대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 4, 515 ~ 536. Nov 2014

작도 접근 방식에 따른 중학생의 기하학적 특성 인식 및 정당화

양 은 경* · 신 재 홍**

본 연구에서는 GSP(Geometer's Sketchpad) 환경의 기하 문제 해결 과정에서 중학교 1학년 학생들이 각자의 작도 접근 방식을 통해 어떻게 기하학적 특성을 인식하고, 자신들의 작도에 대한 이유를 정당화하는지 살펴보았다. 다양한 드래깅 활동을 통해 학생들은 종속성 및 1수준 불변성을 파악하면서 자신의 작도 방식을 결정하였는데, 강건한 작도 방식을 택한 경우 기본 점의 경로를 바로 인식하여 1단계 정당화에 이른 반면, 유연한 작도 방식을 택한 경우에는 많은 시행착오를 거쳐 2수준 불변성과 경로를 인식한 뒤 2단계 정당화에 이르렀다.

Ⅰ. 서 론

연역적 공리 형식이 경험적인 추론 없이 학습자에게 도입된다면 증명은 기억과 재생에 의존한 채 접근하기 어렵고 의미 없는 절차가 될 것이다(Harel & Sowder, 1998). 한편, 연역적 추론에 대한 관심이 보류되고 경험적인 실험 상황이 먼저 도입될 때, 학생들은 증명의 필요성을 더 절실하게 느낄 수 있지만 막상 증명을 구성할 수는 없을 것이다(Healy & Hoyles, 1998). 따라서 연역적이고 귀납적인 관심 사이를 자연스럽게 넘나들 수 있게 도와주는 학습 상황이 제공된다면 학생들은 경험적인 수준에 머물지 않고 연역적인 수준으로 이어져 의미 있게 정당화할 것이다(Healy, 2000).

역동적 기하 환경 (Dynamic Geometry Environments: 이하 DGE)의 가장 중요한 특징은 드래깅 활동에 의한 동시적인 변화 속에서 학습자가 기하학적 불변성(invariants)을 인식하는 것이다(Leung, Chan, & Lopez-Real, 2000). 식 $(x+1)^2 = x^2+2x+1$이 x의 변화 속에서 항등식으로 인식되는 것처럼, DGE에서 기하학적 특성은 도형의 변화 속에서 불변성으로 인식된다(Laborde, 2005). 일반적으로 DGE에서 불변성은 기하 관계와 관계의 종속성에 의해 결정된다. 기하 관계란 작도를 완성하기 위해 사용된 명령어들에 의해 정의되며, 관계의 종속성이란 작도의 기본적 관계와 유클리드 기하 이론의 결과로서 파생된 관계 사이의 종속성을 말한다(Laborde & Strässer, 1990). 강건한 작도(robust constructon)와 유연한 작도(soft construction)의 차이는 학생들이 기하학적 종속성을 경험하는 태도이며(Healy, 2000), 강건한 접근과 부드러운 접근은 유클리드 공리체계에서 같은 성질의 도형에 대하여 다양한 추측을 생산하도록 해준다(Camargo, Samper, & Perry, 2007). 다양한 드래

* 한국교원대학교대학원, dubu123@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

깅 활동[1])은 여러 가지 불변성을 밝혀내기 위한 전략으로 도입될 수 있으며(Leung, 2012), 드래그 가능한 점(이하 기본 점)을 드래그 하여 얻은 점의 집합이 경로로 인식되는 것은 하나의 규칙성에서 하나의 불변성으로 변화함을 의미한다(Baccaglini-Frank, 2010). 따라서 작도 접근 방식과 드래깅 활동 및 DGE의 기하학적 특성(종속성, 불변성, 경로)을 통해서 학생들의 정당화 과정을 살펴보는 것은 DGE를 사용한 수학 교실에서 학습자의 인지과정을 분석하는 데 유용한 도구가 될 것이다.

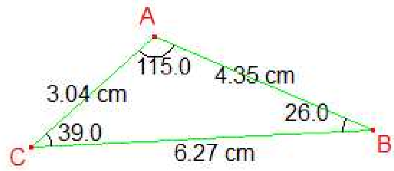
본 연구에서는 학생이 DGE와 상호작용하는 동안 형성한 두 가지 작도 접근 방식(Healy, 2000)을 도입하고, 작도한 개체와 인식한 기하학적 특성에 따라 실험적인 경험과 유클리드 기하 이론 사이에서 학생의 정당화가 어떻게 달라질 수 있는지를 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 강건한 작도(robust construction)와 유연한 작도(soft construction)[2])

Healy(2000)는 DGE에서 처음으로 강건한 작도와 유연한 작도를 구분하였다. DGE가 연구되던 초기에는 강건한 작도가 주를 이루었으나 학생의 문제 해결 과정을 조사하는 연구에서 유연한 작도의 존재성이 드러났다(Laborde, 2005). Healy (2000)는 학생들이 작도된 도형을 드래그를 통해 유지하기 보다는 작도 과정을 탐구하는 것을 더 좋아하며, 전자를 강건한 작도, 후자를 유연한 작도라고 불렀다. 강건한 작도는 드래깅 활동을 통해서 특정한 성질을 유지하고 변화를 입증하는 수단으로 여기는 반면, 유연한 작도는 변화를 작도의 일부로 생각하고 기하학적 성질 사이의 종속 관계를 확인시키는데 도움이 된다(Laborde, 2005).

다음은 학생들이 Cabri 환경에서 삼각형의 두 변과 한 각을 사용하여 합동 조건을 찾는 문제를 해결하는 과정에서 보인 강건한 작도와 유연한 작도의 예이다(Healy, 2000).



[그림 Ⅱ-1] 삼각형 ABC

주어진 삼각형 ABC([그림 Ⅱ-1])와 합동인 삼각형을 작도하기 위해 강건한 작도를 사용하는 학생들은 compass 도구[3])를 사용하여 중심이 C이

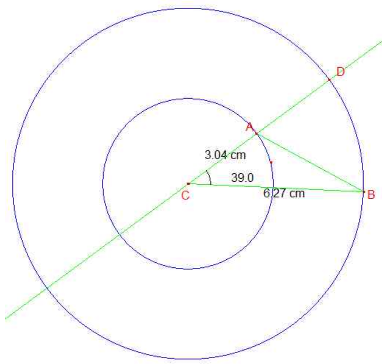
---

1) 본 연구에서는 학생들의 드래깅 활동을 네 가지로 분류하는데, 도형의 흥미로운 형태나 규칙성을 발견하기 위해서 ‘기본 점’을 계획 없이 무작위로(randomly) 드래그하는 ‘임의적 드래깅(wandering dragging)’, 특별한 도형의 형태를 유지하면서 기본 점을 드래그하는 ‘안내된 드래깅(guided dragging)’, 도형에서 발견된 성질이나 유지하고 싶은 형태를 그대로 보존하면서 기본 점의 흔적이나 자취를 그리는 ‘숨겨진 자취 드래깅(dummy locus dragging)’, 구성된 도형이 요구한 성질을 보존하는지 알아보기 위해서 경로를 따라 점을 드래그하거나 자신의 추측을 검증하기 위해 경로를 새롭게 작도하거나 점을 경로에 병합한 뒤, 경로를 따라 그 점을 드래그하는 ‘드래깅 검증(dragging test)’이다(양은경, 신재홍, 2014).

2) 본래 robust는 ‘강건한, 튼튼한, 굳센, 확고한, 강경한’, soft는 ‘부드러운, 유연한, 약한, 흐릿한’으로 해석되나(다음 영어사전, dic.daum.net/index.do?dic=eng), Healy(2000)의 작도 접근 방식을 가장 잘 설명해 줄 수 있는 단어로써 연구자들은 ‘강건한(의지나 기상이 굳세고 건전한, 필력이나 문세가 강하고 씩씩한, 굳세고 충직한 등)’과 ‘유연한(생각 따위가 저절로 일어나는 형세가 왕성한, 부드럽고 연한 등)’을 택하였다(국립국어원 표준국어대사전).

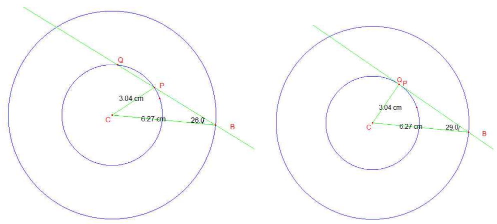
3) Cabri에서 원 도구는 중심을 정한 뒤 반지름의 길이를 조절하면서 원을 작도할 수 있지만(GSP의 원 도구

고 반지름이 CB인 원(이하 원 c1)과 반지름이 CA인 원(이하 원 c2)을 작도한 후 선분 CB를 작도하고, 끼인 각 BCA을 작도하기 위해 원의 중심 C와 원 c1 위의 임의의 한 점 D를 잇는 직선을 작도한 뒤 점 D를 원 c1을 따라 움직이면서 각 BCD가 39°가 되도록 조정하였다. 각 BCD가 39°가 되었을 때, 이 직선과 원 c2의 교점 중 하나는 삼각형의 세 번째 꼭짓점(점 A)이 되었다(작도 순서 : 점 C -> 원 c1, 원 c2 -> 점 B -> 변 CB -> 중심 C와 원 c1 위의 한 점 D를 잇는 직선(이하 직선1) -> 각 BCA(측정 도구 사용) -> 직선 1과 원 c2의 교점 중 하나를 A라고 이름붙임 -> 변 CA-> 변 BA, 그림 Ⅱ-2). 작도가 끝나고 학생들은 점 B를 움직이는 드래깅 검증을 통해서 주어진 삼각형과 합동인 삼각형들을 다양하게 찾았으며, 삼각형에서 세 번째 선분 AB는 두 변과 한 각에 의해 결정된다고 결론 내렸다(SAS).



[그림 Ⅱ-2] 강건한 작도 - 끼인 각인 경우

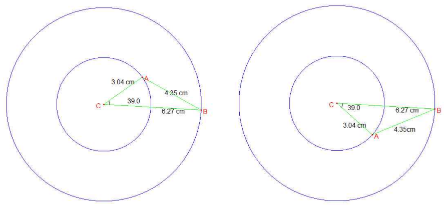
[그림 Ⅱ-1]의 삼각형과 합동인 삼각형을 작도할 때, 한 각이 끼인 각이 아닌 경우(SSA)에도 학생들은 동일한 방식으로 작도를 시행하였으며(작도 순서 : 점 C -> 원 c1, 원 c2 -> 점 B -> 변 CB -> 점 B와 원 c2 위의 한 점 P를 잇는 직선(이하 직선 2) -> 각 CBP(측정 도구 사용) -> 새로운 점 Q 발견 -> 점 Q를 점 P에 끌어 옴, 그림 Ⅱ-3), 처음에는 새로운 점 Q의 등장에 주목하지 못하였다. 학생들은 두 번째 교점(점 Q)의 존재성을 알아차리고 이런 식으로 작도하면 [그림 Ⅱ-1]과 합동인 삼각형뿐만 아니라 합동이 아닌 삼각형도 만들어지게 됨을 알고 점 Q가 사라지게 하여(점 Q를 점 P에 끌어옴) 삼각형 CBP가 직각삼각형가 되도록 작도하였다.



[그림 Ⅱ-3] 강건한 작도 - 끼인 각이 아닌 경우

유연한 작도를 하는 학생들은 세 가지 조건(두 변의 길이와 한 각)을 모두 한꺼번에 작도하는 대신, 두 가지 조건(두 변의 길이 즉, 선분 CB, CA)만 먼저 작도하였다(작도 순서 : 점 C -> 원 c1, 원 c2 -> 두 점 A, B -> 변 CB -> 변 CA -> 각 BCA(측정 도구 사용) -> 변 AB(측정 도구 사용), 그림 Ⅱ-4). 학생들은 주어진 삼각형([그림 Ⅱ-1])의 각 BCA와 각의 크기가 똑같아 질 때까지 원 c2 위의 점 A를 안내된 드래깅 하였다. 학생들은 두 변 CB, CA의 길이가 같고 한 각 BCA의 크기가 같을 때 점 A의 위치를 두 개 발견하였다. 이러한 작도는 분명히 실험적인 것이고, 점 A의 위치의 발견은 합동인 삼각형에서 가능한 세 번째 길이(변 AB)를 찾는 데 도움이 되었으며, 변 AB의 길이를 측정한 뒤, 학생들은 '삼각형에서 두 변의 길이가 같고, 한 각(끼인 각)이 같다(SAS)'는 합동 조건이라고 생각하였다.

와 같음), compass도구는 두 점의 거리를 먼저 정한 뒤 그 거리를 반지름으로 하는 원을 작도할 수 있다.



[그림 Ⅱ-4] 유연한 작도 - 끼인 각인 경우

이제, 학생들은 끼인 각이 아닌 각 CBA가 주어진 삼각형과 동일한 크기가 되도록 원 c2 위의 점 A를 안내된 드래깅하여 삼각형 하나를 발견하지만(SSA), 측정 도구를 사용하여 세 번째 변(변 AB)의 길이가 원래 삼각형([그림 Ⅱ-1])의 변 AB의 길이와 같지 않음을 알게 되었다. 학생들은 이 삼각형을 반례라고 생각하였으며, 반례의 위치에서 작도를 끝냈다.

유연한 작도의 탐구는 강건한 작도의 탐구보다 지루하고 시간적 소비가 컸다. 강건한 작도는 타당성(validity) 영역에 대한 고려가 쉽게 받아들여져 직각삼각형의 합동조건까지 생각할 기회를 제공한 반면, 반례의 존재성은 유연한 작도를 형성했던 팀에서 보다 분명해졌다. 두 가지 작도 사이의 차이는 학생들이 기하학적 종속성을 경험하는 태도이며, 강건한 작도에서 종속성은 드래깅을 통해 기하학적 성질 사이의 관계성이 불변으로 남아있음을 의미한다. 강건한 작도에서 드래깅 검증을 통해 학생들의 관심은 일반적인 것에서 특수한 것(같은 기하학적 구성을 가진 도형들)으로 옮겨질 수 있다. 그러나 유연한 작도에서 드래깅은 입증의 수단이 아니라 작도의 일부이며 다른 특성이 만족될 때 그 점에서의 종속성이 얼마나 분명한지를 학생들이 관찰할 수 있도록 해 준다. 즉, 유연한 작도에서는 주어진 조건이 만족되는 점들의 자취를 찾아내는 과정을 통해, 학생들의 관심은 특수한 것(같은 기하학적 구성을 가진 도형들)에서 일반적인 것으로 향한다. 이상의 내용을 정리하면 <표 Ⅱ-1>와 같다.

<표 Ⅱ-1> 강건한 작도와 유연한 작도

강건한 작도	유연한 작도
1. 작도 하는데 걸리는 시간이 짧다.	1. 작도가 지루하고 소비 시간이 길다.
2. 반례의 존재성을 잘 인식하지 못한다.	2. 반례의 존재성을 분명하게 인식한다.
3. 드래깅 활동을 통하여 불변으로 남아있는 기하학적 특성을 입증한다.	3. 작도의 일부이며 드래깅 활동을 통하여 기하학적 특성을 관찰한다.
4. 학생들의 관심은 일반적인 것에서 특수한 것으로 이동한다.	4. 학생들의 관심은 특수한 것에서 일반적인 것으로 이동한다.

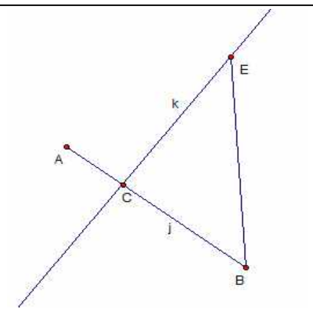
2. GSP의 기하학적 특성

학생이 인식하는 유클리드 기하학의 성질들은 GSP 환경의 고유한 특성들과 긴밀하게 연결된다. 이 절에서는 GSP 환경에서 발생하는 기하학적 특성을 소개한다.

가. 종속성(dependency)

DGE에서 기하학적 구성을 실행할 때, 개체(object)들의 관계는 종속성의 계층을 형성한다. 즉, 어떤 개체들은 이전의 개체들과 상관없이 자유롭고, 어떤 개체들은 이전의 개체들에 종속된다. Talmon & Yerushalmy(2004)는 이전의 개체와 관련된 개체를 자식(child), 이전의 개체를 그것의 부모(parent)라고 하며, 이러한 종속성을 부모-자식 관계로 나타내었다. 예를 들어, 아래의 작도([그림 Ⅱ-5])에서 점 E를 드래그하면 수직선 k와 점 C의 위치는 변하지만 선분 j에는 아무런 영향을 주지 못하는데, 이때 수직선 k보다 먼저 작도된 점 E가 수직선 k의 부모, 점 C보다 먼저 작도된 수직선 k는 점 C의 부모이며, 점 E보다

나중에 작도된 수직선 k는 점 E의 자식, 수직선 k보다 나중에 작도된 점 C는 수직선 k의 자식이다. 이러한 부모-자식 관계는 독립적이지 않으며, 작도 단계가 복잡해질수록 종속성을 나타내는 부모-자식 관계는 더 중요하며 복잡해진다 (Talmon & Yerushalmy, 2004).

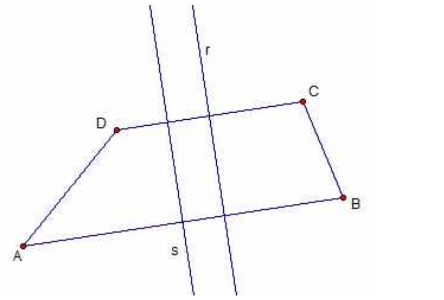


① 선분 AB (j)를 작도한다.
② 한 점 E를 작도한다.
③ 점 E를 지나고 선분 AB (j)에 수직인 직선 k를 작도한다.
④ 선분 AB (j)와 직선 k의 교점 C를 작도한다.
⑤ 선분 EB를 작도한다.

[그림 Ⅱ-5] 부모-자식 관계의 예(Talmon & Yerushalmy, 2004)

나. 불변성(invariants)[4)]

불변성이란 한 점을 드래그 하는 동안 불변하는 도형의 특성을 말하는데(Baccaglini-Frank, 2010), Leung(2012)는 드래깅 활동 속에서 서로 다른 형태의 불변성을 제시하였다. [그림 Ⅱ-6]에서 선분 AB와 DC가 평행한 사다리꼴 ABCD에 대하여 점 A, B, C는 기본 점이고 점 D는 점 C를 지나고 선분 AB에 평행한 방향으로만 움직일 수 있을 때, 두 직선 r과 s는 각각 선분 DC와 AB에 대한 수직이등분선이다.



[그림 Ⅱ-6] 평행사변형 ABCD(Leung, 2012)

[그림 Ⅱ-6]에서 Leung(2012)는 선분 AB와 DC의 평행 관계를 '작도된 불변성(constructed invariants)'이라고 하고, 수직이등분선 r와 s의 평행 관계처럼 작도된 불변성으로 인해 파생된 불변성을 '유도된 불변성(induced invariants)'이라고 하며, 이 두 가지를 '1 수준 불변성(level-1 invariants)'이라고 하였다. 두 수직이등분선들은 기본 점에 종속적이고(기본 점의 드래그에 영향을 받고) 직접 움직일 수 없으며, 단지 간접적으로 움직인다는 점에서 이러한 불변성은 개체 간의 종속성과 관련된다. 한편, '선분 AB와 DC의 평행 관계가 s와 r의 평행 관계를 야기한다'와 같이 불변성들 사이의 관계는 그 자체가 하나의 불변성이며 드래깅 활동을 통해 인식될 수 있는데 Leung(2012)는 이러한 불변성을 '2 수준 불변성(level-2 invariants)'이라고 하였다. 즉, 1 수준 불변성이란 드래그 하는 동안 도형의 변화가 일정하다고 인식된 도형의 기하학적 특성이고, 2 수준 불변성이란 1 수준 불변성 사이의 불변적인 관계를 의미하는 것이다. 또한, Baccaglini-Frank(2010)는 Leung(2012)의 1 수준 불변성을 더 세분화하였는데, 작도 단계에서 명시적으로 설명된 작도의 기하학적 특성을 '기본적인 작도-불변성(basic construction-invarinat)', 기본적인 작도-불변성으로부터 추론하여 유도될 수 있는 기하학적 특성을 '유도된 작도-불변성

4) invarinats는 불변하는 도형의 특성이자 불변하는 어떤 성질 혹은 관계이므로 본 연구에서는 불변량보다는 불변성으로 해석하였다.

(induced construction-invariant)', 도형에 새롭게 추가된 강건한 성질을 '추가 작도-불변성(additional construction-invariant)', 작도된 도형에서 다른 점들을 고정시키고 기본 점(점 P)을 임의로 움직일 때 참인 기하학적 특성을 'P-불변성(point-invariant)'이라고 하였다. 예를 들어, [그림 Ⅱ-6]에서 선분 AB와 DC의 평행 관계는 기본적인 작도-불변성이며, 수직이등분선 r와 s의 평행 관계는 유도된 작도-불변성이다. 이때, 점 C를 임의적 드래깅하여도 선분 AB와 DC의 평행 관계와 s와 r의 평행 관계는 불변이므로(선분 AB와 선분 DC는 항상 평행하고, s와 r도 항상 평행하므로) 이 두 가지는 모두 C-불변성이다. 다른 기본 점 A, B에 대해서도 선분 AB와 DC의 평행 관계와 s와 r의 평행 관계는 항상 불변이므로 두 가지 모두 각각 A-불변성과 B-불변성이다. 일반적으로 (기본적인 혹은 유도된) 작도-불변성이면 점-불변성이며, 점-불변성이라고 해도 모두 (기본적인 혹은 유도된) 작도-불변성이 되는 것은 아니다. 만약 점 C의 경로가 존재하여 경로를 작도한 뒤 점 C를 그 경로에 병합한다면, 그 경로는 추가 작도 불변성이 된다.

이상 불변성을 정리하면 <표 Ⅱ-2>와 같다.

<표 Ⅱ-2> 불변성의 분류

Leung(2012)	Baccaglini-Frank(2010)
1 수준 불변성	점-불변성, 기본적인 작도-불변성, 유도된 작도-불변성, 추가 작도-불변성
2 수준 불변성	1 수준 불변성 사이의 불변적 관계

여러 연구들(Baccaglini-Frank, 2010; Camargo, Samper, & Perry, 2007; Healy, 2000; Leung, 2012)에서 '강건한'과 '유연한'이라는 개념은 드래깅 검증이나 불변성에도 사용되었다. 학습자는 숨겨진 자취 드래깅을 통해 나타난 흔적을 따라 '유연한 드래깅 검증'을 수행함으로써 추측을 형성하고 경로를 서서히 인식하게 되며, 경로를 새롭게 작도하고 이 경로를 따라 기본 점을 드래그하는 '강건한 드래깅 검증'을 수행함으로써 자신의 추측을 강건하고 일반적인 것으로 만든다(Leung, 2012). 학습자에 의해 선택되고 변화 가능한 불변성을 '유연한 불변성'이라고 부르며, 학습자가 유연한 두 불변성을 동시에 인식하고 경로와 드래깅 검증을 통해 추측을 입증한다면 두 불변성은 유연한 불변성에서 '강건한 불변성'으로 인식된다(Baccaglini-Frank, 2010; Camargo, Samper, & Perry, 2007).

다. 경로(path)

경로란 드래그 된 기본 점의 위치이자 연속된 집합이며, 움직임 속에서 어떤 규칙성을 명확하게 해 주는 잠재성을 지닌 것이고(Baccaglini-Frank, 2010), 흔적 도구를 사용한 점의 자취이다. 학생들은 숨겨진 자취 드래깅을 통해 점의 움직임에서 규칙성에 주목하고 하나의 개체로 개념화하는 데 이것이 경로이다. Sfard(1991)는 경로를 추상화된 생각의 구체화로, Arzarello, Olivero, Paola, Robutti(2002)는 궤적(trajectory)으로, Leung, Lopez-Real(2002)는 하나의 성질을 가진 점들의 집합 혹은 '타당한 자취(locus)'라고 하였다.

3. 정당화

정당화는 적당한 논리에 의해 자신 또는 다른 사람에게 어떤 주장이 참임을 확신시키는 과정이다(김정하, 2010). 정당화에 대한 연구는 증명의 지도와 관련되며(김성대, 2003), 이러한 연구들(Balacheff, 1987: Simon & Blume, 1996; Tall, 1995; 김수철, 2013; 김정하, 2010)의 공통점은 정

당화 유형에 증명뿐만 아니라 그 이외의 형태를 다양하게 포함시켰음을 알 수 있다. 예를 들어, Simon & Blume(1996)은 단순히 동기를 확인하려는 반응에 해당하는 정당화가 나타나지 않는 '0 수준', 학생들이 수학 교사나 교과서와 같은 권위 있는 근거에 기인하여 타당하다고 주장하는 '1 수준', 특정한 예의 옳음을 통하여 정당화를 제시하는 '2 수준', 논증의 일반적인 특징을 포함하는 포괄적인 예에 의하여 정당화하는 '3 수준', 특정한 예와 독립적으로 연역적인 논거를 통하여 타당성을 확립하는 '4 수준'으로 나누었고, Tall(1995)은 어떤 대상이 참임을 보이기 위해 신체적으로 활동하는 '활동적 증명(enactive proof)', 활동적 요소와 언어적 요소를 수반하지만 활동 과정보다는 결과를 중시하는 '시각적 증명(visual proof)', 대수식과 같은 기호를 조작하는 '수치적 증명(numeric proof)', 연역적 추론을 통해 정당화하는 '형식적 증명(formal proof)'으로 분류하였다. Balacheff(1987)는 몇 개의 예를 이용하여 자신의 추측이나 주장이 참임을 정당화하는 '소박한 경험주의(naive empiricism)'와 극단적인 예를 통해 일반성을 조사하여 자신의 추측이나 주장이 참임을 정당화하는 '결정적 실험(crucial experiment)'을 묶어 '활동적 정당화'로, 자신의 추측을 확인하기 위해 가능한 모든 경우의 대표적인 예를 이용하여 정당화하는 '포괄적인 예(generic example)'와 연역적이고 일반화된 설명을 통해 자신의 추측이나 주장의 타당성을 입증하는 '사고실험(thought experiment)'을 한데 묶어 '지적 정당화'로, 이론으로 조직되어 수학 공동체에서 인정받을 수 있는 '논증'이라는 세 가지 수준으로 크게 정당화를 구분하였다. 김정하(2010)는 초등학생의 정당화 단계의 특징을 분석하기 위해서 위의 연구들(Balacheff, 1987: Simon & Blume, 1996; Tall, 1995)의 정당화 수준과 유형을 통합하여 정당화의 단계[5]를 6단계로 재구성하였으며, 김수철(2013)은 정당화 지도를 위한 수업 모형을 개발하기 위하여 김정하(2010)의 연구에서 정당화가 나타나지 않는 0 단계와 외부로부터의 권위에 의해 정당화를 시도하는 1 단계를 제외한 네 개의 정당화 단계를 <표 Ⅱ-3>과 같이 제시하였다.

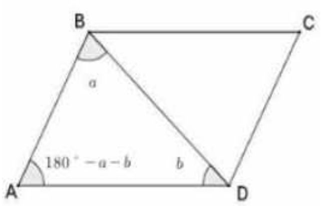
<표 Ⅱ-3> 정당화 단계(김수철, 2013)

단계		유형	관련 선행연구의 정당화 유형(수준)
1	경험적·귀납적 정당화	지각적·활동적 정당화	Tall의 활동적 증명
		평범한 예에 의한 정당화	Balacheff의 소박한 경험주의, Simon & Blume의 2 수준
		극단적 예에 의한 정당화	Balacheff의 결정적 실험
2	예에 의한 정당화	시각적 예에 의한 정당화	Tall의 시각적 증명
		포괄적 예에 의한 정당화	Balacheff의 포괄적인 예, Simon & Blume의 3 수준
3	준연역적 정당화	식의 조작에 의한 정당화	Tall의 수치적 증명
		논리적 설명에 의한 정당화	Balacheff의 사고실험
4	형식적·연역적 정당화	형식적 증명	Tall의 형식적 증명, Balacheff의 논증, Simon & Blume의 4 수준

1단계의 경험적·귀납적 정당화는 시각 자료나 조작 활동(종이접기, 작도, 기하 소프트웨어 등을 이용하는 활동) 등을 통해 도형의 성질을 발견하고 발견된 성질에 대하여 그것이 참이 된

5) 정당화 연구에서 수준은 수직적이고 계열적인 관계를 전제로 하며 '유형'은 이산적이고 수평적인 관계를 고려한 것으로 볼 수 있으나, 학생들의 발달 수준이 항상 계열성을 따르는 것은 아니므로 유형과 달리 어느 정도의 계열성을 포함하되 수준보다는 계열성의 의미가 약한 '단계'라는 용어를 사용한다(김정하, 2010).

다는 것을 스스로 확인하거나 다른 사람에게 설명하는 단계를 의미한다. 예를 들어, 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선이 밑변을 수직이등분함을 보일 때 종이접기를 통해 참임을 설명하는 것은 '지각적・활동적 정당화'에 해당되며, 일반적인 형태의 삼각형에서 삼각형의 외심을 확인하고 이를 바탕으로 설명하는 것은 '평범한 예에 의한 정당화'이고, 직각삼각형의 같은 특수한 형태의 삼각형에서 외심을 확인하는 사례는 '극단적 예에 의한 정당화'이다(조미혜, 2013). 2단계의 예에 의한 정당화는 예를 사용하여 연역적으로 설명하는 정당화를 의미한다. 예를 들어, 평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기가 서로 같음을 정당화할 때, [그림 Ⅱ-7]과 같이 평행사변형을 그리고 $\angle C = 180^\circ - a - b$임을 설명해 $\angle A = \angle C$임을 보이는 것이 '시각적 예와 포괄적 예에 의한 정당화'이다(김수철, 2013).



[그림 Ⅱ-7] 시각적인 예와 포괄적인 예를 통한 정당화의 사례(김수철, 2013)

3단계의 준연역적 정당화는 형식적인 증명은 아니지만 결론을 연역할 때 논리적인 오류 없이 명제가 성립함을 타당하게 설명할 수 있는 것을 의미한다. 예를 들어, 두 직각삼각형에서 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같으면 서로 합동임을 보일 때 주어진 두 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변이 서로 일치하도록 뒤집어 이등변삼각형을 만든 다음, 이등변삼각형의 성질을 이용하여 두 밑각의 크기가 같음을 수학적 기호를 사용하여 나타내면 '식의 조작에 의한 정당화'이며, 수학적 기호를 사용하지 않고 설명함으로써 합동임을 보인다면 이는 '논리적 설명에 의한 정당화'이다(조미혜, 2013). 4단계의 형식적・연역적 정당화는 어떤 인정된 형식에 따라 논리적으로 수학적 증명을 시도하는 것을 의미한다. 예를 들어, 평행사변형의 두 쌍의 대각의 길이가 같음을 보이기 위해 수학적 기호를 사용하여 삼각형의 합동조건을 이용하는 등 형식적이고 연역적인 방법으로 주어진 명제가 참임을 증명하는 것이다(김정하, 2010).

본 연구에서는 정당화를 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 증명을 포함해서 다양한 방법을 사용하여 자신의 추측이 참이라는 것을 설명하는 과정으로 생각하며, 김수철(2013)의 정당화 단계를 분석틀로 사용하고자 한다(<표 Ⅱ-3>).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

연구자들은 실생활의 맥락을 서술할 수 있고, 단일하지 않은 상황을 탐사할 수 있다는 장점 때문에 질적 사례 연구(qualitative case study)를 사용한다. 질적 사례 연구에서 '질적'은 결과나 생산물보다는 과정과 의미에 관심을 갖는 서술을 의미하며, '사례'는 확률 표집(예를 들어, 단순한 임의표집)보다는 의도적 혹은 목적 있는 비확률 표집에 의한 사례를 말한다(Merriam, 1997). 연구의 결과가 얼마나 실재와 맞아 떨어지는지와 관련된 내적 타당도(internal validity)나 연구의 결과들이 반복될 수 있는 정도를 지칭하는 신뢰도(reliability)를 위하여 질적 사례 연구에서는 다양한 방식으로 넓은 범위의 자료를 수집하는 삼각검증법(trangulation)이 사용된다(Maxwell, 2012).

본 연구는 GSP를 사용하는 학생들의 사고 과

정을 자연스럽게 살펴보기 위해서 평소 수학에 관심이 많고 친분이 있는 학생 2명을 한 팀으로 구성하여 문제를 해결하도록 하였고, 기술적인 부분을 적극적으로 지원하고 학생과의 원활하고 의도적인 상호작용을 위해서 두 명의 연구자가 각각 수업 진행자와 보조자가 되어 공동으로 수업에 참여하였으며, 연구의 내적 타당도와 신뢰도를 위하여 여러 가지 방법으로 학생들의 다양한 자료를 수집하는 질적 사례 연구 방법으로 설계되었다.

1. 연구 대상

본 연구는 M 중학교 1학년 학생 4명을 대상으로 수행하였다. 해당 학교의 수학 교사에 의하여 수학에 대한 흥미와 성취가 높다고 판단되는 네 명의 학생들이 추천되었다. <표 Ⅲ-1>은 연구 대상자들의 성향과 문제 해결 과정에서 보였던 특징을 나타낸 것이다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상자의 특징

학생	특징
S	S는 성격이 유쾌하고 낙천적이며, 수업시간에 자신의 생각을 잘 표현하고 기발한 생각을 많이 해냈다. GSP 조작 방법이나 새로운 사실을 받아들이는 능력이 뛰어나며, 유클리드 기하에 대한 기본 지식이 풍부한 편이다. 자신의 주장에 대한 근거를 설명하는 과정에서 일반적인 경우가 아니라 특수한 예를 사용하는 모습을 자주 보였다.
W	W는 성격이 소심하나 긍정적이며 수업시간에는 적극적인 수업태도를 보여주었다. GSP를 사용한 경험은 없었지만 GSP를 사용하는 것을 두려워하지 않았다. S의 의견에 잘 따르며, 자신의 근거를 밝히는 부분에서는 GSP 화면의 작도된 그림 자체에 의존하려는 경향이 있었다.
D	D는 성격이 차분하고 순종적이며 남을 잘 배려한다. 수업시간에는 거의 말이 없다. 문제해결 과정에서 E를 도와주려고 노력하나 자신의 주장을 펼치기 보다는 주로 E의 의견을 받아들이고 이해하였다.
E	E는 성격이 차분하면서 자신의 의견을 말할 때는 활기차다. 수업시간에는 학습한 내용을 적극적으로 활용하며, 자신의 생각을 잘 표현하였다. GSP를 무난하게 잘 사용하였고, 질문을 자주 하는 편이었으며, 정리 단계에서 자신의 근거를 활동지에 꼼꼼하게 작성하는 편이었다.

2. 과제

본 연구의 과제는 중학교 1학년 기하 영역에서 삼각형의 합동조건, 수직이등분선, 원을 기본 내용으로 하되, Hölzl (1996), Olivero (2001), Camargo, Samper, & Perry(2007)의 연구에서 사용된 2개의 작도 문제를 채택하였다. 학생들은 과제에서 제시된 도형을 작도하면서 도형 간의 기하학적 특성을 인식하고 자신의 작도 이유를 정당화 하였다. 자세한 내용은 <부록 2>[6]에 첨부한다.

3. 연구 일정 및 내용

2013년 11월 20일부터 12월 18일까지 두 차례의 도입수업과 두 차례의 본 수업을 실시하였다. 학생들이 GSP 환경을 쉽게 이해하고 적응할 수 있도록 연구자는 도입수업에서 종속성, 불변성, 경로 개념을 이용한 과제를 제공하였다(<부록 1>). <표 Ⅲ-2>는 수업 일정 및 내용을 나타낸 것이다.

6) 연구 목적인 서로 다른 작도 접근 방식에 따른 학생들의 기하학적 특성 인식과 정당화 유형을 잘 대비시켜 드러내기 위해 본 논문에서는 2개의 작도 문제 중 Hölzl (1996), Olivero (1999)에서 사용된 '과제 1'에 대한 분석 결과를 제시하였다.

<표 Ⅲ-2> 수업 일정 및 내용

일시	수업 주제	수업 내용	소요 시간
2013.11.20	도입수업 - GSP 소개 및 도구 사용법	도형의 작도, 흔적 도구, 측정 도구 사용법 설명하고 나만의 GSP 그림 그리기	2
2013.11.27	도입수업 - 종속성, 경로, 불변성 개념 (<부록 1>)	종속성, 경로, 불변성 개념 관련 문제 해결하기	2
2013.12.04	본 수업 - 과제 1 (<부록 2>)	삼각형의 합동조건, 수직이등분선, 원의 정의를 이용한 문제 해결하기	2
2013.12.18	본 수업 - 과제 2	삼각형의 합동조건과 이등변삼각형의 성질을 이용한 문제 해결하기	2

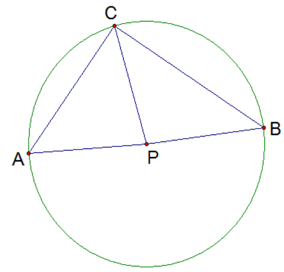
4. 자료 수집 및 분석 방법

수업 장면과 비구조화된 면담은 모두 비디오로 녹화하여 학생들의 GSP 조작 과정을 담은 화면과 음성을 동영상 파일로 저장하였다. 학생들이 수업시간에 작성한 활동지와 GSP 파일, 연구자가 작성한 현장노트도 연구의 자료로서 수집되었다. 수업 화면 동영상은 모두 전사되고 범주들로 분류되었다. 인용된 발췌문은 <발췌문 번호 - 학생>으로 구분하여 제시되었으며, 연구자들[7]은 TR1과 TR2로, 네 명의 학생은 S, W, D, E로 표현되었다. 또한, 인용된 발췌문에서 연구자는 확신이 있는 경우에 한하여 대괄호([ ])를 사용하여 학생의 생략된 인터뷰 내용을 보충하였고, 소괄호(( ))를 사용하여 학생이나 연구자의 행동을 자세하게 서술하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석[8]

1. 강건한 작도를 사용한 학생들의 기하학적 특성 인식 및 정당화 과정

<발췌문 1 - S & W>[9]



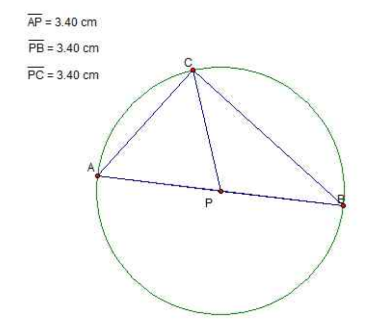
1 S : (한 원에서 원의 중심으로부터 반지름 두 개[선분 AP, BP]를 각각 그리고 원 위에 한 점 C를 잡고 삼각형 ABC를 완성한다.)
2 TR1 : 다 한 거니? 이 작도 누가 했어?
3 S : 제가요.
4 TR1 : 설명해 줄래?
5 S : 문제를 보고 금방 생각이 나서 작도해 봤어요. 이게[선분 AP, BP, CP] 반지름이니까 다 같아요.
6 TR1 : 처음부터 원을 왜 그렸어?
7 S : 반지름을 이용해서 그리려고요.
10 TR1 : 혹시 움직일 수 있는 점과 움직일 수 없는 점이 있을까?
11 W : (점 P를 움직이려고 하지만 원 전체가 움직일 뿐 점 P만 움직이지 않는 것을 확인한다.) 안 되네. (점 B를 움직이자, 도형 ABC는 삼각형이 아니라 사각형이 된다.) 이건[점 B] 원을 따라 움직이네.
12 TR1 : 어. 이러면 삼각형[삼각형 ABC]이 아닌데?
13 W : 이래도 각각 이등변삼각형은 되잖아요.

7) 여기서 TR1은 본 논문의 제1저자, TR2는 교신저자를 의미한다.
8) 본 연구에서는 학생들이 공학 도구 GSP를 사용하여 수업 시간에 흔히 접해보지 못한 개방형 기하 문제를 해결해야 한다는 점에서 부담감을 느낄 것이라 판단되어 친한 학생 2명을 한 팀으로 구성하고 협력하여 문제를 해결하도록 하였다. 이 과정에서 두 팀 모두 2명의 학생 중 주도적인 역할을 한 학생과 보조적인 역할을 한 학생으로 자연스럽게 나누어졌으며, 분석 결과에서 인식 모형은 각 팀에서 주도적인 역할을 한 2명의 학생을 중심으로 정리하였다.
9) 본 논문에서 사용된 GSP 환경에서의 작도 그림은 학생들의 문제 해결 과정을 관찰한 비디오 촬영 내용과 학생들이 제출한 GSP 파일을 근거로 하여 연구자(제1저자)가 재작도한 것이다.

14 TR1 : 문제에는 삼각형 ABC이라고 되어 있잖아.
15 W : 아.. 이러면 되지 않아요? (점 B를 다시 원상태로 두고 점 C를 움직이고 두 이등변삼각형의 성질이 유지되는 것을 확인한다.)
16 S : 점 C의 흔적이 이 원이예요.
17 TR1 : 원 전체니? 아니면 일부니?
18 W : (손가락으로 원 둘레를 따라 한 바퀴 돌린다.)

S는 문제를 보자마자 바로 중심이 P이고 반지름이 PA인 원을 작도하고, 원 위의 한 점 C를 잡아 삼각형 ABC를 완성한 뒤 선분 CP를 작도하였다(#1). S는 자신의 작도가 끝났음을 교사에게 말했으며(#3, #5), 세 변이 한 원의 반지름이라고 작도 이유를 말하였다(#5, #7). S는 원 위에 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 존재하고 중심이 P인 경우 선분 AP, CP, BP가 모두 반지름이 되어 두 삼각형 APC, BPC가 각각 이등변삼각형이 될 것이라는 자신의 직관에 따라 처음부터 삼각형 ABC를 작도하기 보다는 원을 먼저 작도하였다(강건한 작도). 그러나 작도하는 과정에서 반지름의 길이에 너무 치중한 나머지 삼각형의 한 변 AB를 두 개의 선분 PA, PC로 분할하여 작도하는 오류를 범했다. TR1은 S가 작도한 삼각형 ABC가 일반적인 삼각형인지 이러한 작도방법이 일반화될 수 있는지를 학생들이 계속 탐구할 수 있도록 하기 위해서 기본 점을 찾아 움직여보게 하였다(#10). W는 점 P를 임의적 드래깅을 할 때, 원(중심이 P이고 반지름이 PA인 원)과 삼각형 ABC의 모양이 변화하지 않음을 관찰하였고 이를 1 수준 불변성으로 인식하고 더 이상 점 P를 드래그하지 않았다(#11). 학생들은 점 B나 C를 임의적 드래깅 하자 원 위를 벗어나지 못함을 알고 점 B나 C가 원에 종속됨을 인식하였으며(#11, #16), 아직 자신들의 작도에서 잘못된 부분을 찾지 못하고 있었다(#13). W가 점 C를 드래깅 검증하여 원 위를 따라 움직이자, 학생들은 삼각형 ABC의 모양은 원 위에서 다양하게 변하지만 선분 CP가 삼각형 ABC를 각각 이등변삼각형으로 분할한다는 성질(즉, 선분 PA, PB, PC의 길이는 모두 같다)은 불변으로 남아있음(1 수준 불변성)을 확인하게 되었다(#15). S와 W는 점 C에 흥미를 보였으며, 점 C의 흔적(경로)이 원이라는 사실을 공감하였다(#16, #18).

<발췌문 2 - S & W>



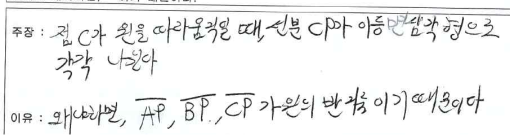
19 W : (활동지를 읽더니) 이게 일반적인 삼각형이야?
20 S : 우리... 작도 잘못된 것 같다. (삼각형 ABC와 변 AB에 중점 P를 작도한 뒤 측정도구를 사용하여 세 변의 길이가 모두 같도록 점 C를 조정한 후 중심이 P인 원을 그 위에 작도한다.) 병합을 어떻게 하더라?
21 W : (점 C랑 원을 선택하고 편집에서 병합을 선택하여 병합한다.)
22 S : 나이스.
23 TR2 : 점을 움직여봐.
24 W : (점 A를 움직인다.)
25 TR2 : [선분 PA, PB, PC] 길이가 변하니?
26 S : 네. (아직 점 A와 B는 원에 병합되지 않았다.)[10]
27 TR2 : 점 C는?
28 W : 점 C는 [PA, PB, PC의 길이가 서로 같도록 조절하여] 나중에 정했어요.
29 TR2 : 나중에? 그럼 점 C는 어떻게 움직여?
30 W : (측정된 PA, PB, PC의 길이가 같도록 하면서 점 C를 원 위를 따라 움직인다.)

S는 자신들의 작도가 잘못되었음을 깨닫고(#20), 다시 작도를 시작하였다. 이번에는 처음부

10) 두 선분 PA, PB의 길이가 소수점 아래 둘째짜리까지 측정된 값으로 설정되었으므로 두 점 A, B가 원 위에 병합되지 않는 상태라면 세 변의 길이가 완전히 같지 않을 수 있다.

터 삼각형 ABC를 작도하였으나 이미 외접원에 대한 인식이 강하게 남아 있었기 때문에 S는 외접원을 활용해야 한다는 생각에서 벗어나지 못하였다(#20). $\angle ACB = 90^\circ$ 가 아닌 경우를 고려하지 못한 채, S는 삼각형 ABC를 먼저 작도하고 그 위에 다른 작도를 추가하였다는 사실만으로 일반적인 삼각형에서 항상 성립하는 작도 방법을 찾았다고 믿는 듯 했다. 즉, S는 처음에 작도한 임의의 삼각형을 그 삼각형의 빗변이 외접원의 지름이 되도록 조작하였음에도 불구하고 그러한 조작이 삼각형의 경우를 제한한 것임을 깨닫지 못하는 것 같았다. 작도를 마친 학생들은 TR2의 안내에 따라 삼각형의 모든 점들을 드래그 해보았으며, 의미 있는 점 C의 위치에 집중하게 되었다. 점 C를 원을 따라 드래깅 검증함으로써 W는 삼각형 ABC에서 세 선분 PA, PB, PC의 길이가 모두 같음을 입증한 셈이었다(#30). 이제 점 C가 경로(원)를 따라 만들어낸 삼각형들을 살펴보면서 학생들의 관심은 일반적인 것(세 선분 PA, PB, PC가 반지름인 원 위에 내접한 삼각형 ABC)에서 특수한 것(세 선분 PA, PB, PC가 동일하게 유지되면서 경로를 따라 만들어진 다양한 형태의 삼각형들 ABC)으로 향하게 된다. 다시 한 번 W는 점 C를 드래그할 때, 세 선분 PA, PB, PC의 길이가 서로 같다는 1 수준 불변성을 인식하게 되었다(#30).

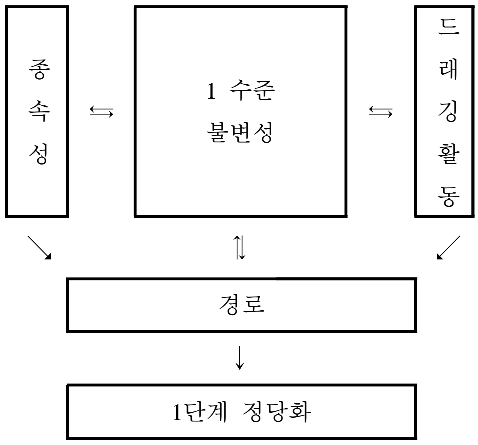
아래는 S가 자신들의 작도 이유를 활동지에 적은 내용이다([그림 Ⅳ-1]).



[그림 Ⅳ-1] S의 정당화

<표 Ⅱ-3>의 정당화 단계에서 1단계 '경험적·귀납적 정당화'와 2단계 '예에 의한 정당화'의 차이점은 학생이 자신의 주장을 정당화하기 위해 제시하는 예의 성질에 달려있다. 경험적·귀납적 정당화에서 사용되는 예는 대표적인 성질을 가지지 않는 평범한 예거나 극단적인 예이지만, 예에 의한 정당화는 일반적이고 포괄적인 예이다(김정하, 2010). S가 자신들의 작도 이유로 제시한 예는 (중심이 P이고 반지름이 PA인) 원 위에 삼각형 ABC가 내접한 상태에서 선분 CP가 두 삼각형 APC, BPC를 이등변삼각형으로 분할하며, 점 C에 의해 다양한 형태의 ABC가 만들어지더라도 세 선분 PA, PB, PC는 한 원의 반지름으로 그 길이가 동일하다는 것이다. 이러한 예는 일반적인 삼각형 ABC과 같이 보편적인 예가 아니라 반례가 존재하는 특수한 경우($\angle ACB = 90^\circ$)의 예로서 S가 작성한 정당화는 경험적·귀납적 정당화에 해당된다고 볼 수 있다.

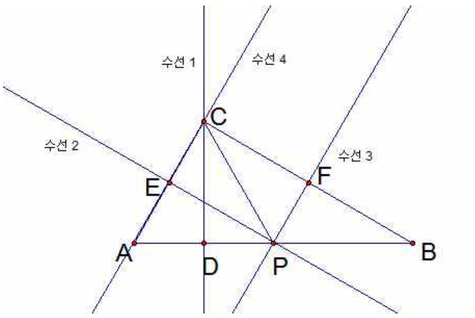
이상 기하 작도 문제를 해결하는 동안 S가 보인 인식과정을 [그림 Ⅳ-2]와 같이 나타낼 수 있겠다.



[그림 Ⅳ-2] 강건한 작도에서 나타난 S의 인식과정

2. 유연한 작도를 사용한 학생들의 기하학적 특성 인식 및 정당화 과정

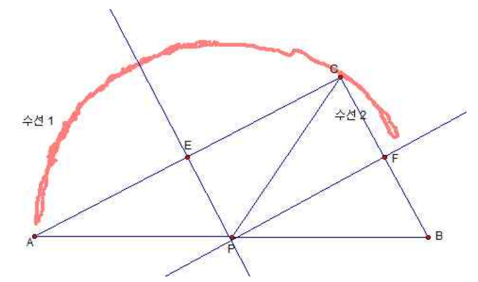
<u><발췌문 3 - E & D></u>



31 E : (삼각형 ABC를 작도하고 선분 AB의 중점 P를 작도한다.) 여기, 여기[선분 PA와 선분 PB]가 같다고 한다면. (선분 AP의 중점 D를 작도하고 수선1, 선분 AC의 중점 E와 수선2, 선분 BC의 중점 F와 수선 3을 차례로 작도한다.)
32 TR1 : 잘 되고 있니? 뭔가 많이 작도 한 것 같은데. 설명해 줄래?
33 E : 맨 처음에 삼각형 ABC에서 선분 AB의 중점 P를 잡고, 선분 AP의 중점 D를 다시 잡아서 수선[수선1]을 그었어요. 그리고 여기[선분 AC]랑 여기[선분 BC]에 중점[E, F]을 찍어서 수선[수선2, 수선3]을 그었어요.
34 TR1 : 그럼 수선 2랑 수선 3이 점 P에서 항상 만나니?
35 E : (점 C를 움직이다가 수선 2와 수선 3이 점 P와 만나지 않는 경우를 발견한다) 어 점 P랑 안 만나네..
36 TR1 : 그런데 수선 4는 뭐야?
37 E : 이건 그냥 그려졌어요.
38 TR1 : 그냥? ... 음... 선생님 생각에는 수선 3을 작도할 때, 점 C도 같이 클릭해서 점 C를 지나면서 선분 CB에 수직인 직선[수선 4]도 만들어진 것 같은데?
39 E : 아... 네.
40 TR1 : 그럼 이 수선 4는 삭제해도 되지? (수선 4를 삭제한다.) 수선 1에 대해서 설명해 줄래? 혹시 선분 CA, PC, PB가 서로 같아야 하니?
41 E : 아니요. (손으로 가리키면서) 여기[PA] 여기[PC]랑 여기[PB]가 같아야 해요.
42 TR1 : 삼각형 ACP에서 수선 1과 수선 2가 이렇게 되면 정삼각형 아닌가?
43 E : 정삼각형 이예요.
44 TR1 : 일부러 이렇게 정삼각형을 만든 이유가 있어?
45 E : 어? 그러네.
46 TR1 : 음... 정삼각형이어도 좋겠지만 두 변의 길이[선분 PA와 선분 PC]가 같다고 하면서 굳이 이 세 변[선분 PA, PC, AC]의 길이가 모두 같을 필요는 없잖아. 안 그래? (수선 1과 점 C를 분리하여 나란히 둔 상태에서 선분 PA, PC, PB를 같도록 유지하면서 점 C를 안내된 드래깅한다.)
47 E : 아...네.(다시 작도한다.)

E는 삼각형 ABC를 먼저 작도하고 변 AB의 중점 P가 두 수직이등분선(수선2, 수선3)의 교점과 만나도록 작도하였다(#31, 유연한 작도). 이것은 처음부터 원을 작도하고 그 원에 내접한 삼각형에서 항상 반지름 CP가 삼각형 ABC를 이등변삼각형들로 분할한다는 것을 보였던 S & W의 방식과는 다른 것이었다. 즉, S & W의 작도 방식은 자신의 직관과 이론에 근거하여 머릿속에 존재하는 그림을 그대로 작도하고 자신의 작도를 입증하는 수단으로 드래깅 검증을 사용한 반면, E는 문제에서 요구하는 도형이 나타날 때까지 다양한 개체를 드래그 하는 실험적인 수준의 작도를 보여 주었다. 더욱이 두 수선(수선 2와 수선3)의 교점이 중점 P와 항상 만나지 않는다는 사실을 확인한 것(#35)은 E의 작도 과정에서 중요한 부분이라 할 수 있다. 작도 과정에서 E는 기술적인 실수로 인해 수선 4를 만들었고(#37), 수선 1을 작도하여 정삼각형 APC를 만들었다(#43). 삼각형 APC를 정삼각형으로 작도하였던 E에게 TR1은 세 선분 PA, PB, PC를 같은 길이로 작도하였던 S & W와는 다른 방법(세 선분 CA, PC, PB를 같은 길이로 하여 이등변삼각형을 작도한 것)으로 작도한 것인지를 물었으나(#40), E는 자신의 전제(삼각형 APC가 정삼각형)가 잘못되었음을 알고(#45), 다시 작도를 시작하였다(#47).

<발췌문 4 - E & D>



48 E : (삼각형 ABC와 변 AB의 중점 P를 작도하고 변 AC의 중점 E, 변 BC의 중점 F를 작도한 뒤 각각 수선1과 수선 2를 작도하여 점 P와 만나게 한다.)
49 TR1 : 다시 작도했네. 음. (점 C를 임의적 드래깅하자 두 수선의 교점은 점 P와 만나지 않는다.) 점 C를 움직이니까 두 수선의 교점이 점 P가 안되네. 너희 두 수선이 점 P와 만나길 바라는 거니?
50 E, D : 네.
51 TR1 : 선생님이 점 C를 움직이는 이유가 뭘까? 너희가 다른 점들도 드래그 해 볼래?
52 E : (점 P, A, B를 차례로 드래그한다.)
53 E, D : (화면을 응시하면서 도형의 변화를 관찰한다. 점 P, A, B는 조금만 움직여도 점 P가 두 수선과 만나지 않음을 발견한다.)
54 E : (점 P가 두 수선과 만나도록 유지하면서 점 C를 안내된 드래깅 한다.)
55 TR1 : 어? 두 수선이 계속 점 P와 만나네.
56 D : 어.
57 TR1 : 점 C 흔적 남기기 해봐.
58 E : 아 네. (E는 두 수선이 점 P와 만나도록 유지하면서 점 C의 흔적 남기기를 계속 진행한다. 그러자 점 C의 흔적인 반원이 나타난다.)
59 E : 원이네.

E는 이전 작도에 있던 수선 1과 수선 4를 제거하여 다시 작도를 하였고(#48), TR1은 두 수선의 교점이 중점 P와 항상 만나지 않는다는 것을 재차 확인시켜 주었다(#49). 두 수선의 교점이 중점 P와 만나는 경우, 선분 CP는 삼각형 ABC를 두 이등변삼각형 APC, BPC로 분할하게 된다. 하지만 그런 일이 항상 일어나지 않는다는 것을 학생들이 확인하게 된다면, 자신들의 작도가 일반적인 삼각형이 아니라 특수한 경우의 삼각형($\angle ACB = 90^\circ$)에서만 가능함을 알게 된다. 즉, 학생들은 자신들의 작도가 일반적인 삼각형인 경우에는 성립하지 않을 수 있다는 반례를 발견하게 된 셈이다. 이제 학생들은 두 수선의 교점이 중점 P와 항상 만나지 않는다는 것을 인식하고, '두 수선의 교점이 중점 P와 만나는 조건'(이하 조건)을 만족하도록 점들을 드래그 하는 데 집중하였다(#53, #54). E는 '조건'을 만족하도록 점 P, A, B를 하나씩 안내된 드래깅 하였으며, 세 점 모두 그 위치에서 조금만 벗어나도 조건을 만족하지 못한다는 사실을 확인하였다(#53). 점 A를 드래그 함으로써 학생들은 수선 1은 점 A에 종속되며, 점 A를 움직이더라도 점 C와 점 B의 위치는 불변으로 남아 있으므로 점 C와 점 B의 위치는 점 A에 대하여 1 수준 불변성이다(#53). 마찬가지로 점 B를 드래그 함으로써 학생들은 수선 2는 점 B에 종속되며, 점 A와 점 P의 위치는 점 B에 대하여 1 수준 불변성이다(#53). E가 점 C를 드래그 하자 두 점 A와 B의 위치는 변하지 않았고 두 직선(수선 1, 수선 2)이 수직이등분선이라는 사실도 변하지 않았기 때문에 학생들은 점 C에 대하여 두 점 A, B의 위치와 두 수직이등분선(수선1, 수선2)은 1 수준 불변성이며, 두 수직이등분선(수선 1, 수선2)은 점 C에 종속됨을 인식할 수 있었다(#54). E가 조건을 만족하도록 점 C를 숨겨진 자취 드래깅 하자 세 선분 PA, PC, PB의 길이가 모두 같은 점 C의 경로가 드러났고(#59), 숨겨진 자취 드래깅을 통해 나타난 점 C의 흔적(경로)을 살펴보면서 이제 학생들의 관심은 특수한 것(세 선분 PA, PB, PC가 동일하게 유지되면서 경로를 따라 만들어진 다양한 형태의 삼각형들 ABC)에서 일반적인 것(세 선분 PA, PB, PC가 반지름인 원 위에 내접한 삼각형 ABC)으로 향한다. 두 수직이등분선(수선 1과 수선 2)은 점 C-불변성 혹은 기본적인 작도 불변성인 1 수준 불변성이다(점 C 혹은 기본 점을 임의적 드래깅 하여도 선분 AC의 수직

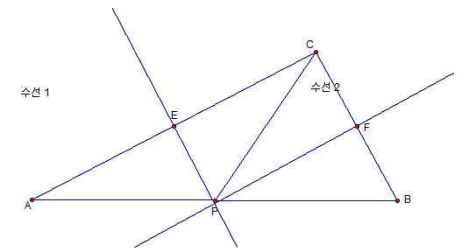
이등분선이라는 수선 1의 성질과 선분 BC의 수직이등분선이라는 수선 2의 성질은 불변이다). 두 수직이등분선의 교점과 점 P가 만나도록 점 C를 안내된 드래깅하는 조건을 추가할 때, 세 선분 PA, PB, PC의 길이가 서로 같음은 앞의 1 수준 불변성(수선 1과 수선 2)에서 파생된 '유도된 작도 불변성'인 1 수준 불변성이며, 이 세 선분을 반지름으로 하는 원(경로)에 점 C를 병합시키면 이 원은 추가 작도 불변성인 또 하나의 1 수준 불변성이 된다. 학생들은 조건을 만족하도록 점 C를 안내된 드래깅하여 경로를 만드는 과정에서 이러한 불변성을 확인하였다(#58, #59). 이상의 내용을 정리하면 <표 Ⅳ-1>와 같다.

<표 Ⅳ-1> 유연한 작도에서 나타난 불변성

1 수준 불변성	(1)	두 수직이등분선(수선 1, 2)은 항상 성립한다. : 점 C-불변성 혹은 기본적인 작도 불변성
1 수준 불변성	(2)	세 선분 PA, PB, PC의 길이가 모두 같다. : 유도된 작도 불변성
1 수준 불변성	(3)	점 C의 경로는 세 선분 PA, PB, PC를 반지름으로 하는 원이다. : 추가 작도 불변성
2 수준 불변성	(1) => (2)	두 수직이등분선이 중점 P와 만날 때, 세 선분 PA, PB, PC의 길이는 모두 같다.
2 수준 불변성	(1) => (3)	두 수직이등분선이 중점 P와 만날 때, 점 C의 경로는 세 선분 PA, PB, PC를 반지름으로 하는 원이다.

아래는 마지막 날(12월 18일) 모든 수업이 끝나고 E와 나눈 면담 내용이다(<발췌문 5>).

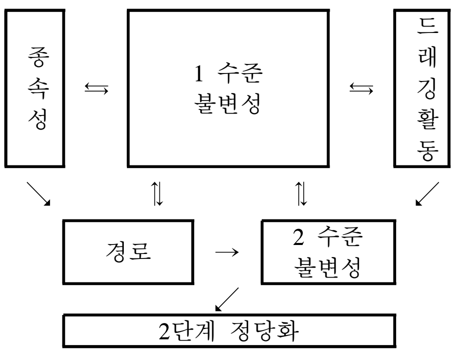
<발췌문 5 - E>



60 TR1 : (작성했던 활동지와 GSP 그림을 함께 보면서) 왜 처음에 수직이등분선으로 작도했어? 작도 이유 다시 설명해줄 수 있어?
61 E : 여기[변 AB]에 중심[중점] P를 찍고.. 이 삼각형[삼각형 APC]랑 이 삼각형[삼각형 BPC]이 이등변삼각형이 되려면 수직이등분선을 각각[변 AC, 변 BC]에 그어서 한 점 P에서 만나면 된다고 생각했어요. 그러면 이 세 길이[선분 PA, PB, PC]가 같잖아요.
62 TR1 : 우린 두 수선이 항상 점 P에서 안 만난다는 걸 확인 했잖아. 그건 어떻게 생각하니?
63 E : 좀 당황스러웠어요. 그런데 C를 움직이니까 쉽게 만나지더라구요.[두 수선의 교점과 점 P가 한 점에서 만나지더라구요]
64 TR1 : 그럼, 네 작도가 일반적인 삼각형에서도 항상 성립할까?
65 E : 일반적인 삼각형? 그게 무슨 말이에요?
66 TR1 : 음. 한 점 P에서 만나지 않는 그 때의 삼각형 [ABC]을 무시해도 될까?
67 E : 아. 일반적인 삼각형에는 안 될 것 같아요.[일반적인 삼각형에서 제 작도 방법은 안 될 것 같아요]

E는 S & W가 시각적인 요소(원)에만 호소했던 것에 비해 기하학적 성질에 의한 추론을 더 많이 사용하였으며, 자신의 작도가 일반적인 삼각형에서는 불가능하다고 말하면서 반례의 존재를 인정하였다(#67). E는 주어진 삼각형(삼각형 APC)에 대하여 밑변(변 AC)에 수직이등분선(수선1)을 작도하여 꼭지점(점 P)과 만나도록 한다면 삼각형의 합동조건($\overline{AE}=\overline{CE}, \angle AEP=\angle CEP, \overline{EP}$는 공통, SAS 합동)에 의하여 두 삼각형 AEP와 CEP는 합동이고 $\overline{PA}=\overline{PC}$이어서 삼각형 APC는 이등변삼각형이 된다는 사실을 알고 있었으며, 그러한 논리는 삼각형 BPC에 대해서도 마찬가지였다(#61).

경험적이고 귀납적인 방법에 의해 정당화하는 수준을 벗어나 예를 사용하여 연역적으로 설명하는 정당화 단계를 2단계인 ‘예에 의한 정당화’라고 한다(김수철, 2013). 2단계인 ‘예에 의한 정당화’에서 포괄적인 예란 좋은 예를 하나 또는 몇 개 제시하고 그에 연역적 설명을 더할 수 있는 경우를 말한다(김정하, 2010). 즉, 하나의 예를 일반적인 예로 사용하여 연역적인 설명을 할 수 있으면 1단계 정당화의 평범하거나 결정적인 예가 아니라 포괄적인 예라고 할 수 있다. 한편, 3단계의 ‘준연역적 정당화’는 결론을 연역할 때 식이나 기호를 사용하거나 논리적인 설명이 있어야 하는데, 수직이등분선과 삼각형의 합동조건을 사용하여 세 선분 PA, PB, PC의 길이가 같음을 구체적으로 보인 것은 아니기 때문에(#61), E의 정당화는 준연역적 정당화라고 보기는 힘들다. 반례를 인정하면서 선분 PC가 왜 삼각형 ABC를 두 개의 이등변삼각형으로 분할하였는지를 포괄적인 예를 제시하여 설명한 E의 정당화는 2단계인 ‘예에 의한 정당화’에 해당된다고 볼 수 있다. 2단계 정당화는 시각적 예나 포괄적 예를 사용한다는 점에서 예를 사용하는 1단계와 비슷하지만, 귀납적 사고 방법에 의해 정당화하지 않고 대표적인 예를 사용하여 연역적인 사고 방법으로 설명해 간다는 점에서 3단계의 준연역적 정당화의 과도기적인 단계로 이해될 수 있다(김정하, 2010).

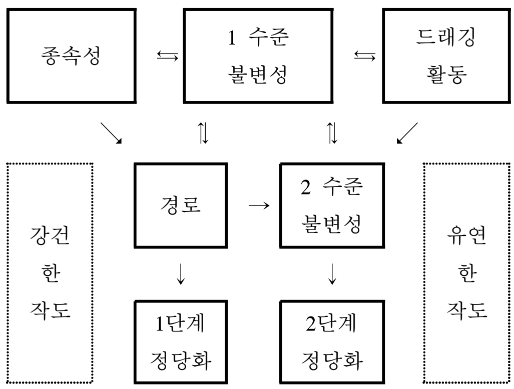


[그림 Ⅳ-3] 유연한 작도에서 나타난 E의 인식과정

이상 기하 작도 문제를 해결하는 동안 E가 보인 인식과정을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 나타낼 수 있겠다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서는 GSP 환경의 기하 문제에서 작도 접근 방식에 따라 학생들이 기하학적 특성을 인식하고 자신의 작도 이유를 정당화하는 과정을 살펴보았다. 학생들은 드래깅 활동과 종속성 및 1 수준 불변성을 파악하면서 자신의 작도 방식을 결정하였으며, 강건한 작도 방식을 택한 경우 바로 기본 점의 경로(원이나 직선 같은 도형)를 인식하여 1단계 정당화에 이른 반면, 유연한 작도 방식을 택한 경우에는 많은 시행착오를 거쳐 경로와 2 수준 불변성을 인식한 뒤 2단계 정당화에 이르렀다. 이러한 과정에서 종속성, 1 수준 불변성, 드래깅 활동의 상호작용은 경로와 2 수준 불변성, 정당화 단계에 지속적으로 영향을 주었다. 이상 기하 작도 문제를 해결하는 동안 S와 E가 보인 인식과정을 [그림 V-1]과 같이 나타낼 수 있겠다.



[그림 V-1] 작도 문제에서 보인 S & E의 인식과정

본 연구의 목적은 작도 접근 방식을 유형화하는 것이 아니라 작도에서 연역적이고 형식적인 증명 이전의 정당화까지 학생들의 다양한 사고 방식을 이해하기 위함이었다.

두 가지 작도 방식에 대한 분석을 통해 경험적이고 이론적인 양상 사이의 상호작용과 정당화 과정이 학생에 의해 작도된 개체에 따라 달라질 수 있음을 알 수 있었다. 강건한 작도에서 학생들은 예상된 결과를 야기하는 조건이 만족하는지 확인해야 하므로 기하에 대한 최소한의 지식을 필요로 하며, 확신에 찬 지식의 고착화로 인해 쉽게 반례를 인정하지 않았다. 유연한 작도는 결과를 얻을 수 있는 함축된 생각이나 조건들이 만족되도록 하여 경험적인 접근에서 이론적인 접근으로의 전환을 가능하게 해주므로 이러한 작도 방식을 통해 학생들은 자신의 지식에서 보다 더 많은 것을 얻게 되었다.

Piaget의 인식론에서 구체적인 사물의 성질들로부터 개념을 이끌어내는 것이 경험적 추상화이고, 인식 주체의 행동에 대한 일반적인 조정으로부터 이루어지는 추상화가 반영적 추상화라 할 때, 경험적 추상화 경우의 '내용'은 '관찰가능한 것(observables)'으로 이루어지지만, 반영적 추상화의 경우에는 '주체의 행동'이나 '조작'이 '내용'의 역할을 하게 된다(홍진곤, 1999). 1 수준 불변성에 대한 인식이 '도형의 성질' 자체를 발견하는 것이고, 2 수준 불변성에 대한 인식이 '도형의 성질 사이의 관계'를 파악한다는 점에서 드래깅 활동과 그에 대한 반성의 결과를 토대로 2 수준 불변성을 인식한 학생은 Piaget의 반영적 추상화에 이른 것으로 보인다. 즉, 2 수준 불변성을 인식하지 못한 학생은 1 수준 불변성을 다시 사고의 대상(내용)으로 여기는 '주제화(thematisation)'가 이루어지지 못했으며, 그 이유는 학생이 GSP를 입증을 위한 도구로만 여기고 자신의 유클리드 기하 지식에만 의존한 강건한 작도에 머물렀기 때문이다.

따라서 작도 활동으로 인한 경험과 유클리드 기하 이론이 서로 연결되기 위해서 학생들은 강건한 작도와 유연한 작도를 넘나들면서 수학적 추론과 정당화를 할 필요가 있으며, 유연한 작도가 공식적으로 교사에 의해 소개되고 가르쳐질 필요가 있다(Laborde, 2005).

본 연구는 4단계인 형식적・연역적 정당화가 어려운 중학교 1학년 학생들을 연구 대상으로 했다는 점에서 한계가 있지만, GSP 환경의 기하학적 특성인 불변성을 세분화하고, 작도 접근 방식을 도입하여 학생들의 불변성 인식과 정당화 과정을 세밀하게 살펴보았다는 점에서 차후 GSP를 활용한 수학 수업에서 학생의 사고과정을 이해하는 데 필요한 분석틀을 제공하였다는데 그 의의를 둘 수 있겠다.

참고문헌

김성대(2003). **증명지도에서 정당화의 의미와 사례 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김수철(2013). **정당화 지도를 위한 수업 모형 개발: 중학교 기하 영역을 중심으로**. 성균관대학교 대학원 박사학위논문.

김정하(2010). **초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

조미혜(2013). **중학교 수학 교과서의 기하영역 분석 - 추론과 정당화를 중심으로**. 서울대학교 석사학위논문.

양은경・신재홍(2014). 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석. **수학교육학연구, 24**(1), 1-27.

홍진곤(1999). **반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도**. 서울대학교 박사학위논문.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 34*, 66-72.

Baccaglini-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture- generation through maintaining dragging*, Unpublished doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, NH.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2007). *Cabri's role in the task of proving within the activity of building part of an axiomatic system*. Paper presented at the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education III, 7*, 234-282.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK* (Research Report) (pp. 601-613). London, UK: London Institute of Education, University of London.

Healy, L. (2000). *Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions*. Paper presented at the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-24), Hiroshima, Japan.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(2), 169-187.

Laborde, C. (2005, December). *Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments*. Paper presented at the 10th Asian Technology Conference in Mathematics, Cheong-Ju, South Korea

Laborde, J. M., & Strässer, R. (1990). Cabri-Geometre: A microworld of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt für didaktik der mathematik, 90*(5), 171-177.

Leung, A. (2012). *Discernment and reasoning in dynamic geometry environments*. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education , Seoul, Korea.

Leung, A., Chan, Y. C., & Lopez-Real, F. (2000). *Instrumental genesis in dynamic geometry environments*. Paper presented at the 17th ICMI Study Conference, Hanoi, Vietnam.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 145-165.

Maxwell, J. A. (2012). *Qualitative research design: An interactive approach (Vol. 41)*. Sage.

Merriam, S. B. (1997). 질적 사례연구법. (허미화, 역). 서울: 양서원.

Olivero, F. (2001). Conjecturing in open geometric situations using dynamic geometry: An exploratory classroom experiment. *Research in Mathematics Education, 3*(1), 229-246.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(1), 3-31.

Tall, D. (1995). Cognitive development, representations and proof. Paper presented at the Conference on *Justifying and Proving in School Mathematics*, London: Institute of Education.

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 91-119.

Seventh-Grade Students' Recognition of Geometric Properties and Justification Steps Emerging through Their Construction Approaches

Yang, Eun Kyung (Graduate School, Korea National University of Education)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

In the present study, we analyze four seventh grade students' recognition of geometric properties and the following justification processes while their adopting different construction approaches in GSP(Geometer's Sketchpad). As the students recognized dependency and level-1 invariants by dragging activities, they determined their own construction approaches. Two students, who preferred robust construction, immediately recognized the path of a draggable point and provided step-1 justification. The other students attempted soft construction followed by their recognition of level-2 invariants and the path, and came to step-2 justification.

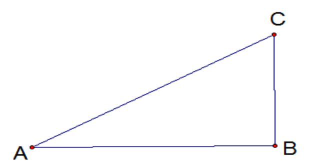
* Key Words : invariants (불변성), dragging activities (드래깅 활동), dependency (종속성), justification (정당화), GSP (Geometer's Sketchpad)

논문접수 : 2014. 9. 24
논문수정 : 2014. 10. 28
심사완료 : 2014. 11. 9

<부록 1> GSP 환경 이해하기 <활동지>

학교	학년	이름

<도입과제 1> <종속성, 불변성>



옆의 그림처럼 GSP를 이용하여 직각삼각형을 작도한 뒤, 물음에 답하시오.

① 선분 AB를 작도한다.

② 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선 l을 작도한다.

③ 직선 l 위의 한 점을 C라고 한다.

④ 선분 AC, BC를 작도한다. 수직인 직선 l을 숨긴다.

1. 점 A를 드래그할 때, 어떤 점은 움직이고 어떤 점은 그대로 있는가? 직각삼각형의 성질은 변하는가?

▶ 따라서 움직이는 점 :

▶ 그대로 있는 점 :

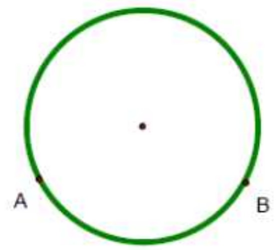
▶ 직각삼각형 모양은 변하더라고 성질은 그대로 있는가?

2. 점 B를 드래그할 때, 어떤 점은 움직이고 어떤 점은 그대로 있는가? 직각삼각형의 성질은 변하는가?

3. 점 C를 드래그할 때, 어떤 점은 움직이고 어떤 점은 그대로 있는가? 왜 그런 일이 벌어지는가? 직각삼각형의 성질은 변하는가?

4. 점 A, B와 점 C는 다르게 움직인다. 왜 그럴까?

<도입과제 2 - 경로, 일반화>



임의의 두 점을 지나는 원은 작도하라. 이러한 원은 얼마나 많이 작도될 수 있는가?

아래의 순서대로 작도하고 물음에 답하여라.

① 임의의 두 점 A, B를 작도한다.

② 점 A를 지나는 원을 작도하고 점 B가 지나도록 원의 중심 O를 조절한다.

③ 원의 중심을 클릭하고 점의 흔적 남기기를 선택한다.

④ 두 점 A, B를 지나도록 하면서 원의 중심을 움직인다.

1. 왜 원의 중심을 움직이는가?

2. 원의 중심의 흔적은 어떤 도형인가?

3. 3의 도형을 작도하고 그 도형 위로 원의 중심을 병합시킨 후 드래그하라.

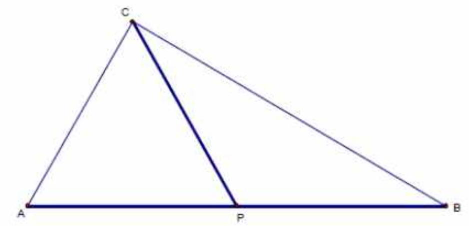
(도형 작도 -> 원의 중심과 도형 선택 - 편집 - 병합 -> 원의 중심 드래그)

4. 원의 중심의 흔적을 따라 드래그 한다는 것은 어떤 의미인가?

<u><부록 2> GSP 환경에서 작도문제 해결하기</u>

학교	학년	이름

<과제 1 - 작도>
(파일은 ‘이름 OOO, OOO 과제 1’로 저장해 주세요.)



삼각형 ABC가 두 개의 이등변삼각형이 되도록 직선 혹은 선분 CP를 작도하고 물음에 답하여라.

1. 작도 과정을 적어보자. (작도한 순서대로 자세하게 적어주세요.)

단계 1 :

단계 2 :

단계 3 :

단계 4 :

2. 움직이는 점과 움직이지 않는 점이 있는가?

3. 어떤 점을 움직이고 어떤 점을 고정할 것인가?

4. 움직인 점의 흔적은 어떤 도형인가?

5. 처음에 생각했던 것과 수정된 것이 있다면 이를 통합하여 최종 자신의 주장을 적어보자.

6. 자신의 방법으로 작도할 경우, 일반적인 삼각형 ABC에서도 직선 혹은 선분 CP가 두 개의 이등변삼각형으로 각각 분할한다고 말할 수 있는가? 왜 그런가?

7. 자신의 작도가 타당하다면 그 이유를 설명하여라.

주장 :

이유 :