴(Plimpton) 322에는 직각삼각형의 길이를 60분법 소수로 나타낸 15행4열의 표에 $\sec^2 A$와 $\tan^2 A$을 계산해 놓았다. 각은 인식하지 못했으나, 직각삼각형의 길이 비를 중시하였음을 알 수 있다(Maor, 2003: 53-58; Kennedy, 1989: 335-339).

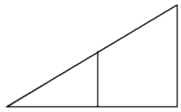
기원전 5세기경 Thales는 그림자계산법(shadow reckoning)에 의해 도달할 수 없는 거리를 간접 측정하였다. 해안선의 길이 AB(그림 Ⅱ-3)는 직접 잴 수 있는 육지의 길이 DE를 이용하였다. 두 삼각형은 한 변과 '양끝 각이 같도록' 합동이 된다. 피라미드의 높이(그림 Ⅱ-4)는 그 그림자와 그노몬의 그림자가 정확하게 같아지는 낮 시간대를 잡아 직접 잴 수 있는 그노몬의 그림자를 이용하였다. 두 삼각형은 햇빛의 평행선에 의해 '각이 같도록' 닮음이 된다(Freudenthal, 1983: 356-357).

---

2) 비의 개념에는 ratio(비, $a:b$), rate(비율, $\frac{a}{b}$), proportionality(비례관계, $a:b=c:d$)가 있다. ratio는 a가 b의 몇 배인가의 의미인 반면, rate는 비의 값을 말한다. 기존 연구들에서 ratio와 rate의 구분은 표현상 차이의 정도로만 두었으므로(Whitehead, 2009: 70), 이글에서도 따랐다. 또한 삼각비가 사인, 탄젠트 등 여러 가지 비를 가리키는 경우에는 ratios의 복수를 쓴다.



[그림 Ⅱ-3] 특수한 닮음인 합동(Freudenthal, 1983: 356)



[그림 Ⅱ-4] 직각삼각형의 닮음(Freudenthal, 1983: 356)

이처럼 삼각비를 직접 쓴 것은 아니었으나 직각삼각형 닮음의 원리, 곧 직각삼각형의 한 예각이 같을 때 길이를 비교한다는 원리를 이용하였다(Crossfield et al., 2009: 29; Maor, 2003: 44).

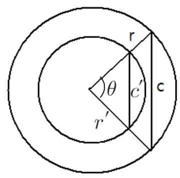
한편, 직각삼각형은 고대인들에게 측정의 수단이었다. 직각삼각형은 길이, 높이, 깊이 등의 측정에 자주 사용되며, 과학의 기초가 된 도구였다. BC 1105년 주비산경에 의하면, 중국인들은 직각삼각형의 길이 비를 일찍이 인식했던 것으로 추정된다(David, 1925: 602).

이상으로부터 암묵적인 인식 개념은 '닮은 직각삼각형'이라 할 수 있다. 즉, 각의 불변성에 의존하는 실생활 문제 상황에서 닮음에 의한 간단한 해법이었다. 햇빛의 평행선은 직각삼각형의 각이 같도록 유지한 것이었다. 그러나 각의 측정 개념은 없었다. 따라서 실용이나 원시 삼각법으로 분류된다고 볼 수 있다(Maor, 2003: 27). 다음 절에서는 천체의 위치와 운행을 측정하기 위한 기원을 알아본다.

2. 원호의 함수로서 현의 표 계산

기하학적 단계는 천문학의 응용도구로서 삼각비의 표를 만들고, 천체의 위치와 운동패턴을 기술하기 위한 수단으로 썼던 단계이다. 이는 사인의 출현이었다.

고대 그리스인들은 오늘날의 삼각함수 공식과 동치인 정리들을 찾아냈다. Euclid 원론의 제2권의 명제12와 13은 각각 둔각과 예각에 대해서, 코사인법칙을 기하학적으로 공식화한 것이다. 코사인법칙은 피타고라스의 정리에 대한 일반삼각형으로의 일반화에 해당된다. Archimedes의 잘린 현의 정리는 사인의 덧셈정리, 곧 합과 차의 공식에 관련된 것이다. Eudoxos 등 그리스의 천문학자들은 바빌로니아의 자료를 이용하였다. 이로써 원둘레를 360°로 세분하고 60분법 소수 표기를 사용하게 된 것인데, 이는 천문학의 요구였다. 당시 천동설에서는 천체가 고정된 지구를 중심으로 하는 큰 반구 위를 운행한다고 생각하였다. 천체 간 거리는 중심각 대신에 호의 길이로 측정하였다. 호의 길이를 측정하기 위해 반지름의 길이와 현의 길이의 비율이 일정하다는 것을 이용하였다(그림 Ⅱ-5).

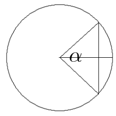


[그림 Ⅱ-5] $r:c=r':c'$(일정)인 동심원

BC140년경 Hipparchus는 이러한 삼각법을 창안하고 '삼각법의 창시자'로 불린다(Cajori, 1983: 118). 주어진 원호(circular arc)에 마주보는 현(subtend chord)의 길이를 '사인' 표로 나타낸 것을 수록한 12권의 책을 출판하였다. 반면, 사인을 '직각삼각형의 비'로 현대화한 것은 16세기 유럽인들의 아이디어였다. Hipparchus는 지구의 반지름, 천체 간 거리, 태양과 달의 지름을 계산하였다. 100년 무렵 Menelaus는 구면삼각법의 최초 저서를 썼다. 그러나 두 저서는 현존하지 않는다. 다행히 그 방법은 Ptolemy에게 전해졌다.

150년경 Ptolemy는 《Almagest》에 Hipparchus의 표에 근거하여 원의 현의 길이를 표로 작성하였다. 이것이 현존하며, 오늘날의 사인 표에 해당하는 현의 표(chord table)이다. 그는 반지름이 60인 원에서 $\frac{1}{2}^\circ$부터 180°까지 $\frac{1}{2}^\circ$ 간격

으로 현의 길이를 계산하였다. Hipparchus와 같이 원호가 각의 크기를 대신하였다. 사인을 명명하지 않고 현을 그대로 썼지만, 현과 사인의 관계는 분명하였다. 곧, 반현이 사인이다:



$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\text{반현}}{\text{반지름}} = \frac{\text{현}}{\text{지름}} = \frac{crd\ \alpha}{2}$$

이때 반지름은 육십분법 단위 $60 = 1,0$

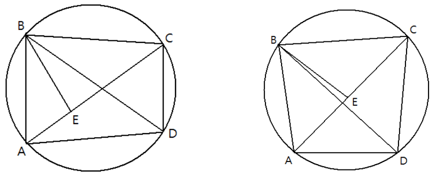
$crd\,\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$(그림 Ⅱ-6).

[그림 Ⅱ-6] 사인과 현(Freudenthal, 1983: 518)

이처럼 2배한 호의 현을 생각하였다(Cajori, 1983: 124). 따라서 현대적 의미로는 90° 이하의 사인 값을 $\frac{1}{4}^\circ$ 마다 나타낸 것이었다.

표는 원에 내접하는 정다각형에서 시작하였다. 내접도형은 천구에서 삼각형을 다루는 천문학의 의도였다. Euclid 기하에 의해 정$3,4,5,6,10$각형의 한 변을 계산하였다. 그러면 중심각 $120^\circ, 90^\circ, 72^\circ, 60^\circ, 36^\circ$에 대한 현의 길이를 알았다. 그 외의 현은 삼각항등식에 의해, 알려진 현을 가지고 미지의 것을 계산하였다.

삼각항등식은 표를 보간(interpolation)하기 위한 용도로 존재하였다. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 사인법칙, 사인의 덧셈정리, 즉 $\sin(A \pm B)$와 반각공식을 알고 있었다. 다음 정리에는 덧셈정리와 반각공식이 들어 있다. 증명의 원리는 삼각형의 '각이 같음(sameness of the angles)'에 의한 닮음의 비례관계가 전부였다:



[그림 Ⅱ-7]
(Euclid & Heath, 1998: 133)

"원에 내접하는 사각형이 있다고 하자. 이 사각형의 대각선들을 가지고 만든 직사각형의 넓이는, 마주 보는 변들을 가지고 만든 직사각형들의 넓이를 더한 것과 같다". 이를 증명하면,

한 원에 사각형 $ABCD$가 내접해 있다고 하자. 대각선 AC, BD를 그어라. 그러면 AC, BD로 만든 직사각형의 넓이는 AB, DC로 만든 직사각형과 AD, BC로 만든 직사각형을 더한 것과 같음을 보여야 한다.
각 DBC와 크기가 같도록 각 ABE를 그려라. 양쪽에다 각 EBD를 더하거나(그림 Ⅱ-7의 왼쪽을 제시) 빼면(오른쪽은 생략), 각 ABD와 각 EBC는 크기가 같음을 알 수 있다.
그런데 각 BDA와 각 BCE는 크기가 같다. 왜냐하면 이들은 같은 활꼴의 원주각이기 때문이다[3권의 법칙21]. 그러므로 삼각형 ABD와 삼각형 EBC는 각들의 크기가 모두 같다. 그러므로 BC와 CE의 비율은 BD와 DA의 비율과 같다[6권 법칙4]. 그러므로 BC, AD로 만든 직사각형은 BD, CE로 만든 직사각형과 넓이가 같다[6권 법칙16]. (중략) (Euclid & Heath, 1998: 132-133, 밑줄은 추가함).

이처럼 '각이 같음⇒(닮음⇒)비례관계, 즉 비의 불변성⇒직사각형 넓이가 같음'으로 기하산술적인 해석을 하였다. Euclid와 같이 '닮음'이라는 말을 쓰지 않고, 그 아이디어만 사용하였던 것이다(ibid.: 186). 내접사각형이 지름을 한 변으로 하는 경우는 차의 공식이 된다. 한 대각선이 사각형의 내각을 이등분하는 경우는 반각공식이 된다.

그러나 공식에 의해 구하기 어려웠던 것은 $\sin 1^\circ$이었다. Ptolemy는 새로운 도전을 하였다. 곧, 작은 각에 대해서 현과 호가 거의 같다는 선형성을 이용한다(그림 Ⅱ-8):

정오각형의 작도를 통해 36°로부터 18°의 사인을 계산할 수 있다. 마찬가지로 30°로부터 15°의 사인을 계산할 수 있다. 차의 공식에 의해

$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$, 다시 반각의 공식에 의해 $\frac{3}{2}^\circ, \frac{3}{4}^\circ$의 사인을 계산할 수 있다.

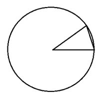
1°의 사인은

$\sin\frac{3}{4}^\circ < \sin 1^\circ < \sin\frac{3}{2}^\circ$.

이제 선형성에 의해,

$\sin\frac{3}{4}^\circ \approx \frac{3}{4}\sin 1^\circ, \sin\frac{3}{2}^\circ \approx \frac{3}{2}\sin 1^\circ$.

따라서 $\sin 1^\circ$는 $\frac{4}{3}\sin\frac{3}{4}^\circ, \frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}^\circ$에 의해 구한다(Crossfield et al., 2009: 38-52).



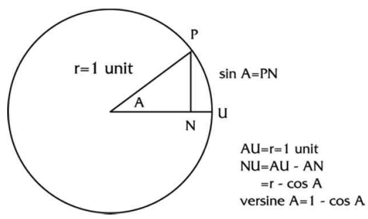
[그림 Ⅱ-8] (Freudenthal, 1983: 368)

이처럼 국소적인 선형성에 의해 종래의 부등식 대신에,[3] 정확하게 계산할 수 없는 어떤 양의 값을 근사하였다.

완성된 표는 직각삼각형과 일반삼각형의 해법에 이용되었다. 그리스인들에게는 직각삼각형에서 빗변과 한 예각이 주어졌을 때 대변을 구하는 절차가 공식처럼 알려져 있었다. 이는 다름 아닌, 닮음의 비례관계를 푸는 과정이며, 표를 빗변 120인 닮은 직각삼각형으로 해석하고, 두 직각삼각형을 서로 비교한 것이었다.

천문학에서 Ptolemy의 업적은 기하학에서 Euclid 원론만큼 표준(standard)이 되었다. 삼각법에서도 60분법 소수의 표기를 통해 정확도를 높였다. 이로써 그의 시대부터 다음 천년동안의 삼각법을 지배한다. 당대에 그의 체계적인 계산은 정확성과 조밀성에서 견줄 수가 없었기 때문이다. Almagest도 이에 걸맞게 'the greatest'라는 의미로 후대의 아라비아인들이 칭송한 것이었다. 반면, 종래의 Archimedes와 같은 수학자들은 근삿값 대신에 매우 정확하도록 분수와 부등식을 고수했다. 그러나 근삿값은 쓸모 있게 쓰였다. 그로 인해 자연현상을 양적, 수학적으로 설명했다는 Ptolemy의 아이디어는 획기적이었던 것이다 (Kennedy, 1989: 359-361). 오차를 버린 과감한 생략은 후대 응용수학을 지배하는 수 개념이 근삿값이 되도록 하였다.

5세기부터 수학의 중심지가 된 인도 수학의 기여 중 하나는 삼각법이었다. 천문학 저서에는 천체 간 각거리(angular distances)를 구하기 위한 표가 있었다. 인도인들은 사인, 코사인, 정시(正矢, versed sine; versine$A$; $1-\cos A$), 사인의 반각공식, 구면 및 평면 삼각형의 해법, 각도를 분과 초 등에 의해 60씩 더 세분하는 규칙을 알았다. 삼각비에서 예외적으로 정시를 사용하였다. 정시는 뒤집은(reversed) 사인의 의미로, 사인PN을 90° 회전한 변NU를 말한다(그림 Ⅱ-9).



[그림 Ⅱ-9]
(Crossfield at al., 2009: : 141)

[그림 Ⅱ-9]의 오른쪽 식과 삼각항등식에 의해, 다음을 알 수 있다:

versine$2A = 1-\cos 2A = 1-(1-2\sin^2 A) = 2\sin^2 A$.

이 등식은 인도의 보간법에 중요하게 여겨졌다. 17세기 유럽에서도 원호의 정시는 사인 다음으로 중요한 함수였다.

500년 무렵 Aryabhata는 Ptolemy의 표에 근거하여 각과 관련된 반현(half chords) 표를 만들었다. 이로써 '각의' 사인함수를 최초로 취급한, 현대적인 사인 개념이 출현하였다:

3) 종래의 Archimedes는 '원의 측정'에서 근삿값 대신에, 매우 정확하게 분수와 부등식을 고수했다. 부등식은 태양중심설의 지지자인 Aristarchos에서 비롯되었다: $\frac{\sin x}{\sin y} < \frac{x}{y} (0^\circ < y < x < 90^\circ)$(Toeplitz, 2006: 36-38).

$\sin\alpha = \frac{1}{2} crd2\alpha$(Crossfield et al., 2009: 126).

인도의 사인은 중심각의 2배와 마주보는 현의 반이었다. 그러나 사인은 아직 비가 아닌, 선분의 '길이'였다.

한편, 사인 값의 정확성, 곧 길이 측정의 정확성은 원의 반지름의 선택에 달려 있었다. 사인 개념은 삼각형의 각을 측정하기 위해 사용한 비율($\frac{c}{r}$)이기 때문에, 반지름(r)은 현(c)을 측정하는 단위가 된다. Aryabhata는 정밀한 측정값을 위해 반지름을 3438로 택하였다:

$3438' = \frac{2\pi r}{2\pi} \fallingdotseq \frac{360 \times 60'}{2 \times 3.1416}$.

이는 원주가 21600개의 단위로 세분될 때, 반지름은 3438개의 공통단위를 가진다는 의미이다. 그러나 곡선의 단위에 의한 선분의 측정이라는 점에서 의문이 제기되었다. π의 통약불가능성, 곧 공통단위의 문제점이 대두된 것이었다(Cajori, 1924: 123-124). 인도인들은 그리스의 논증은 제외하고 계산법만을 발전시켰다. 그리하여 이러한 논리상의 문제를 드러냈고 계산의 정확성도 떨어졌다. 그에 반해, 그리스인들은 논리상의 문제를 회피했었다.

1150년 Bhaskara는 '임의의' 각의 사인을 발견하는 체계를 찾았다. 인도인들은 정확성을 높이려는 요구로 인해 사인, 코사인, 역탄젠트에 대한 무한급수 전개에 이르렀다. 이것은 유럽에 비해 200-300년이 앞선 것이었다.

또한 인도는 중국 수학에 영향을 준다. 중국인들은 주기적으로 반복되는 일식현상, 행성이 항성을 가리거나 태양과 같은 방향에 놓이는 현상에 대한 수치적 패턴을 찾고자 하였다. 인도 천문학자들은 고대서《Surya Shddhanta》나 반현표와 같은 연구 성과를 중국에 전하였다. 그 영향을 받아 724년 활약한 당대 최고의 천문학자 monk I-Hsing은 탄젠트 표를 최초로 만들고 그림자계산법의 형식적인 방법을 찾았다(Crossfield et al., 2009: 8). 후대에도 동양에서는 그림자계산법이 발견된다. 우리나라는 16세기 임꺽정의 모사, 서림이 활용한 망해도법(望海圖法)이 있었다.

이상으로부터 기하학적 삼각비는 비가 아니라, 원에서 현의 '길이'가 되었다. 즉 Ptolemy의 사인은 원의 반지름을 단위로 하였을 때 수직인 현의 길이를 측정한 값($\frac{c}{r}$)이다. 각이 같음에 의한 닮음관계, 작은 각일 때 사인의 선형관계를 확인한 바, 개념적으로 통합적인 관계가 중요했음을 알 수 있다. 곧 닮음을 비례관계로 계산한 것은 Euclid 방식과 같으며, 기하만이 아니라 기하대수가 통합된 것이다. 선형성으로부터 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$임을 유추할 수 있다. 따라서 각$\theta$의 측정을 이미 호도법과 같은 원리로 하였다고 볼 수 있다. 각의 개념은 약하거나 빠져 있었고, 대신에 어떤 척도[4]로 잰 호의 길이를 보았다. 후대 Legendre(1863)의 교과서에도 삼각비를 '원호의 길이'에 대한 비로 정의하였다. 그러므로 호도법의 실수화는 길이를 통해 실수와의 일대일대응으로서 자연스럽게 이루어진 것이라 할 수 있다. 다음 절에서는 삼각비의 표에 수 개념을 적용한 단계를 알아본다.

3. 직각삼각형의 비

산술적 단계는 삼각비의 표가 십진소수 표기(decimal notation)에 의해 정교해진 단계이다. 이 시기에는 시컨트가 항해술에서 등장한다.

수학의 발달사를 볼 때, 인도는 계산 수학을 발전시켰고, 아라비아는 중세시대 동안 문화적

4) 'measure'는 측도 또는 척도를 의미한다. 측정 결과나 길이 등의 크기를 의미할 때는 전자로, 측정 기준 및 단위를 나타낼 때는 후자로 쓴다(장혜원, 2005: 1).

전통의 수호자로서 그리스의 기하학과 인도의 계산을 융합시켰다. 1250년경부터 16세기에 이르러서는 수학의 주도권이 확실히 서구로 넘어갔다. 기하와 계산은 부분적으로 분리되고 부분적으로 융합되었다. 혼란스럽게 뒤엉킨 부분도 있다(Toeplitz, 2006: 198).

삼각법 역시 기하학에서 수치적이고 계산적인 기술로 발달하며, '직각삼각형을 이용한 삼각비(right triangle trigonometry)'가 된다. 1200-1500년 사이에는 유럽의 종교로 인한 암흑기로 큰 발전이 없었다. 15세기까지 천문학의 필요에 의해 발전한 것이었다. 15세기부터 16세기 초반에 독일이 무역국으로 성장하고 항해학, 달력제작, 천문학에 더 관심을 가지면서 삼각법을 다시 부흥시켰다. 15세기 Regiomontanus가 《Almagest》를 비로소 이해하였고, 그 기반 위에서 지동설이 탄생한다. 1579년 Viète와 1585년 Stevin이 소수점을 창안함에 따라 삼각비의 표는 십진소수의 형태로 체계화되었다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하는 방법에 따라 곱셈, 나눗셈, 제곱근과 같은 계산을 간단히 해 주는 사인 표와 소수 계산 방법이 알려져 있었으나, 16세기 후반 천문학과 항해학에서의 필요 때문에 이 방법을 더 정교하게 발전시켜야 했다. 근삿값이 원하는 만큼 정확하려면 결국 무한과정을 따라야 했다. 따라서 무한소수를 통해 삼각비는 '산술화'가 시도되었다. 이러한 기하와 산술 계산이 융합되는 역사는 상당히 길다(ibid., 23-24; 136; Adamek et al., 2005).

8세기 무렵 아라비아는 인도의 삼각법을 번역하고 당대의 산술, 대수, 기하와 융합하였으며, 이를 유럽에 전수하는데 기여하였다. 삼각법은 아라비아인들이 대수 다음으로 좋아했던 수학이지만, 여전히 천문학의 하위 도구였다. 이슬람교의 기도방향을 찾는 종교적인 목적에서도 삼각법을 연구하였다.

860년 무렵 아라비아인들은 그림자 표를 나타내면서 탄젠트와 코탄젠트(umbrae)를 '비'로 다루었다.[5] 새로운 공식과 함수들을 추가하고 그리스, 인도, 아라비아의 발견을 통합하였다. Al-Battani는 사인과 탄젠트 표를 만들고 태양의 고도를 나타내는 공식을 찾았다. umbrae표에 코사인 없이, 공식화된 사인만을 이용하였다:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)}.$$

이는 탄젠트 '비'를 처음 다룬 것이었다(Rosińska, 2006). 10세기 최고의 수학자 Abu'l-Wefa는 단위원의 호에 대한 삼각함수로 발전시켰다. 11세기 al-Biruni는 인도의 그림자계산법을 저술하고, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$을 그림자에 의해 정의하였다. 아라비아인들은 13세기부터 여섯 가지 삼각비를 양(quantities)으로서 모두 사용하였다. 1250년경 Nasir는 천문학과 최초로 분리된 수학적인 삼각법을 집필하며, 평면과 구면을 모두 다루었다.

아라비아의 삼각법은 여섯 가지 삼각함수가 점차 정착되었다. 사인법칙과 그 외 삼각항등식은 일반삼각형의 해법으로 발달하였다. 세변을 알 때, 세각을 알 때 등의 방법을 구별하였다. 보간법에 의한 삼각비 표의 재척도(rescaling)는 반지름을 변화시켰다. 십진소수 표기는 오늘날 각의 육십분법과 삼각비의 십진법을 쓰는 혼합단위의 기원이었다. 천문학 외에 광학과 측량술에서도 삼각비를 활용하였다.

유럽은 12세기 무렵 라틴수학자들이 그리스, 인도, 아라비아의 수학을 번역함으로써, 천문학에 예속된 삼각법을 알게 되었다. 1220년 Fibonacci는 아라비아의 성과를 모았다. 유럽의 삼각법은 1533년 Regiomontanus에 의해 본격적으로 시작되었다. 구면 및 평면 삼각법을 유럽에서 최초로 체계화하였으며, 그 결과 16세기 폴란드와 독일

5) umbra는 그늘(shade) 이나 그림자(shadow)를 뜻하는 라틴어이다.

을 중심으로 하는 수학과 천문학의 새로운 시대, 곧 지동설을 예고하였다. 17세기가 되자 Ptolemy의 천동설은 발달한 망원경의 관측에 맞추기 위하여 주전원[6]이 무려 77개나 필요하게 된다. 천문학자들에게 사인과 정시의 표를 다시 작성하는 일이 고된 작업이었으나, 천체 운동에 관한 Ptolemy의 모델을 개선하기 위한 계속적인 요구가 있었다. 보다 단순화된 모델에 대한 요구가 삼각법의 발달을 이끈 결과, Copernicus가 시작하고 Kepler가 완성하는 지동설이 된다. 마침내 1545년 Copernicus는 천문학에 필요한 모든 삼각법을 수집하였으며, 태양중심설을 주장하였다. 당시의 과학 공동체는 Copernicus 이론에 의한 문화적 패러다임의 전환에 대해 논쟁하고 있었다. 그래서 점점 더 정확한 계산을 요구하였다.

삼각비를 직각삼각형의 비로 여기게 되는 것은 16세기가 되어서야 가능해진다. Copernicus의 제자 Rheticus는 삼각비를 원호 대신에, '직각삼각형 길이비의 양(trigonometric quantities)'으로서 최초로 정의하였다. Rheticus의 사인과 코사인 표는 원의 반지름을 10^7으로 취하여 소수 7자리까지 정확하게 일치하였다. 각을 $10''$간격으로 잘라 Ptolemy의 표보다 90배 더 조밀해졌다. 1700년 무렵 소수 15자리까지의 표가 현대적 십진소수 표기 없이 수작업으로 완성되었다(Crossfield et al., 2009: 7-9).

한편, 사인의 용어는 현에 해당하는 인도어를, 아라비아인들은 소리 나는 발음에 맞춰 bosom(가슴)으로 번역하였고, 다시 라틴어로 sinus라 해석한 것이다(Freudenthal, 1983: 518). 사인의 기호표기, $\sin^2\phi$는 수학자들 사이에서 논란을 불러일으키기도 했다. Gauss는 $(\sin\phi)^2$을 주장하면서 $\sin(\sin\phi)$와 혼동을 면할 수 있다고 하였다. 오늘날에도 이러한 표기 혼란의 가능성은 여전히 남아 있다(Maor, 2003: 60-61).

이상으로부터 산술적 삼각비는 원호에서 벗어나, '비를 측정하는 삼각형의 양'이 되었다. 즉 직각삼각형의 길이 비를 근사하는 크기(magnitudes)이다. 따라서 개념적 본질은 '직각삼각형의 비'라 할 수 있다. 이는 기하와 산술이 통합된 것이다. 그러나 직각삼각형에서 양화(quantification)의 계산에 집중한 결과, 각의 측정은 간과되었다.

이 장에서 살펴본 바와 같이 실용적인 계산은 천문학의 보조 지식으로서 삼각법이었다. 그래서 바빌로니아 이래 60분법 소수를 사용하였고, 통약불가능한 크기도 유한소수로 나타낸 근삿값이었다. 큰 수의 산술연산을 위해 특별한 계산 기법을 발명한 것이었으며, 비례론을 적용하였다. 사인, 정시, umbrae를 더 많이 요구하였다(Rosińska, 2006: 11). 형식화된 것은 '직각삼각형의 비'임을 확인하였다. 또한 직각삼각형은 천문관측의 이면에 마치 그림자처럼 있었다(Crossfield et al., 2009: 29). 다음 장에서는 이론적인 함수의 발달을 살펴본다.

Ⅲ. 이론적인 해석학적 함수

이 장에서는 이론적 함수에 관한 역사적 분석을 통해 삼각함수 개념이 해석학적 단계를 어떻게 거쳐 발달했는지 개념형성의 과정을 고찰한다.

1. 대수와의 통합

대수적 단계는 삼각비가 방정식의 해법에 사용된 단계이다. 대수방정식의 해로서 삼각비는 더 이상 근삿값이 아니라, 기호화된 대상이 된다.

6) 원에 매달린 작은 원을 말한다. 어느 원의 원주 위를 도는 점을 중심으로 하여, 다시 또 하나의 작은 원을 부여할 때 이 작은 원을 주전원이라고 한다. 당시에는 천체의 운동을 원운동의 조합에 의해 설명하려고 고안하였다(http://terms.naver.com).

Viète는 대수 기호주의의 창시자이다. Rheticus의 사후 3년인 1579년에 Viète는 여섯 가지 삼각함수를 이용한 삼각형의 해법을 최초로 출판하였다. 대수와 함수로부터 접근하고 일반적인 연구를 한 것이다. Regiomontanus와 Rheticus의 성과에 근거하여 삼각법을 더 추상화하였다. 각의 함수로서 삼각비의 표를 십진소수로 작성한 것이다. 삼각형과의 연관성에서 벗어나고 '각의 측정법(goniometry)'으로 일반화하였다. 예컨대, 배각공식을 일반화한 것이다:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} cos^{n-2} x sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} cos^{n-4} x sin^4 x - \cdots$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} cos^{n-3} x sin^3 x + \cdots$$

또한 고대에 제기된 각의 삼등분선의 작도불가능성에 대한 이유를 설명하도록 기여하였다. 코사인의 배각공식에서 삼차방정식이 유도됨을 알아낸 것이다(Boyer & Merzbach, 2000: 501-507).

삼각항등식은 유럽에 널리 보급되었다. 삼각함수는 계산보다 더 중요해졌다. 여러 공식에 의해 삼각함수 사이의 관계에 중점을 둔 것이다. 수학자들은 알려진 공식을 재조직하고 책 기록을 통해 이용가능하게 하였다. 특히 prostaphaeresis[7]라는 '곱을 합으로 바꾸는 공식, $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$'은 로그발명에 영감을 주었다. Napier는 삼각법의 발상에 의해 일반적인 곱셈을 덧셈으로 바꾸는 로가리즘 표를 발명하였다(Crossfield et al., 2009: 9).

이상으로부터 대수적 삼각비는 삼각형 또는 크기에서 벗어나, 이상적인(imaginary) 수가 되었다. 유럽의 기호화로 인해 대수와 함수가 통합되었음을 확인하였다. 기호는 종래의 장황하고 혼란스럽던 용어를 언어적 규칙과 일상 언어로 바꿔주었다. 기호가 도입되면서 간결해진 것이다. 또한 해결 불가능한 문제가 대수적으로 입증되자 삼각함수로 관심을 돌렸다(Adamek et al, 2005). 다음 절에서는 삼각함수의 각을 복소수로 확장하는 단계를 알아본다.

2. 해석학적 주기함수

해석학적 단계는 각의 함수가 무한급수와 복소수를 포함하게 된 단계이다. 비를 함수로 표현한 삼각함수는 각을 복소수 정역까지 확장하고 형식화된 관계의 대상이 된다.

대수와 통합된 마지막 진보는 함수의 탐구를 통한 해석학으로의 발전이다. 심장 박동부터 계절에 이르는 반복현상은 주기성(periodicity)의 관념을 창안하였다. 삼각함수는 '원함수(circular functions) 또는 주기함수'가 되었다. 16-17세기에는 천체의 궤도, 진자, 소리, 빛, 바이올린의 진동현과 같은 주기현상을 탐구하였다. 무한소 미적분학의 발명은 삼각함수의 빠른 종말을 고했으며, 복소수 정역의 발견으로 인해 해석학에 포함시켰다(Kennedy, 1989: 334).

1635년 Roberval이 최초의 사인그래프를 출판하였다. 이를 반-아치형(half arch) 그래프로 나타낸 것은 '계산'에서 '함수'로의 변화를 의미한다. Bernoulli 형제들은 삼각법을 복소수의 함수로 확장하였다. Euler는 해석학적 삼각법의 창시자이다. 1748년 저서에서 사인은 '비를 표현하는 수치(numeric value), 곧 단위원의 좌표 또는 무한급수의 합'이 되었다. 이는 '원함수 개념의 형식적인 출현'을 의미한다. 사인과 코사인은 주기적인 원함수가 되었다. 반면, 이전 논문에서는 사인과 코사인 함수를 미분방정식의 해법에 사용했었다. Euler는 수학사학자 Calinger가 말하기를 "해석학적 삼각법의 가장 기본적인 항등식"

7) 합과 차를 의미하는 그리스어이다.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

을 찾았다. 그 결과는

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

이다. 오늘날 현대표기의 대부분을 제시하였다. 축약형 기호 sin, cos, tang, cot, sec, cosec은 표준이 되었다. 0(zero), 1(unity), π, 삼각법, 복소수, 무한급수도 포함하였다.

또한 정17각형의 작도가 가능한 이유를 설명하였다. 1796년 18세 된 Gauss는 복소수와 삼각법을 이용한 증명을 해냈다.

Fourier의 열 물리학에 관한 업적은 19세기 말부터 20세기 초까지 수학적 반성을 촉발시켰다. Fourier는 우주의 기본성질로서 열을 보았고, 특정 형태를 갖는 대상에서 열 확산에 대한 모델을 찾았다. 1822년 저서에 임의의 함수는 배각의 사인과 코사인을 더하는 무한급수로 나타낼 수 있음을 증명하였다. 그 결과 수학자들은 논리적 엄밀성과 추상적 일반화를 확보함으로써, 함수론이라는 새로운 영역을 창안하고 미적분학의 기초를 다졌다. 그리하여 Dirichlet의 오늘날 함수의 정의, Riemann과 Lebesgue의 적분 개념의 명료화, Cantor의 무한집합 관념에 의미를 부여하는데 기여하였다. Fourier 급수에 대한 정확한 증명 절차는 수학의 심오한 근원을 검토하고 통합하도록 하였다. 삼각함수의 항으로 표현된 열의 물리학은 수학에서 함수, 집합, 무한의 일반화를 전개한 것이었다(Crossfield et al., 2009: 9-10).

이상으로부터 해석학적 삼각비는 각의 사상이 되었다. 추상화된 결과는 주기성을 탐구하고 '원을 이용한 삼각함수(circle trigonometry)'가 되었다. 원함수 개념의 형식화된 결과는 '단위원의 좌표 또는 무한급수의 합'이 된다. 따라서 해석이 통합된 것이라 할 수 있다.

이 장에서 살펴본 바와 같이 이론적인 함수는 수학적으로 추상화, 형식화된 삼각법이었다. 해석학적 삼각법은 삼각함수의 일반적인 성질과 관계를 다루는 것이다(Legendre, 1863: 51). 형식화된 것은 '주기성'임을 확인하였다. 역사적으로 해석학적 삼각함수는 기계론적 세계관이 새롭게 뿌리내려, 운동에 관한 연구를 위해 주기현상을 표현해낼 수 있는 수학적 도구가 된 것이다.

Ⅳ. 논의 및 결론

이글에서는 삼각함수가 어떤 단계를 거쳐 발달해 왔는지 역사에서 나타난 개념적인 수학화 과정을 분석하였다. 이상과 같은 역사적 분석 결과, 비를 측정하는 선분(lines 또는 호의 삼각선)에서, 비를 나타내는 수치(numbers 또는 각의 함수)로 발달하였으며, 이 과정에서 기하, 산술, 대수, 해석이 통합되었음을 확인하였다. 또한 실제적 계산에서 이론적 함수로 발달한 결과, 형식화된 것은 주기성임을 알았다. 이로부터 도출된 논점은 다음과 같다.

첫째, 실제적 계산은 삼각비 자체보다는 '삼각법'을 닮음의 원리에 의해 관계적 구조적으로 다루어야 한다. 역사적으로 천문학의 삼각비는 천문학에 관한 구면삼각형의 '해법'이었다. 기하학적 삼각법은 삼각형의 해법을 다루는 것이다 (Legendre, 1863: 17). Adamek et al.(2005)은 삼각법이 궁극적으로 직각삼각형의 탐구로부터 닮은 삼각형의 탐구로 발달하였다고 하였다. 하나의 대상인 직각삼각형에서부터, 그 변과 각의 측정 사이의 관계를 적용함으로써, 관계적 구조인 닮은 삼각형으로 대상을 변화하였다는 것이다. 이 글에서 삼각비의 표를 계산하고 삼각법의 해법에 사용하는 편리한 절차나 규칙이 있었음을 확인하였다. 우리가 흔히 상식적으로 알았던 것은 삼각비의 본질이 직각삼각형의 비(right triangle ratios)라는 것이었으나, 역사적 분석을 통해 더 알 수 있는 것은 '닮은 삼각형의 일반적인 해법

이 되는' 직각삼각형의 비가 그 개념적 본질이 되었다는 것이다. 이는 미적분법이 운동의 변화를 계산하는 일반적인 방법이 된 것처럼, 삼각법도 여러 삼각형을 일관되게 다루는 계산법인 것이다. 그리고 일관된 방법은 바로 다름 아닌 닮음의 원리라 할 수 있다.

그러나 대부분의 교과서는 기본적인 삼각비를 정의하고, Euclid 기하에 의해 $30°, 45°, 60°$의 삼각비를 계산한 다음, 일반각의 삼각비는 표나 계산기 또는 시각적으로 선분을 이용한다. 그로 인해 학생들은 삼각항등식의 용도를 모른다(Katz, 2000: 253).

초기 목적으로 돌아가 보면, $1°$~$90°$의 모든 정수 각에 대한 삼각비를 계산하는 것이었음을 확인하였다. 반각이나 차의 공식은 이 계산에 필요했다. $\sin 1°$가 어려웠으나, 작은 각에 대한 사인의 선형성에 의해 해결하였음을 확인하였다. 사실 그 어려움은 각의 삼등분선과 관련된 것이다. 삼각비의 표는 삼각형의 해법에 사용되었음을 확인하였다. 또한 사인 비와 $\frac{\text{높이}}{\text{빗변}}$가 임의적(arbitrary) 대응이 아니었음을 확인하였다. 천문학의 실용적 필요도, 수학적 의미도 사인 비를 '현을 반지름으로 나눈 분수'로 규정한 적절한 이유가 있었음을 알았다. 그러므로 교수학적으로 주어진 θ에 대한 삼각비가 얼마인가에 주목할 것이 아니라, 이를 닮음관계에 적용하는 삼각법에 주목해야 할 것이다. 예를 들어, 닮음의 동치 구조에서 닮은 직각삼각형을 인식하고(awareness of similarity) 각이 같음을(sameness of the angles) 포착하는 것에서 시작되어야 한다(Watson, 2009).

둘째, 삼각비에서 삼각함수로의 개념적인 일반화는 역사적으로도 확인된 인식론적 장애로 인정되어야 하며, 역사에서 드러난 통합을 강조하는 방향으로 개선되어야 한다. 이글에서 기하, 산술, 대수, 해석으로 범주화(categorization)된 삼각법은 새로운 방식의 캡슐화(encapsulation)와 정의(definition)를 통해 새 맥락에 더욱 정교하게 확장되어온 개념의 발생과정을 확인하였다. 우리가 흔히 삼각비에서 삼각함수로의 이행이 학생들에게 부자연스럽다는 것은 알고 있었으나, 역사적 분석을 통해 더 알 수 있는 것은 이러한 세 가지 유형의 압축 과정(Tall, 2013)이 인식론적 장애로 인정되었다는 것이다. 이를 극복하는 방안으로 비, 단위원, 무한급수 등 다양한 대안 정의가 변화하면서 수학의 고전적 분야인 기하, 산술, 대수, 해석이 통합되었음을 착안해야 함을 확인하였다. 통합의 과정은 결정체적 구조(crystalline structure)에 도달하기 이전에 지식의 압축(condensation: Sfard, 1991; compression: Tall, 2013)에 해당하므로, 학생들에게 어려울 수밖에 없다. 압축 과정을 촉진하려면, 불필요한 세부사항에 주의를 돌리지 말고 개념의 본질적인 아이디어, 곧 결정체적 구조를 생각해야 한다. 이는 심리학적으로 Poincaré가 말한 과학적 심미안, Hadamard(1978)가 말한 유익한 결합의 판별이자 선택, 뇌 생리학에서 말하는 뉴런 구조의 선택적 결합(selective binding: Tall, 2013)과 연결된다. 따라서 삼각함수로의 일반화의 본질이 무엇인지 알 수 없는 학생들에게 난관인 것이다.

그러나 대부분의 교과서는 예각에 대해 직각삼각형의 비를 구하고, 직각 이상, 평각 이상, 음의 각에 대해 회전각을 정의한 다음, 단위원의 좌표를 이용한다. 그로 인해 학생들은 직각삼각형의 길이가 음수가 되는 이유를 모른다.

이글에서 실제적 기하학적 계산과 이론적 해석학적 함수로 구분한 바와 같이, 삼각비와 삼각함수는 체계가 다름을 확인하였다. 인식론적 장애와 관련하여, 각의 실수화는 가장 중요한 요소이다(송은영, 2008 등). 각을 측정하기 위한 호와 사인의 발생개념은 길이였음을 확인하였다. 그러면 길이의 실수화는 자연스러운 연결이 된다. 삼각법은 각의 측도를 선형 측도로 바꾸어 주는

과정이다(Lane, 2001: 송은영, 2008: 88에서 재인용). '호를 반지름으로 나눈 분수'는 각의 크기를 측정하기 위한 적절한 이론적 수단이었다(Whitehead, 2009). 이러한 호도법은 비의 값이, 기하학적으로는 길이였음을 간과한 것이라 할 수 있다.

따라서 삼각비에서 삼각함수로의 이행은 각의 일반화 정도가 아니라, 새로운 체계에서의 개념적인 세련화 또는 개념의 발전적인 일반화로 보아야 한다. 그러므로 교수학적으로 삼각형을 다루는 Euclid 기하학에서부터, 원을 이용한 각의 함수로, 그리고 다시 무한급수와 복소수를 포함하는 해석학적 삼각함수로 의미가 크게 변화함에 주목해야 할 것이다. 각의 실수화에서 실수로의 확장은 부호가 있는 수(signed numbers)의 산술로 변화해야 하며, 그리고 다시 복소수로의 확장은 무한급수와 편각(argument)으로 이해를 넓혀야 하는 것이다(Tall, 2013). 예를 들어, 다음과 같은 활동을 통해 각에 따라 삼각비가 변화한다는 심상의 형성에서 시작하면, 삼각비와 삼각함수 사이의 불연속적인 틈을 메울 수 있다:

> 빗변이 일정한 직각삼각형에서 각이 점점 커지면 어떤 일이 일어날까?
> -밑변이 짧아지고 높이가 길어짐으로써 탄젠트비는 커진다(Katz, 2000: 252).

삼각함수는 수학의 유용성을 경험하는 소재이다. 즉, 수학의 이론과 응용이라는 두 측면 모두에 지대한 영향을 미친, 보편과학이 실용 분야에서도 유익하게 활용된 수많은 예들 중 하나라 할 수 있다. 천문학에서 시작된 삼각비는 여러 분야에서 측정이 불가능했던 것들을 계산해냈고, 오늘날 첨단과학 속 깊은 곳까지 자리 잡고 있다. 현대에는 삼각함수가 음악부터 심리학에 이르기까지 세상을 움직이는 다양한 얼굴로 응용되고 있다. 삼각법을 유래로 한 삼각함수는 삼각형의 해법에 필요하며, 주기현상에 관한 수학적 모델링의 기초가 된다.

또한 삼각함수는 천문학적 관측의 정확성을 높여주는 표를 구축하고, 표 자체를 수학적 연구 대상으로 함으로써 그들 사이의 관계를 정립하는 방향으로 발달해왔다는 점이 확인되었다. 이는 삼각함수 개념이 응용과 이론을 통합하는 융합 과제로 다루어질 수 있음을 의미하며, 최근 STEAM(Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics)에 관심을 두고 있다는 면에서 중요한 시사점을 제공한다고 제언을 할 수 있다. 천문학과 통합하는 STEAM 과제설정에 대해서는 심층적인 분석이 이루어져야 할 것이다. 이글에서 역사적 분석을 통해 논의한 교육적 시사점은 학습-지도에서 그 개념적 본질이 훼손되지 않도록 의미를 찾고 삼각함수로의 일반화를 돕기 위한 유용한 토대가 될 것으로 기대한다.

참고문헌

강미광(2011). 호도법에 관한 교수학적 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 50**(3), 355-365.

김부윤, 정영우(2010). 삼각함수의 Mathematization에 관한 연구. *East Asian Matheamtical Journal, 26*(4), 487-507.

송은영(2008). **삼각함수 개념의 지도에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.

송일선(2009). **삼각함수에 대한 개념 이해와 오류에 관한 연구.** 강원대학교 대학원 석사학위논문.

장혜원(2011). Stevin의 <소수>의 수학사적 의의와 수학교육적 함의. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 21**(2), 121-134.

조정수(2008). 고등학교 일반각의 삼각 함수값

구하기에 대한 교수법적 분석과 논의. **한국 수학교육학회지 시리즈E <수학교육 논문집>, 22**(3), 289-310.

Adamek, T., Penkalski, K., & Valentine, G. (2005). *The History of Trigonometry.* Available from: www.math.rutgers.edu/~~mjraman/History_of_Trig.pdf.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). **수학의 역사, 상.** (양영오, 조윤동, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).

Cajori, F. (1983). **수학의 역사.** (정지호, 역). 서울: 창원사. (영어 원작은 1925년 출판).

Clairaut, A. C. (2005). **기하학 원론.** (장혜원, 역). 서울: 경문사. (불어 원작은 1741년 출판).

Crossfield, D., Shepherd, C., Stein R., & Williams, G. (2009). *Trigonometry.* Historical Modules Project (Funded by the National Science Foundation). Washington, DC: Mathematical Association of America. Available from: http://www.coursehero.com/file/2894685/Trigonometry/

David, E. S. (1925). Trigonometry. In: *History of mathematics, vol. II: Special topics of elementary mathematics* (pp.600-633). Universal Library.

David, T. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics.* New York: Cambridge university press.

Euclid & Heath, T. (1998). **기하학원론.** (이무현, 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1908년 출판).

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Hadamard, J. (1978). **수학 분야에서의 발명의 심리학.** (정계섭, 역). 서울: 범양사. (불어 원작은 1945년 출판).

Katz, V. J. (2000). Trigonometry in the historical order. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 252-253). Dordrecht: Kluwer.

Kennedy, E. S. (1989). The history of trigonometry. In Baumgart, J. K., Deal, D. E., Vogeli, B. R., & Hallerberg, A. E. (Eds.), *Historical topics for the mathematics classroom* (pp.333-375). Reston, Virginia: NCTM.

Legendre, A. M. (1863). *Elements of geometry and trigonometry, from the works of A. M. Legendre:* Adapted to the course of mathematical instruction in the United States, by Charles Davies. New York: Barnes & Burr.

Maor, E. (2003). **사인 코사인의 즐거움.** (조윤정, 역). 서울: 파스칼북스. (영어 원작은 1998년 출판).

Priestley, W. M. (1998). *Calculus: a liberal art.* New-York: Springer-Verlag.

Rosińska, G. (2006). “Mathematics for astronomy” at unuversities in Copernicus’ time: modern attitudes toward ancient problems. In: M. Feingold & Navarro-Brotóns (Eds.), *Universities and Science in the Early Modern Period* (pp. 9-28). Netherlands: Springer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Swokowski, E. (1967). *Algebra and trigonometry.* Boston: Prindle, Weber & Schmidt.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically:* Exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge university press.

Toeplitz, O. (2006). **퇴플리츠의 미분적분학.** (우

정호, 임재훈, 박경미, 이경화, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1963년 출판).

Watson, A. (2008). Working group on trigonometry: meeting1. In: M. Joubert (Ed.), *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics 28*(3), November 2008(pp.148-150).

Watson, A. (2009). Working group on trigonometry: meeting3. In: M. Joubert (Ed.), *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics 29*(2), November 2008(pp.148-150).

Whitehead, A. N. (2009). **화이트헤드의 수학이란 무엇인가.** (오채환, 역). 서울: 궁리. (영어 원작은 1948년 출판).

Yi, J., Yoo, J. & Lee, K. (2013). Toward Students' full Understanding of Trigonometric Ratios. *Research in Mathematical Education, 17*(1), 63-78.

A Historical Analysis on Trigonometric Functions

Yoo, Jae Geun (Graduate School, Seoul National University)

The purpose of this paper is that it analyzes the historical development of the concept of trigonometric functions and discuss some didactical implications. The results of the study are as follows. First, the concept of trigonometric functions is developed from line segments measuring ratios to numbers representing the ratios. Geometry, arithmetic, algebra and analysis has been integrated in this process. Secondly, as a result of developing from practical calculation to theoretical function, periodicity is formalized, but 'trigonometry' is overlooked. Third, it must be taught trigonometry relationally and structurally by the principle of similarity. Fourth, the conceptual generalization of trigonometric functions must be recognized as epistemological obstacle, and it should be improved to emphasize the integration revealed in history. The results of these studies provide some useful suggestions to teaching and learning of trigonometry.

* Key Words : trigonometric functions(삼각함수), trigonometry(삼각법), history of mathematics(수학사), epistemological obstacle(인식론적 장애), similarity(닮음), radius angle(호도법)

논문접수 : 2014. 10. 10
논문수정 : 2014. 11. 19
심사완료 : 2014. 11. 19