대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 4, 595 ~ 605. Nov 2014

무한소수 기호: 불투명성과 투명성

이 지 현*

소수점 아래 0에서 9까지의 임의의 숫자가 무한히 나열되는 무한소수는 '소수점 아래 끝자리까지의 모든 숫자를 명확하게 알 수 없는 모호한 수'라는 불투명성을 가지고 있다. 이 논문에서는 이와 같은 불투명성을 야기하는 무한소수 기호로부터 어떻게 연속적인 수를 창조할 수 있었는지를 분석하였다. 무한소수 기호의 완비성 공리에 대한 투명성에 의존하여, 실수 개념이 엄밀하게 형식화되기 이전에도 수학자들은 실수 개념을 다룰 수 있었다. 이 논문의 수학적·역사적 분석은 무한소수에 의존하여 실수 개념을 전개하는 학교수학의 접근과, 완비순서체로서의 실수의 형식적 정의를 다루는 대학수학의 접근 사이에서 야기될 수 있는 이중단절의 문제를 극복하는 데 도움이 될 수 있을 것이다.

Ⅰ. 서 론

해석학에서는 실수를 '완비순서체(complete ordered field)'의 공리체계, 혹은 이 공리체계를 만족하는 데데킨트 절단, 유리수 코시수열의 동치류 등으로 정의한다. 그러나 실수의 형식적 정의를 배우지 않는 중고등학생들에게 실수의 중요한 개념 이미지를 형성하는 것은 바로 실수에 대한 표상(representation)이다(Zazkis, 2005). 학교수학에서 다루는 실수의 직관적인 표상은 바로 다음과 같은 기호로 정의되는 무한소수이다.

$$\pm a_0.a_1a_2a_3\cdots\cdots$$

소수점 왼쪽의 a_0는 정수,
소수점 오른쪽의 $a_1, a_2, \cdots\cdots$은 무한 혹은
유한개의 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 digit

그러나 소수점 아래에 0에서 9까지의 임의의 숫자가 무한히 나열되는 무한소수는 그것이 나타내는 수가 정확히 무엇인지를 투명하게 보여주지 않는다. 이와 같은 불투명성이 무한소수로 표상된 수의 수용에 장애요인으로 작용한다는 것을 여러 연구에서 확인할 수 있다. 수는 정수와 같이 완결된 유한한 표상을 가져야 한다고 생각하는 학생들은 무한소수를 '수'라고 인정하지 않는다(Savizi, Semnani, Zadeh, 2013; Fischbein, Jehiam, Cohen, 1995). 통약가능성을 믿었던 피타고라스학파에게 무리수가 비합리적인 수(unreasonable number)였듯이, 학생들은 소수점 아래에 숫자가 무한히 나열되는 무한소수는 그것을 정확히 지시할 수 없으므로 비합리적인 수라고 생각한다(Fischbein, Jehiam, Cohen, 1995). 학생들은 정수 혹은 유리수가 1=0.999…와 같이 순환소수라는 동치 무한 표상을 가진다는 것을 쉽게 수용하지 못하며(Tall, Schwarzenberger, 1978; Sierpińska,

* 인천대학교, jihyunlee@incheon.ac.kr

1987), 특히 비순환 무한소수는 무리수에 대해 ‘정확한 값을 가질 수 없는 모호한 수’라는 개념 이미지를 구축하는 원인이다(Fischbein, Jehiam, Cohen, 1995; Zazkis, Sirotic, 2010; Savizi, Semnani, Zadeh, 2013).

이상과 같이 학생들에게 무한소수는 실수를 표상한다고 가정되는 모호하고 불투명한 기호에 지나지 않는다. 그러나 19세기 말 엄밀한 실수 개념이 형식화되기 이전, 수학자들은 실수를 무한소수로 생각함으로서 해석학의 많은 정리를 발견하고 증명할 수 있었다(Katz, K., Katz, M., 2012; Błaszczyk, Katz, Sherry, 2013). 수학자들이 이와 같이 불투명한 수 표상에 의존하여 실수 개념을 생각할 수 있었던 이유는 무엇이었을까? 본 논문은 이 질문과 관련한 문헌연구로서, 무한소수 기호에 내포된 불투명성 뿐 아니라, 무한소수 기호의 구조가 실수의 어떤 성질을 투명하게 보여줄 수 있는지를 분석함으로서 실수가 왜 본질적으로 무한소수라고 할 수 있는지를 살펴본다. 또 실수 개념의 역사에서 무한소수 기호가 어떠한 역할을 수행하였으며 이와 관련된 교과 지식에의 시사점에 대하여 논의한다.

Ⅱ. 무한소수 기호의 불투명성

1. 표상의 투명성과 불투명성

Zazkis, Gadowsky(2001: Zazkis, 2005, p.209에서 재인용)은 특히 수의 표상과 관련하여, 대상의 특정 성질에 대한 표상의 투명성(transparency)과 불투명성(opaqueness)을 다음과 같이 설명하였다. 표상으로부터 대상의 어떤 성질을 볼 수 있거나 유도할 수 있으면, 이 표상은 그 성질에 대하여 투명하다고 할 수 있다. 예를 들어 수 784의 28^2이라는 표상은 이 수가 완전제곱수임을 투명하게 보여주지만, 98의 배수라는 성질에 대해서는 상대적으로 투명하지 않다. 이 수의 또 다른 표상 $13\times60+4$을 생각하면, 이 표상은 13으로 나누었을 때 나머지가 4라는 성질에 대하여 투명하지만 완전제곱수라는 성질에 대해서는 불투명하다.

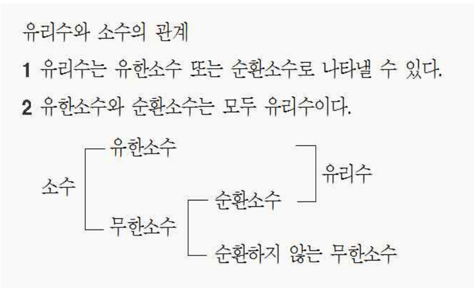
실수의 표상과 관련하여, 분수 표상 $\frac{b}{a}$(a는 0이 아닌 정수, b는 정수)에서 유리수임을 알 수 있듯이, 0.01001000100001…의 ‘비순환 무한소수’라는 표상은 무리수임을 투명하게 보여주고 있다(Zazkis, 2005). 그러나 비순환 무한소수는 유한 표상이 아니므로 조작하기가 쉽지 않다. 따라서 $\sqrt{2}$가 무리수임을 보이는 통상적인 증명에서는, $\sqrt{2}$가 비순환 무한소수 표상을 가진다는 것을 증명하는 것이 아니라, 유리수의 유한 표상 $\frac{b}{a}$을 가진다고 가정하여 모순을 유도한다. Zazkis (2005)는 어떤 수가 무리수임을 투명하게 보여주는 유한 표상이 없다는 점이 많은 학생들이 무리수 개념을 어려워하는 중요한 원인이라고 진단하였다.

2. 학교수학에서의 실수 체계 확장 : 표상에 의존한 확장

학교수학에서 학생들은 자신이 알고 있는 기존 수 체계의 한계를 극복하기 위하여 새로운 수를 포용해야 하는 상황에 반복적으로 직면한다. 예를 들어 자연수의 뺄셈에 대해 닫혀 있지 않다는 한계는 정수로의 확장으로 극복할 수 있다. 이렇게 확장한 정수 역시 나눗셈에 닫혀 있지 않으며, 이 단점으로 유리수로의 확장을 설명할 수 있다. 이와 같이 자연수에서 정수, 또 정수에서 유리수로의 확장은 모두 산술 연산에 충분하지 않다는 점을 확장의 이유로 설명할 수 있다. 그러나 실수뿐만 아니라 유리수 역시 가감

승제가 자유로운 체이므로, 유리수에서 실수로의 확장은 산술 연산으로는 설명할 수 없다(Forbes, 1967).

따라서 학교수학에서는 유리수에서 실수로의 확장을 정당화하기 위하여, 특히 $x^2=2$과 같이 유리수가 아닌 근을 갖는 유리 계수 방정식의 예를 제시한다. 그러나 유리수가 아닌 실수 중에서는 대수적 수인 $\sqrt{2}$와 달리, 유리계수 방정식의 해가 아닌 π와 같은 초월수도 존재한다. 또 실수로 확장하더라도 여전히 $x^2+1=0$과 같은 방정식의 해를 가지고 있지 않다. 따라서 방정식의 근이라는 대수적인 필요성은 실수 체계로의 확장의 이유를 온전히 설명하지 못한다(Bloch, 2011: pp.33-34). 학교수학에서 제시하는 유리수에서 실수로의 확장에 대한 또 다른 정당화는 다음 중학교 교과서의 설명([그림 Ⅱ-1])과 같이 무한소수 표상에 의존하는 것이다.



[그림 Ⅱ-1] 중학교 수학 2의
유리수와 순환소수
(김서령 외, 2014: p.19)

중학교 수학에서는 무한소수 중 순환하는 무한소수와 유한소수가 유리수에 대응한다는 사실을 바탕으로, 순환하지 않는 무한소수에 대응하는 (유리수가 아닌) 새로운 수를 도입한다. 유리수와 무리수를 순환 소수이냐 아니냐에 의하여 구분할 수 있으므로, 무한소수 표상에 의존한 유리수에서 실수로의 확장은 학교수학수준에서 가능한 설명으로 보인다. 그러나 Forbes(1967)는 이러한 설명도 다음과 같은 의문을 남기고 있음을 지적하였다.

> 비순환 무한소수를 생각할 수 있다는 점이, 이러한 기호가 나타내는 수가 정말 있다고 주장할 수 있는 근거가 될 수 있는가? 또한 이 설명대로 비순환 무한소수 기호에 대응되는 어떤 수가 있다고 가정한다면, 이 수는 비순환 무한소수 기호에 대응되는 수’ 라는 것 이외에 어떤 다른 쓸모가 있는가(Forbes, 1967: p.802)?

중학교수학에서는 무한소수 표상의 전체성을 가정하여 유리수에서 실수로 확장하지만, 왜 임의의 무한소수전개가 하나의 수에 대응하도록 수 개념을 확장해야 하는지는 설명하지 않는다. 한편, 무한소수 표상에서의 차이로 유리수와 무리수의 차이를 선언할 수는 있지만, 순환 주기가 존재할 수 없도록 소수점 아래 숫자의 규칙이 주어진 0.01001000100001⋯, 0.123456789⋯와 같은 특수한 무한소수를 제외하고는, 임의의 무한소수가 주어졌을 때 그 소수 표상의 순환·비순환성에 의하여 유리수인지 무리수인지를 실제적으로 판단하다는 것은 사실 불가능하다.

3. 무한소수 기호의 산술적 불투명성

무한소수 기호의 무한성과 임의성은 무한소수를 ‘수’로 수용하는 데 장애요인으로 작용한다. 학생들은 소수점 아래의 무한한 숫자 열을 끝없이 계속되는 과정으로 해석하며, 소수점 아래의 모든 숫자를 알 수 없다는 이유로 무한소수를 수로 인정하지 않는다(Savizi, Semnani, Zadeh, 2013). Peled, Hershkowitz(1999), Savizi, Semnani, Zadeh(2013)는 학생들이 무한순환소수 $0.33\cdots$ 혹은 비순환 무한소수에 대응하는 점이 수직선 위에 있다는 사실을 받아들이기 어려워한다는

것을 보고하고 있다. 무한소수가 야기하는 인식론적 장애는 소수점 아래의 숫자 열이 무한하더라도 규칙성을 가지고 있으며 분수라는 다른 유한 표상도 있는 유리수보다 비순환 무한소수라는 임의적인 무한 표상밖에 없는 무리수에서 더 심각하게 나타난다.

오른쪽 '끝'이 있는 유한소수는 자연수에 대한 십진기수법의 확장으로 볼 수 있으며, 자연수에서와 마찬가지로 두 유한 소수를 계산할 수 있다. 그러나 임의의 두 무한소수에 대해서도 유한소수와 같이 사칙 연산이 가능할 수 있는지를 살펴보기 위하여, 구체적으로 다음과 같은 덧셈을 생각하여 보자.

$$\begin{array}{r} 6.2432357234\cdots \\ +\ 1.9329042765\cdots \\ \hline 8.1761?\cdots \end{array}$$

두 무한소수를 더하는 자연스러운 방법은, 무한소수는 유한소수와 달리 오른쪽 끝자리가 없으므로 가장 왼쪽에서부터 더해 나가는 것이다. 만약 뒷자리로부터의 받아 올림이 발생하면, 이를 반영하여 그 전 자리에 계산했던 숫자를 수정하면서 계산할 수 있다. 이와 같이 계산하면, 이 합의 소수점 넷째 자리까지의 값이 8.1761임을 알 수 있다. 그런데 만약 두 무한소수의 대응하는 자리에서의 숫자 합이 9가 계속된다면, 아무리 큰 자릿수까지 계산한다하더라도 소수점 다섯 번째 자리의 숫자가 무엇인지를 결정할 수 없다. 따라서 이러한 예는 두 무한소수를 자연수 혹은 유리수와 같이 실제적으로 계산한다는 것이 불가능하다는 점을 보여주고 있다[1].

이상과 같이 무한소수는 이것이 지시하는 수가 정확히 무엇인지를 투명하게 보여줄 수 없으며, 따라서 이러한 표상을 가지고 실제적인 계산을 수행한다는 것도 불가능하다. 그렇다면 무한소수 기호가 투명하게 보여줄 수 있는 것은 무엇일까?

Ⅲ. 무한소수 기호의 투명성: 완비성 공리

1. 직선과 수의 연속성

수학에서 연속체(continuum)로 간주하는 대표적인 대상 중 하나는 바로 기하학적인 직선이다. 어떤 수 체계가 연속체로서의 직선의 구조를 기술할 수 있는가라는 문제는, 수학에서 아주 오래된 문제이자 근본적인 문제 중 하나였다. 이 질문에 대한 최초의 답을 제시했던 이들은 바로 고대 그리스의 피타고라스학파로, 그들은 '(연속체를 포함한) 모든 것은 수', 즉 유리수로 기술할 수 있다고 믿었다. 그러나 피타고라스 정리의 결과로 통약 불가능한 선분의 길이, 즉 유리수로는 기술할 수 없는 길이가 존재한다는 것을 발견함으로서 직선을 유리수만으로 기술하는 것은 불가능하다는 결론을 얻고 말았다.

이와 같은 통약 불가능한 양의 발견 이후, 그리스 수학에서는 수(number)와 크기(magnitude)를 엄격하게 구별하였다(변희현, 2005: p.25). 수는 단위의 집합으로 이산적인 본질을 가진 것이었으나, 크기는 연속적인 것 혹은 무한히 분할되는 부분을 갖는 것이었다. 그러나 Stevin(1548-1620)은 *Arithmétique*(1585)에서 이산적인 수(discrete number)와 연속적인 크기(continuous magnitude)라는 그리스의 고전적 구분에 도전하였다. 특히

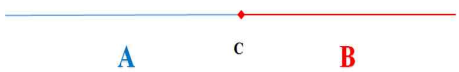
1) Fowler(1985a; 1985b; 1992)는 무한소수도 유한소수와 비슷하게 계산할 수 있을 것이라는 통상적인 기대와 달리, 두 무한소수의 소수점 유한 번째 자리까지의 값으로 그 곱의 소수점 아래 특정 자리의 숫자를 결정할 수 있는 알고리즘은 존재하지 않음을 설명하고 있다.

Stevin이 도입한 무한소수는 결과적으로 연속적인 수(continuous number), 즉 산술적 연속체(numerical continuum)의 개념을 창조하는 계기가 되었다(Neal, 2002: pp.1-3). 그렇다면 연속성이란 과연 무엇인가? 19세기 Dedekind는 직선의 다음 성질이 연속성의 본질이라고 보았다.

> 연속성의 본질은 다음에서 찾을 수 있다: 만약 직선 위의 모든 점을 다음과 같은 두 집합, 첫 번째 집합의 모든 점이 두 번째 집합에 속한 점들의 왼쪽에 위치하도록 나누었을 때, 직선 위의 모든 점을 이 두 집합으로 나누는 절단 점이 오직 하나 존재한다.
> (Dedekind, 2007: p.5)

Dedekind는 수 체계 $\mathbb{R}$의 연속성을 직선의 연속성에 상응하는 다음 성질이라고 생각하였다.

[Dedekind 절단 성질]
공집합이 아닌 $\mathbb{R}$의 두 부분집합 A, B가
$\forall a \in A, b \in B$에 대하여 $a < b$이고
$A \cup B = \mathbb{R}$를 만족하면,
$\forall a \in A, b \in B$에 대하여 $a \leq c \leq b$인
$\mathbb{R}$의 원소 c가 존재한다(Teismann, 2013).



[그림 Ⅲ-1] Dedekind 절단 성질

유리수는 자연수와 달리 임의의 두 유리수 사이에 무한히 많은 유리수가 존재하는 조밀한 수 체계이다. 그런데 다음과 같은 유리수 부분집합 A, B를 고려하자.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x \leq 0 \text{ 또는 } x^2 < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \text{ 그리고 } x^2 > 2\}$$

$x^2 = 2$를 만족하는 유리수 해는 없으며, 집합 A에는 최댓값이, 집합 B에는 최솟값이 존재하지 않으므로 유리수에는 집합 A와 B를 나누는 절단점이 없다(Rudin, 1976: p.2). 따라서 유리수는 직선과 달리 이러한 절단 점을 가지고 있지 않다는 점에서 틈을 가지고 있다. 그런데 Dedekind의 절단 성질에서 집합 A는 위로 유계인 집합이며 절단 점 c가 집합 A의 최소상계임을 주목하면, Dedekind의 절단 성질은 우리가 잘 알고 있는 완비성 공리와 동치임을 쉽게 증명할 수 있다(Teisman, 2013: pp.99-101).

[완비성 공리]
위로 유계이며 비어 있지 않은 집합은 최소상계를 가진다.

실수는 완비성 공리를 만족하는 유일한 순서체라는 점에서 유리수와 구별할 수 있으며, 해석학에서는 완비성 공리에 의하여 유리수에서 실수로의 확장을 설명한다. 이때 완비성 공리는 유리수에서 존재하지 않는 집합 A와 B의 절단 점, 혹은 위로 유계인 집합 A의 최소상계의 존재성을 보장하며, 바로 이 최소 상계 c가 바로 $c^2 = 2$을 만족하는 소위 $\sqrt{2}$가 된다(김성기, 김도한, 계승혁, 2004: p.12)

2. ‘연속적’인 수로서의 무한소수

무한소수의 집합은 유리수와 달리 연속적일 수 있는지를 알아보기 위하여, 완비성 공리를 만족하는지를 살펴보자.

먼저 1=0.999⋯와 같이, 두 무한소수 $x_0.x_1x_2 \cdots x_{k-1}x_k000 \cdots$와 $x_0.x_1x_2 \cdots x_{k-1}(x_k - 1)999 \cdots$ (단, $x_k \neq 0$)는 같다고 간주하자. 또 임의의 무한소수 $x = x_0.x_1x_2 \cdots x_k \cdots$를 소수점 아래 k번째 자리에서 절단한 유한소수를 $[x]_k = x_0.x_1x_2 \cdots x_k$로 표현하면, 무한소수 x와 y의 순서를 다음과 같이 정의할 수 있다(Li, 2011: pp.5-6; Davidson, Donsig, 2010: p.11).

$x \le y \Leftrightarrow\ x = y$ 이거나
$[x]_k < [y]_k$인 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$가 존재한다.

이제 공집합이 아닌 위로 유계인 임의의 무한소수 부분집합 A의 최소상계를 찾아보자. 일반성을 잃지 않고 A가 적어도 하나의 양수를 포함하고 있다고 가정할 수 있는데, 이때 A의 최소 상계는 다음과 같이 찾을 수 있다(Abian, 1981: p.467).

집합 A가 유계이므로, A에 포함된 무한소수들의 정수부분의 최댓값이 존재하며, 이 최댓값을 a_0라 하자.
즉, a_0는 $\max\{x_0 | x_0.x_1x_2\cdots \in A\}$이다.
이때 정수부분이 a_0인 집합 A의 무한소수 중 소수점 첫째 자리의 최대 digit를 a_1, 또 소수점 첫째자리까지의 값이 $a_0.a_1$인 A의 무한소수 중 소수점 둘째 자리의 최대 digit를 a_2라 하자. 이를 반복하면,
소수점 k번째 자리의 최대 digit a_k를
$\max\{x_k | a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}x_kx_{k+1}\cdots \in A\}$로
찾을 수 있으며, 이와 같이 얻은 무한소수 $a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 는 집합 A의 최소상계이다[2).]

위 논증은 소수점 아래에 0부터 9까지의 '임의의' 숫자가 '무한히' 등장하는 무한소수에서는, 위로 유계인 임의의 집합의 최소 상계가 존재한다는 것을 보여주고 있다. 따라서 무한소수는 유리수에서의 틈을 갖지 않는 연속적인 수 체계가 된다. 한편, 무한소수의 기호로부터 최소 상계의 존재성을 유도할 수 있으므로, 무한소수 기호는 바로 완비성 공리라는 실수의 위상적 성질에 대하여 투명한 표상이라고 할 수 있다.

19세기 해석학의 산술화에서 실수가 '완비 순서체'로 엄밀하게 정의되기 이전의 수학자들에게 실수란, Stevin이 도입한 무한소수였다. Abian(1981: p.465)은 완비성 공리를 내포하는 소수 기호의 위력 때문에, 엄밀한 실수 개념이 정립되기 이전에도 Euler, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Lebesgue을 위시한 많은 수학자들이 무한소수 기호에 의존하여 실해석학의 많은 정리에 대한 직관과 증명의 방법을 얻을 수 있었을 것이라고 추측하고 있다. 그렇다면 이와 같은 추측의 개연성을 중간 값 정리의 사례에서 구체적으로 살펴보자.

16세기 Stevin은 무한소수를 이용하여 임의의 다항 방정식 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots.. + a_n$의 근을 찾는 알고리즘을 다음과 같이 제시하였다(Dieudonne, 1991: pp.47-48).

다항함수 $P(x)$가 음이 아닌 어떤 정수 q_0에서 $P(q_0) < 0$, $P(q_0+1) > 0$이라 하자.
이때, $[q_0, q_0+1]$의 10등분점

$$q_0,\ q_0 + \frac{1}{10},\ q_0 + \frac{2}{10},\ \cdots,\ q_0 + \frac{9}{10}$$ 중

$P(q_0 + \frac{q_1}{10}) \le 0$인 최대 digit q_1을 찾을 수 있다.

이때 구간 $[q_0 + \frac{q_1}{10}, q_0 + \frac{q_1+1}{10}]$의

양 끝점의 함수 값은 $P(q_0 + \frac{q_1}{10}) \le 0$이고

$P(q_0 + \frac{q_1+1}{10}) > 0$ 임을 알 수 있다.
같은 방법으로 구간

$[q_0 + \frac{q_1}{10}, q_0 + \frac{q_1+1}{10}]$을 다시 10등분하면,

2) a_k의 선택에 의하여 무한소수 $a = a_0.a_1a_2a_3\cdots$가 A의 상계임은 자명하다. a가 A의 '최소'상계임을 보이기 위하여, a'가 A의 다른 상계라고 가정하자. 음이 아닌 임의의 정수 k에 대하여, 소수점 k번째 자리에서의 절단이 $[a]_k$인 A의 원소 $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$가 존재한다.
따라서 $[a']_k \ge [x]_k = a_0.a_1a_2\cdots a_k = [a_0.a_1a_2\cdots a_k\cdots]_k$이므로, $a' \ge a$. a는 집합 A의 '최소' 상계이다(Li, 2011:p.6).

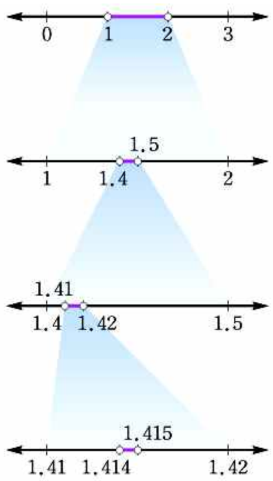
$$q_0+\frac{q_1}{10},\ q_0+\frac{q_1}{10}+\frac{1}{100},\ \cdots,\ q_0+\frac{q_1}{10}+\frac{9}{100}\ \text{중,}$$

$P(q_0+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100})\le 0$을 만족하는 최대 digit q_2를 찾을 수 있다.

Stevin은 이러한 과정을 무한히 반복하여 얻는 무한소수 $q=q_0.q_1q_2\cdots q_k\cdots$를 바로 이 방정식의 근이라고 생각하였다. 이 무한소수에서 각 digit의 선택을 관찰하면, 무한소수 $q=q_0.q_1q_2\cdots q_k\cdots$가 집합 $A=\{x\in[q_0,q_0+1]\mid P(x)\le 0\}$의 최소상계임을 알 수 있다[3]. 한편 Stevin의 알고리즘은 이 다항식을 $P(x)=x^2-2$이라 하면, 중학교 수학 교과서의 $\sqrt{2}$의 무한소수 전개 (<표 Ⅲ-1>)에서도 찾아볼 수 있다.

Cauchy는 Stevin의 무한소수 알고리즘을, 구간 $[a,b]$에서 정의된 $f(a)<0,\ f(b)>0$인 연속함수 f에 적용하였다. 그는 구간 $[a,b]$을 m등분해 얻는 부분구간 $[a_k,b_k]$ 들 중, 양 끝점 a_k와 b_k에서의 함수 값이 $f(a_k)\le 0,\ f(b_k)\ge 0$인 부분구간을 선택하였다. 이와 같이 Cauchy는 부분구간에 대한 '등분'과 '선택'을 반복함으로서, $f(c)=0$를 만족하는 점 c가 구간 $[a,b]$에 존재한다는 것, 즉 중간 값 정리를 증명할 수 있었다[4]. Fearnley-Sander는 Stevin의 무한소수에 대하여 다음과 같이 평가하고 있다.

제곱근의 대소 관계를 이용하여 2의 양의 제곱근 $\sqrt{2}$의 근삿값을 소수로 나타내어 보자.



1 $1^2=1,\ 2^2=4$에서 $1^2<2<2^2$이므로

$\sqrt{1^2}<\sqrt{2}<\sqrt{2^2}$

$\therefore\ 1<\sqrt{2}<2$

2 $1.4^2=1.96,\ 1.5^2=2.25$이므로

$1.4^2<2<1.5^2$

$\therefore\ 1.4<\sqrt{2}<1.5$

3 $1.41^2=1.9881,\ 1.42^2=2.0164$이므로

$1.41^2<2<1.42^2$

$\therefore\ 1.41<\sqrt{2}<1.42$

4 $1.414^2=1.999396,\ 1.415^2=2.002225$이므로

$1.414^2<2<1.415^2$

$\therefore\ 1.414<\sqrt{2}<1.415$

이와 같은 방법으로 계속하면 무리수 $\sqrt{2}$는 1.4142와 1.4143 사이에 있는 수임을 알 수 있고,

$$\sqrt{2}=1.41421356237\cdots$$

과 같이 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 중학교 수학 3의 제곱근의 근삿값(이준열 외, 2012: p.34)

---

3) 함수 P가 이 최소상계 q에서 연속임을 이용하면, $P(q)$는 0임을 증명할 수 있다. 자세한 증명은 Körner (2003: pp.34-35)을 참조할 수 있다.

4) 중간 값 정리에 대한 Cauchy 증명이 Stevin의 무한소수 알고리즘에 뿌리를 두고 있다는 점에서 이를 Stevin-Cauchy의 증명이라고 부르기도 한다(Katz, K., Katz, M., 2012). 한편, Cauchy의 증명은 Grabiner(1983: p.190)에 자세히 소개되어 있으며, Körner(2003: p.15)에서도 Cauchy의 divide and conquer method에 기초한 증명을 찾아볼 수 있다.

> 1600년경 Stevin은 현대적인 실수 개념을 사실상 성취하였으며, 이와 같은 Stevin의 실수 개념은 200년 후 수학에 완전히 흡수되었다 (Fearnley-Sander, 1979: p.809).

그러나 Stevin은 무한소수에 대한 그의 산술적 직관이 엄밀하게 정의되기 위하여 극복해야 했던 개념적인 장애물, 예를 들어 무한소수가 정확히 무엇이며 또 무한소수의 연산은 어떻게 정의될 수 있는가와 같은 문제를 인식하지 못하였다. 하지만 이러한 인식의 한계에도 불구하고 Stevin은 연속성의 본질을 암묵적으로 내포한 무한소수 표상을 발전시켰으며, 수학자들은 무한소수에 의존하여 실수 개념을 다룰 수 있었다. 이러한 이유에서 Błaszczyk, Katz, Sherry(2013: pp.45-49)는, 19세기 Weierstrass·Dedekind·Cantor등에 의하여 실수 개념이 엄밀하게 정의되기 이전의 초창기 수학자들은 만족스러운 수 체계 없이 미적분학을 건설하였다는 통상적인 역사적 서술은 잘못된 것이라고 지적하고 있다.

Ⅳ. 결론 및 논의

무한소수는 그 기호의 임의성과 무한성으로 인하여, '소수점 아래 끝자리까지의 모든 숫자를 명확하게 알 수 없는 모호한 수'라는 불가피한 불투명성을 가지고 있다. 이 연구에서는 이와 같은 불투명성의 원인인 무한소수 기호 구조가 어떻게 '연속적인 수'를 창조하는 매개가 될 수 있었는지를 분석하였다. 무한소수 기호는 소수점 아래에 임의의 digit가 무한히 등장할 수 있음을 허용함으로서, 최소 상계의 존재성을 직관적으로, 또 투명하게 표현할 수 있다. 따라서 완비성 공리는 다름 아닌 '임의의 무한소수에 대응하는 수가 존재 한다'와 동치이다(Burns, 2000: p.77). 무한소수 기호로부터 완비성 공리를 만족한다는 것을 확인할 수 있으므로, 무한소수는 유리수에서의 틈을 메운 연속적인 수 체계가 된다. 완비성 공리에 대한 무한소수 기호의 투명성에 의존하여, 실수 개념이 정립되기 전에도 수학자들은 현대 수학에서와 큰 차이 없이 실수 개념을 생각할 수 있었다.

학교수학에서는 무한소수에 의존하여 유리수에서 실수로 확장하며, 유리수는 순환하는 무한소수, 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 다루고 있다([그림 Ⅱ-1]). 이와 같이 무한소수는 학교수학의 실수 개념 전개에서 상당한 비중을 차지하고 있지만, 해석학에서는 무한소수가 아닌 완비성 공리에 의하여 유리수에서 실수 체계로 확장하며, 학교수학과 달리 해석학 텍스트에서는 무한소수가 거의 등장하지 않는다[5]. 따라서 예비교사들은 해석학에서 학교수학에서 배웠던 무한소수는 망각한 채 완비 순서체로서의 형식적인 실수 개념만을 배우게 된다. 그러나 졸업하여 수학 교사가 된 후에는, 대학에서 완비 순서체로 배웠던 실수를 왜 학교수학에서는 무한소수로 가르쳐야 하는지 이해하지 못한 채로 학교수학을 가르치게 된다.

수학 교사가 학교수학과 해석학에서의 각각의 실수 접근이 갖는 의미와, 상이해 보이는 두 접근 사이의 연결 고리를 찾을 수 없다면, 수학교사가 대학에서 배운 해석학의 지식은 학교수학을 가르치는 데 필요한 실수 혹은 무한소수에 대한 지식으로 통합되기 어렵다. 이 점에서 무한소수 기호의 의미에 대한 이 연구의 수학적・역사적 분석은 "왜 학교수학에서는 무한소수에 의존하여 실수 개념을 다룰 수 있는가?", "무한소수가 분수와 달리 연속적인 수가 될 수 있었던

5) 무한소수라는 직관적인 모델로 실수를 개념화하는 학교수학의 접근과 달리, 해석학에서는 실수를 완비 순서체로 정의하므로, 무한소수와 같은 실수의 직관적인 표상에 의존하지 않는다.

이유는 무엇인가?", "임의의 무한소수전개가 하나의 수에 대응하도록 수 개념을 확장해야 하는 이유는 무엇인가?", "무한소수에 의존하여 실수 체계로 확장하는 학교수학의 접근과 완비성 공리에 의하여 실수 체계로 확장하는 해석학의 접근이 왜 같다고 볼 수 있는가?"등의 질문에 대하여 대답하고 있다는 점에서, 실수 개념에 대하여 학교수학과 대학수학 사이의 '이중단절(double discontinuity)'의 문제를 극복하는 데 도움이 될 수 있을 것이다. 무한소수 기호에 대한 이 연구의 분석을 바탕으로, 예비교사들의 실수에 대한 교과내용지식을 어떻게 성장시킬 수 있는가에 대한 구체적인 사례연구를 기대한다.

참고문헌

김서령 외(2014). **중학교 수학 2.** 서울: 천재교육.

김성기, 김도한, 계승혁(2004). **해석개론.** 서울: 서울대학교 출판부.

변희현(2005). **소수 개념의 교수학적 분석.** 서울대학교 박사학위 논문.

이준열 외(2012). **중학교 수학 3.** 서울: 천재교육.

Abian, A. (1981). Calculus must consist of the study of real numbers in their decimal representation and not of the study of an abstract complete ordered field or nonstandard real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 12*(4), pp. 465-472.

Błaszczyk, P., Katz, M., Sherry, D.(2013). Ten misconceptions from the history of analysis and their debunking. *Foundations of Science, 18*(1), pp. 43-74.

Bloch, E. D.(2011). *The real numbers and real analysis.* New York: Springer

Burns, R. P.(2000). *Numbers and functions: steps to analysis.* Cambridge: Cambridge University Press.

Davidson, K. R., Donsig, A.P. (2010). *Real analysis and applications: theory in practice.* New York: Springer.

Dedekind, R. (2007). *Essays on the theory of numbers.* available at http://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf

Dieudonne, J.(1991). *Mathematics - the music of reason.* Translated by H.G. Dales, Heidelberg: Springer.

Fearnley-Sander, D. (1979). Hermann Grassmann and the creation of linear algebra. *The American Mathematical Monthly, 86*(10), pp. 809–817

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), pp. 29-44.

Forbes, J. E. (1967). The most difficult step in the teaching of school mathematics: from rational numbers to real numbers—with meaning. *School Science and Mathematics, 67,* pp. 799–813.

Fowler, D.(1985a). 400 years of decimal fractions, *Mathematics Teaching, 110,* pp.20-21.

Fowler, D.(1985b). 400.25 years of decimal fractions, *Mathematics Teaching, 111,* pp.30-31.

Fowler, D.(1992). Dedekind's Theorem: $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. *American Mathematical Monthly,* pp.725-733.

Grabiner, J. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *American Mathematics Monthly, 90*(3), pp. 185–194

Katz, K. U., Katz, M. G. (2012). Stevin numbers and reality. *Foundations of science, 17*(2), pp. 109-123.

Körner, T. W. (2003). *A companion to analysis: a second first and first second course in analysis* (Vol. 62). Providence, R.I. : American Mathematical Soc.

Li, L.(2011). A new approach to the real numbers. available at http://arxiv.org/abs/1101.1800.

Neal, K. (2002). *From discrete to continuous: the broadening of number concepts in early modern England* (Vol. 16). Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Savizi, B., Semnani, A. S., Zadeh, M. H. B.(2013). Inconsistency of students' mental object of numbers with irrational numbers, *Life Science Journal, 10*(1), pp.762-771.

Sierpińska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), pp. 371 – 396.

Peled, I., Hershkovits, S.(1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irattional numbers. *INT. J. Math. Educ. SCI. Technol.*, pp. 39-46.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis.* New York: McGraw-Hill.

Tall, D. O., Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching, 82,* pp.44 – 49.

Teismann, H. (2013). Toward a more complete list of completeness axioms. *The American Mathematical Monthly, 120(2),* pp.99-114.

Zazkis, R. (2005). Representing numbers: prime and irrational. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36*(2-3), pp. 207-217.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: exposing missing link. *CBMS Issues in Mathematics Eduction 16.* American Mathematical Society.

The Infinite Decimal Representation: Its Opaqueness and Transparency

Lee, Jihyun (Incheon National University)

Infinite decimals have an infinite number of digits, chosen arbitrary and independently, to the right side of the decimal point. Since infinite decimals are ambiguous numbers impossible to write them down completely, the infinite decimal representation accompanies unavoidable opaqueness. This article focused the transparent aspect of infinite decimal representation with respect to the completeness axiom of real numbers. Long before the formalization of real number concept in 19th century, many mathematicians were able to deal with real numbers relying on this transparency of infinite decimal representations. This analysis will contribute to overcome the double discontinuity caused by the different conceptualizations of real numbers in school and academic mathematics.

* Key Words : infinite decimal(무한소수), representation(표상), real numbers(실수), the completeness axiom(완비성 공리), Stevin, continuum(연속체), transparency·opaqueness (투명성·불투명성)

논문접수 : 2014. 10. 10
논문수정 : 2014. 11. 17
심사완료 : 2014. 11. 18