East Asian Mathematical Journal
Vol. 30 (2014), No. 2, pp. 173-195
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2014.012

중세 이슬람이 보인 입방배적문제 해결방법들의 재조명과 시각화

The reinterpretation and the visualization of the cube duplication problem solving in medieval Islam

김 향 숙 · 박 진 석 · 이 은 경 · 이 재 돈 · 하 형 수

ABSTRACT. This study, utilizing several features about plane figures covered in the current secondary curriculum of mathematics and reviewing two solutions to cube duplication problem presented by Menaechmus, proving the solution by Nicomedes and visualizing solutions based on Apollonius′ ‘Conics’ by medieval Islam geometricians such as Abū Bakr al-Harawī , Abū Jáfar al-Khāzin, Nasīr al-Dīn al-Tūsī, Yūsuf al-Mu′taman ibn Hūd, introduce to teachers and students in the field where the question of cube duplication problem comes from and which solving method has developed it and suggests new methods for visualization using dynamic geometry program as well so that the contents reviewed can be used in the filed.

The solving methods to cube duplication problem in this paper are very creative and increase the practicality, efficiency and value of Mathematics, and provide students and teachers with the opportunities to reconfirm the importance and beauty of basic knowledge in the secondary geometry in the process of visualization of drawing figures using dynamic geometry program.

I. 서론

‘입방배적문제’는 ‘주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체 만들기’를 말하며, 이것이 『델로스의 문제(Delos′ problem)』라 불리게 된 재미있는 유래[1)]에 대해서는 여러 문헌에

2014년 2월 6일 투고, 2014년 2월 25일 심사완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97B20, 01A30
Key Words: cube duplication problem, medieval Islam, construction, visualization

1) 델로스의 문제가 생기게 된 유래에 관한 다음과 같은 전설이 있다. 오랜 옛날 그리스에 역병이 유행했다. 계속해서 쓰러지는 동포를 구하기 위해 사람들은 에게해(Aegean Sea)의 델로스라는 섬에 있는 신에게 기도를 드렸더니, 신이 이르기를 “제단(altar)을 크게 고쳐라. 그렇게 하면 역병이 멈출 것이다. 단, 지금까지의 신전과 같은 모양으로 부피가 2배가 되도록 해야 한다.” 처음에는 간단히 생각하고 각

소개되고 있다(Sinclair, N. M., 1995; 海老原圓, 2008). 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 도형을 그리는 고전적인 작도에 의한 입방배적문제 해결은 주로 플라톤(Platon, B.C. 427?-347?)학파를 중심으로 시도되었으나 성공하지 못하였다. 한편 기원전 4세기 후반 경에 Chios의 히포크라테스(Hippocrates, B.C. 460?-377?)에 의해 이 문제가 주어진 두 선분 사이의 비례중항(mean proportional) 2개를 찾는 문제, 즉

두 선분 p, q가 주어졌을 때

$$p : x = x : y = y : q \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

를 만족하는 비례중항 x와 y를 찾는 문제[2)]로 귀착되면서, 그 때까지의 접근방법을 탈피한 곡선을 이용한 입방배적문제 해결방법들이 등장하기 시작하였다. 비록 그 당시에는 '기계적'이라는 이유로 배척당했던 곡선을 이용한 입방배적문제의 해결방법 중에서 특히 기원전 350년경 메나이크모스[3)](Menaechmus, B.C. 380?-320?)가 처음으로 시도한 것으로 알려지고 있는 직원뿔의 평면에 의한 절단인 원뿔곡선을 이용한 두 가지 방법, 즉

M_1: 포물선 $x^2 = py$ 와 포물선 $y^2 = qx$ 의 교점을 이용한 비례중항찾기[4)],
M_2: 포물선 $x^2 = py$ 와 쌍곡선 $xy = pq$ 의 교점을 이용한 비례중항 찾기

는 중세 이슬람 문화권으로 전승되었으며, 특히 이 두 방법 M_1과 M_2를 바탕으로 아폴로니우스(Apollonius, B.C. 262?-190?)의 '원뿔곡선론(Conics)'에 나타나 있는 원뿔곡선에 관한 다양한 성질을 활용하여 보다 명확하면서도 발전적인 여러 가지 방법들이 얻어졌다.

그런데 놀라운 사실은 중세 이슬람 기하학자들이 보인 입방배적문제 해법들에는 모두 '해석'[5)] 뿐만이 아니라 찾고자 하는 곡선의 존재성을 '작도방법'으로도 제시하고 있다는 것이다. 그러나 입방배적문제에 대해 중세 이슬람 기하학자들이 쓴 대부분의 논문들에서 제시하고 있는 곡선의 존재성은 Apollonius의 '원뿔곡선론'에 의존하고 있으며, 따라서 조건에 맞는 원뿔을 찾아 그 원뿔을 적합한 평면으로 자른 절단면으로서 필요한 곡선을 얻어 이용하고 있다.

한편 우리나라 현행 중등수학 교육과정에서의 원뿔곡선은 주로 해석기하학적인 입장에서 다루어지고 있으며, 교과서 지면의 제한으로 가장 보편적인 내용만이 소개되고 있는 실정이다.

변의 길이를 2배하여 만들었지만 신의 노여움을 진정시킬 수 없었다. 결국 현인으로 알려진 플라톤에게 그 해결 방법을 의뢰하게 되었으며, 플라톤은 무지한 목수가 저지른 실수를 지적하고 사람들이 학문을 게을리 한 것을 나무랐다. 그 때부터 이것을 수학문제로 취급하게 되었다고 전해지고 있다.

2) 오늘날의 대수적 표현을 빌리면, 이 문제는 3차 방정식 $x^3 = p^2q$ 를 푸는 것과 동치이다.

3) 에우독소스(Eudoxus, B.C. 409?-355?)의 제자로 기원전 4세기 중반에 활동한 수학자이다.

4) 방법 M_1은 실제로 유토시우스(Eutocius, B.C. 540?-480?)에 의해 주어진 것으로 전해지고 있다(Knorr, W., 1989; Nathalie M. Sinclair, 1995)

5) 고대 그리스인들의 문제해법의 상습적인 수단으로, 문제가 풀렸다고 가정해서 그 해법을 탐구하는 것을 의미하며, 이를 '해석'이라 불렀다.

이와 같은 의미에서 본 연구는 현행 중등수학 교육과정에서 다루고 있는 평면도형에 관한 기본적인 몇 가지 성질을 활용하여 위에서 소개한 기원전 4세기 중반 Menaechmus의 두 방법 $M_1,\ M_2$ 에 제시된 원뿔곡선들의 교점을 찾는 문제를 출발점으로 하여, 기원전 3세기 중반 그리스 수학자 니코메데스(Nicomedes, B.C. 280?-210?)가 제시한 방법 및 9세기경부터 13세기경까지 활동한 중세 이슬람 기하학자들 Abū Bakr al-Harawī, Abū Jáfar al-Khāzin(A.D. 900-971), Nasīr al-Dīn al-Tūsī(A.D. 1201-1274), Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd(A.D. 1050-1100)(이하 이들 이슬람의 네 기하학자들을 함께 명기할 경우에는 간단히 AANY로 나타내기로 한다.)가 Apollonius의 '원뿔곡선론'을 이용하여 보인 입방배적문제 해결방법들을 재조명 해 봄으로써, 현장의 교사와 학생들에게 입방배적문제가 어떠한 역사적 배경에서 나오게 되었으며 어떻게 발전해 왔는지를 보여주고, 또한 재해석한 해결방법들이 현장에서 활용 가능하도록 하기 위해 새로운 증명법이나 동적기하 프로그램을 활용하여 시각적으로 구현한 새로운 방법을 제시한다.

본 논문에 소개한 고대 그리스 및 중세 기하학자들이 보인 입방배적문제 해결방법들은 현행 중등수학 교육과정과 직접적인 연관성이 없는 듯 보이지만, 실제로는 그 해결방법들이 너무나 독창적이다. 더욱이 작도에 사용된 원뿔곡선은 중등수학 교육과정의 미·적분에서도 활용되고 있는 현실에 비추어볼 때, 그들의 작도법을 동적기하 프로그램을 활용하여 새롭게 구현해 보는 것은 학교현장에 활용할 수 있는 새로운 교수 학습 자료 제시, 수학의 실용성 및 수학의 가치와 효율성 증대는 물론이고 나아가 동적기하 프로그램을 활용하여 작도법을 시각화하는 과정에서 활용한 중등기하의 기초 지식의 중요성 및 아름다움을 재확인하는 기회를 교사와 학생들에게 제공해 줄 것으로 기대한다.

II. 본 론

본론에서는 서론에서 소개한 Menaechmus의 입방배적문제 해결을 위한 두 가지 방법 M_1 과 M_2에 제시된 원뿔곡선들의 교점을 찾는 문제를 출발점으로 하여, 고대 그리스 수학자 Nicomede의 해법의 새로운 증명법 제시 및 중세 이슬람 네 기하학자들 AANY가 Apollonius의 '원뿔곡선론(Conics)'을 이용하여 보인 입방배적문제 해결방법들을 재조명하고 동적기하 프로그램을 활용하여 시각적으로 구현한 새로운 작도법을 제시한다.

1. Menaechmus가 제시한 입방배적문제 해결방법 M_1과 M_2

기원전 4세기 중반 경에 Menaechmus가 찾은 것으로 알려진 방법 M_1 (Sinclair, N. M., 1995)의 '해석'을 현대적인 기법으로 설명하고, 그 재해석에 맞추어 동적기하 프로그램을 활용한 새로운 작도법을 제시한다.

가. Menaechmus의 방법 M_1에 대한 재해석과 시각화

1) Menaechmus의 방법 M_1에 대한 재해석

$p = \overline{AO}$, $q = \overline{OB}$ 라 하고, $\angle AOB = 90^\circ$ 라 한다(아래의 [그림 2.1] 참조). 먼저

$$\overline{AO} : \overline{OM} = \overline{OM} : \overline{ON} = \overline{ON} : \overline{OB}$$

를 만족하는 선분 OM 과 ON 을 찾았다고 하자(식 ① 참조).

이때 선분 BO 의 연장선상에 점 O 로부터 $\overline{OM}$ 만큼 떨어져있는 점 M 을 잡고, 마찬가지로 선분 AO 의 연장선상에 점 O 로부터 $\overline{ON}$ 만큼 떨어져있는 점 N 을 잡아 직사각형 $OMPN$ 을 [그림 2.1]처럼 만들면

$$\overline{OB} \cdot \overline{OM} = \overline{ON}^2 = \overline{PM}^2$$

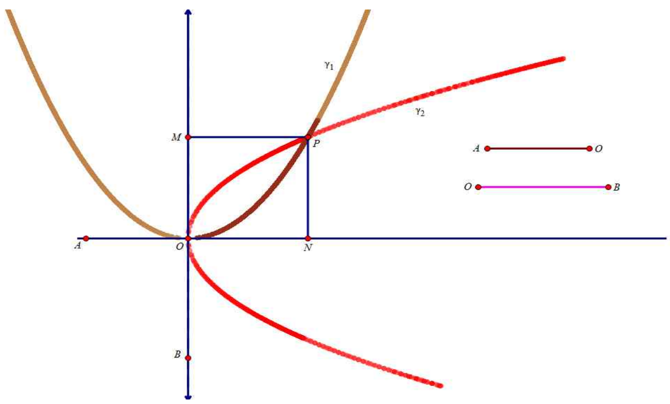
을 만족한다. 그러므로 점 P 는 점 O 를 꼭짓점, 직선 OM 을 (대칭)축, $q = \overline{OB}$ 를 매개변수(parameter)로 하는 포물선 γ_1 위에 놓여있다. 또

$$\overline{AO} \cdot \overline{ON} = \overline{OM}^2 = \overline{PN}^2$$

이므로 점 P 는 점O 를 꼭짓점, 직선 ON 을 (대칭)축, $p = \overline{OA}$ 를 매개변수(parameter)로 하는 포물선 γ_2 위에도 놓여있다. 그러므로 이 문제는 포물선 γ_1 과 γ_2 를 그려 그 교점을 찾으면 해결된다. ◆

2) Menaechmus의 방법 M_1에 대한 시각화

먼저 직선 AO 상에 $\overline{OB} = \overline{OC}$ 를 만족하는 점 C 를 아래의 [그림 2.2]처럼 잡아, 이 점을 지나는 직선 AO 의 수선위에서 임의의 점 D 를 택한다.



[그림 2.1]

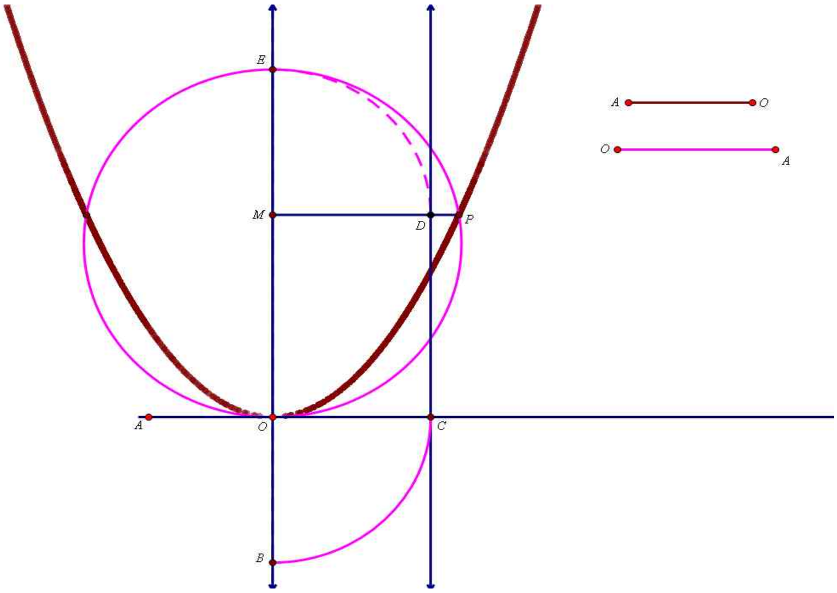
다시 점 D 에서 직선 BO 위에 내린 수선의 발 M 을 택해서 이 점을 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{MD}$ 인 원과 직선 BO 와의 교점을 E 라 한다. 이때 지름이

$$\overline{OM}+\overline{ME}$$

인 원을 그려 이 원과 직선 MD 의 교점을 P 라 하면 $\triangle EPO$ 는 $\angle EPO=90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\angle PMO=90^\circ$ 이므로 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리를 적용함으로써

$$\overline{PM}^2=\overline{OM}\cdot\overline{ME}=\overline{OM}\cdot\overline{MD}=\overline{OM}\cdot\overline{OC}=\overline{OM}\cdot\overline{OB}$$

를 얻을 수 있다.



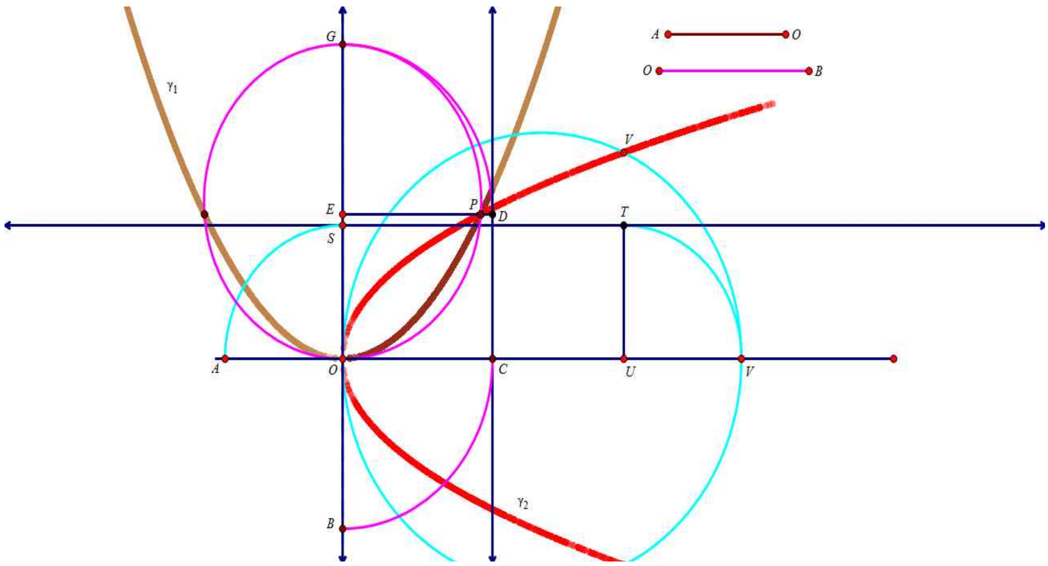
[그림 2.2]

[그림 2.2]에서 점 D 에 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)[6]』를 명령하고 점 P 에는 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하여 실행을 하면 점 P 의 흔적으로 포물선 γ_1 을 얻을 수 있다.

똑같은 방법으로 점 T 와 V (아래의 [그림 2.3] 참조)를 찾아 점 T 에 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고 점 V 에는 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하여 실행을 하면 포물선 γ_2 를 얻을 수 있다.

아래의 [그림 2.3]은 주어진 두 선분 AO, OB 에 대한 포물선 γ_1 과 포물선 γ_2 를 그려 그 교점으로 점 P 를 구한 것이다. ◆

6) GSP의 실행화면에서 쉽게 찾을 수 있는 명령어이다.



[그림 2.3]

참고 1.1. $\angle AOB = 90°$ 로 잡지 않고 평행선을 그어 위의 작도방법을 적용하면 될 듯이 보이나 실제로는 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리를 적용할 수 없으므로 불가능하다.

나. Menaechmus의 방법 M_2에 대한 재해석과 시각화

1) Menaechmus가 제시한 방법 M_2에 대한 재해석

방법 M_1에서와 같이 직사각형 $OMPN$을 만들면

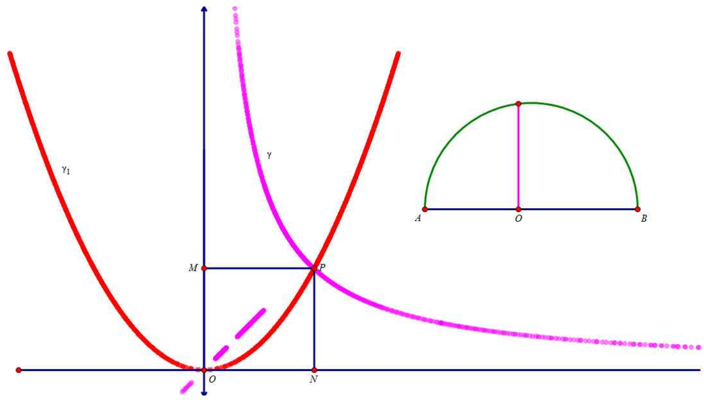
$$\overline{OB} \cdot \overline{OM} = \overline{ON}^2 = \overline{PM}^2$$

이 성립한다. 따라서 점 P는 포물선 γ_1 위에 놓여있어야 한다([그림 2.4] 참조). 또한

$$\overline{AO} \cdot \overline{OB} = \overline{OM} \cdot \overline{ON} = \overline{PN} \cdot \overline{PM} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

이므로 점 P는 직선 OM, ON을 점근선으로 하는 쌍곡선 γ 위에 놓여있다[7].
따라서 점 P는 포물선 γ_1과 쌍곡선 γ의 교점이다.

7) 쌍곡선은 Apollonius의 symptom으로 정의되어있지만(Berggren, J. L., 1986; 김향숙·박진석·하형수, 2011; 김향숙·박진석·하형수, 2013; Sinclair, N. M., 1995) 성질 ②를 만족하는 점의 자취로도 특징지어짐이 Archimedes(B.C. 287?-212?)에 의해 밝혀진 것으로 알려져 있다. 실제로 그는 다음과 같이 말하고 있다; "그 곡선상의 임의의 점 P를 지나고 한 쪽 점근선에 평행인 직선이 다른 쪽 점근선과 만나는 점을 각각 K, L이라 할 때, $\overline{PK} \cdot \overline{PL} =$ constant 이다." 아마도 Archimedes는 두 점근선이 직교하는, 다시 말해서 직각쌍곡선의 성질을 알고 있은 듯하다(Sinclair, N. M., 1995). 일반적으로 쌍곡선상의 임의의 점에서 점근선에 이르는 거리의 곱은 일정하다.(박진석·김향숙, 2013.)



[그림 2.4]

그러므로

$$\overline{AO} : \overline{PN} = \overline{PN} : \overline{PM} = \overline{PM} : \overline{OB}$$

가 성립한다. 따라서 포물선 γ_1 과 쌍곡선 γ 를 그려 그 교점을 구하면 된다. ◆

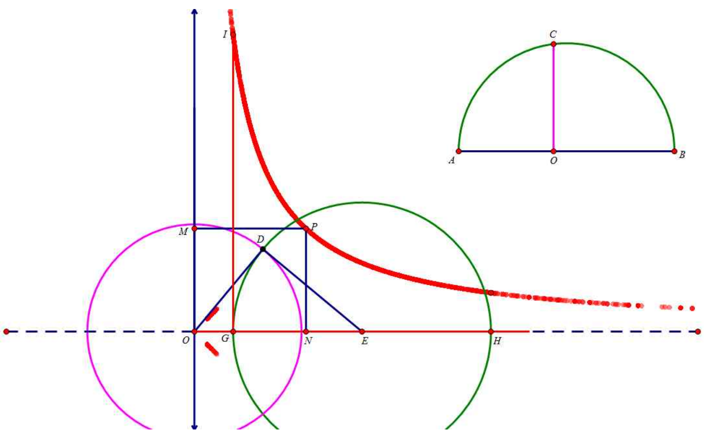
2) Menaechmus의 방법 M_2에 대한 시각화

포물선 γ_1 의 작도방법은 이미 방법 M_1에 주어져있으므로 쌍곡선 γ 의 작도방법만 보이면 충분하다. 먼저 지름이 $\overline{AO} + \overline{OB}$ 인 반원과 점 O 에서 이 지름에 세운 수선과의 교점 C 를 잡으면 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리로부터

$$\overline{OC}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{OB} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

를 얻을 수 있다.

이제 점 O 를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{OC}$ 인 원 O 상에 놓여있는 임의의 점 D 를 잡아, 원 O 의 점 D 에서의 접선이 직선 AO 와 만나는 점을 E 라 한다.([그림 2.5] 참조)



[그림 2.5]

다시 점 E를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{DE}$인 원과 직선 OE와의 교점을 위의 그림처럼 차례로 G, H라 하면, 원 밖의 한 점에서 그은 할선의 성질(secant property of circle)로부터

$$\overline{OD}^2 = \overline{OG} \cdot \overline{OH} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

가 성립함을 알 수 있다. 여기서 점 G에서 세운 직선 AO의 수선 상에

$$\overline{GI} = \overline{OH}$$

를 만족하는 점 I를 잡아, 점 D에 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고 점 I에는 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하여 실행을 하면 쌍곡선 γ를 얻을 수 있다. 물론 ②, ③, ④로부터 점 P는 이 쌍곡선위에 놓여있음을 쉽게 알 수 있다. ◆

2. 입방배적문제에 관한 중세 이슬람 기하학자들의 새로운 도전

기원전 4세기 전반에 Chios의 Hippocrates가 입방배적문제는 두 개의 비례중항을 찾는 문제로 귀착된다는 것을 보인 이후부터 이에 관한 고대 그리스인들의 도전은 여러 각도에서 시도되었으며, 그 결과를 중세 이슬람 기하학자들이 아라비아어로 번역하는 과정에서 고대 그리스인들이 밝힌 화려한 원뿔곡선에 관한 이론들을 입방배적문제해결에 적용할 충분한 기회를 가지게 되었다(Sinclair, N. M., 1995).

이 절에서는 고대 그리스 수학자 Nicomede의 해법에 대한 재해석과 새로운 증명법 제공을 포함하여, 중세 이슬람 네 기하학자들 AANY가 Apollonius의 '원뿔곡선론'을 이용하여 보인 입방배적문제 해결방법들을 재조명하고 동적기하 프로그램을 활용하여 시각적으로 구현한 새로운 방법을 제시한다. 이외에도 많은 결과가 있으나, 여기서는 Sinclair, N. M.(1995)에 소개되어 있는 몇 가지 입방배적문제의 해결방법들을 현행 중등수학 교육과정의 입장에서 해설하고, 아울러 동적기하 프로그램 활용한 새로운 작도방법도 보여준다.

가. Abū Bakr al-Harawī가 보인 해결방법의 재해석과 시각화

중세 이슬람 기하학자들이 보인 방법들 중에는 특히 원과 쌍곡선을 이용한 것이 많으며, 그 중에서도 9세기경의 Abū Bakr al-Harawī가 보인 방법은 Apollonius의 'neusis construction[8]'을 Apollonius의 '원뿔곡선론'과 접목시킨 독보적인 내용으로 생각한다.

1) Abū Bakr al-Harawī가 제시한 방법의 재해석

먼저 주어진 두 선분 OA, OB를 아래의 [그림 2.6]처럼 서로 직교하도록 배치하여, 선분

8) http://mathworld.wolfram.com/ 참조.

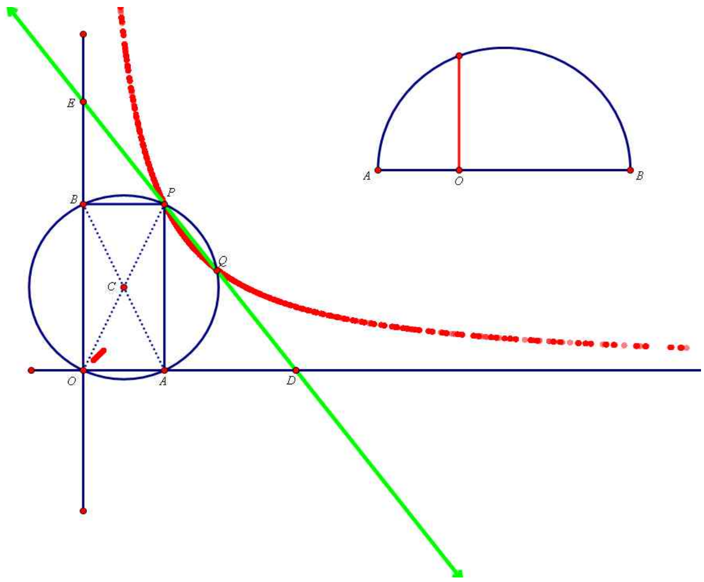
OA, OB를 이웃하는 두 변인 직사각형 $OAPB$를 만들고 두 대각선의 교점 C를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{CP}$인 원(실제로 직사각형 $OAPB$의 외접원) C를 그린다. 다시 점 P를 지나고 직선 OA, OB를 점근선으로 하는 쌍곡선을 그려, 원과의 또 다른 교점을 Q라 하고, 직선 PQ와 점근선 OA, OB와의 교점을 차례로 D, E라 한다. 이때 $\overline{DQ}=\overline{EP}$ (Heath, T. L., 1896, Proposition 32[9]; 박진석·김향숙, 2013)이고, 또 원 C 밖의 한 점 E에서 그은 할선의 성질로부터

$$\overline{EB}\cdot\overline{EO}=\overline{EP}\cdot\overline{EQ}$$

를 얻는다. 마찬가지로

$$\overline{DQ}\cdot\overline{DP}=\overline{DA}\cdot\overline{DO}$$

도 성립한다. 그런데 $\overline{EQ}=\overline{DP}$, $\overline{DQ}=\overline{EP}$ 이므로



[그림 2.6]

$$\overline{EB}\cdot\overline{EO}=\overline{DQ}\cdot\overline{DP}=\overline{DA}\cdot\overline{DO}$$

이다. 따라서

$$\overline{OD}:\overline{OE}=\overline{BE}:\overline{DA}$$

이다. 한편 $\triangle EBP \backsim \triangle EOD \backsim \triangle PAD$ 이므로

$$\overline{DO}:\overline{EO}=\overline{PB}:\overline{EB}=\overline{DA}:\overline{PA}$$

이다. 여기서 다시 $\triangle EBP \backsim \triangle PAD$ 임을 이용하면

$$\overline{DO}:\overline{EO}=\overline{PB}:\overline{EB}=\overline{EB}:\overline{DA}=\overline{DA}:\overline{PA}$$

9) Heath, T. L.(1896)은 Apollonius의 "Conics"를 나름대로 재편집하여 "Proposition"으로 적절히 묶은 것이며, 여기서의 "Proposition 32"는 Heath, T. L.(1896)의 표기를 따른 것이다.

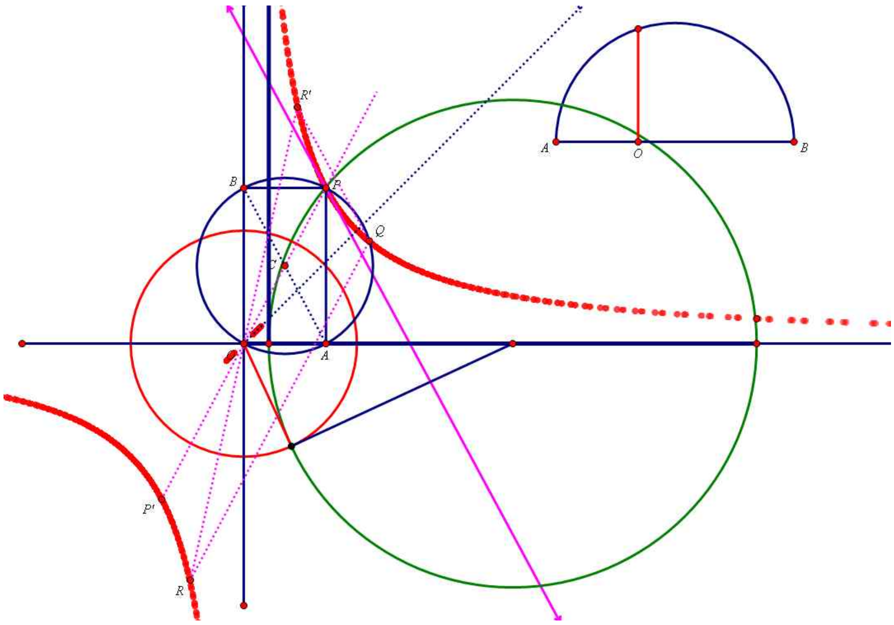
를 얻을 수 있다. 이 등식과 $\overline{BP} = \overline{OA}$ 로부터

$$\overline{OA} : \overline{BE} = \overline{BE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{OB}$$

가 성립함을 알 수 있다. 즉 $\overline{BE}$, $\overline{AD}$ 가 구하고자 하는 비례중항이다. ◆

2) Abū Bakr al-Harawī 가 제시한 방법의 시각화

주어진 선분 OA, OB 를 이웃하는 두 변인 직사각형 $OAPB$ 의 꼭짓점 P 를 지나며, 직선 OA, OB 를 점근선으로 하는 쌍곡선의 작도는 1.2절의 방법 M_2 의 (2)에서 보인 작도방법을 따르면 된다(아래의 [그림 2.7] 참조). ◆



[그림 2.7]

참고 2.1 Abū Bakr al-Harawī 의 해석에서 간과할 수 없는 사항은 직사각형 $OAPB$ (단, $\overline{OA} < \overline{OB}$)의 꼭짓점 P 를 지나며, 직선 OA, OB 를 점근선으로 하는 쌍곡선은 반드시 원 C 와 점 P 와는 다른 또 다른 점(여기서는 점 Q 에 해당함)에서 만난다는 증명이 보이지 않고 있다. Abū Bakr al-Harawī 는 과연 이 사실을 어떻게 알았을까? 아래의 [그림 2.8]에서 보인 방법은 만약 직사각형 $OAPB$ (단, $\overline{OA} < \overline{OB}$)의 꼭짓점 P 를 지나며, 직선 OA, OB 를 점근선으로 하는 쌍곡선이 원 C 와 점 P 이외의 점에서는 만나지 않는다면, 이 쌍곡선의 점 P 에서의 접선[10]은 원 C 의 반지름 CP 와 직교할 수밖에 없다. 그러나 이 쌍곡선의 점 P 에서의 접선은 원 C 의 반지름 CP 와 직교하지 않으므로 또 다른 한 점에서 만남을 알 수 있다.

10) 이 접선을 작도하는 방법은 참고문헌 [2](김향숙・박진석・하형수, 2013) 참조.

나. Abū Jáfar al-Khāzin이 보인 해결방법1의 재해석과 시각화

1) Abū Jáfar al-Khāzin이 제시한 방법1의 재해석

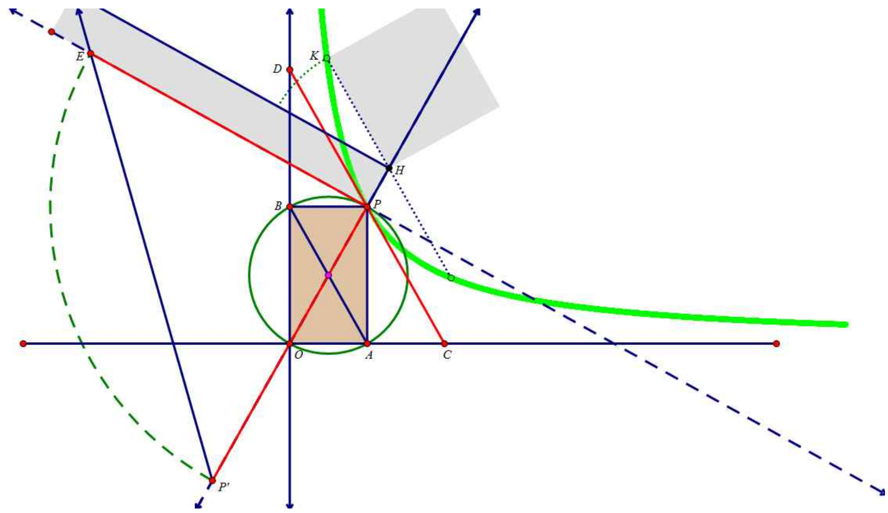
10세기경의 기하학자로 알려진 Abū Jáfar al-Khāzin은 Abū Bakr al-Harawī가 말한 “직사각형 $OAPB$의 꼭짓점 P를 지나며, 직선 OA, OB를 점근선으로 하는 쌍곡선”을 특이하게 얻은 후 나머지 과정은 Abū Bakr의 방법을 따른 것으로 알려져 있다(Knorr, W., 1989). 실제로 Abū Jáfar의 특이한 쌍곡선은 Apollonius의 ‘원뿔곡선론’을 이용한 것이며 다음과 같이 구했다(Sinclair, N. M., 1995).

주어진 선분 OA, OB가 이웃하는 두 변인 직사각형 $OAPB$의 꼭짓점 P를 지나며 대각선 AB와 평행인 직선을 그어, 이 직선이 두 직선 OA, OB와 만나는 점을 차례로 C, D라 한다(아래의 [그림 2.8] 참조).
이때 사각형 $ACPB$와 $APDB$는 평사변형이므로

$$\overline{OA} = \overline{BP} = \overline{AC}\ ,\quad \overline{OP} = \overline{AB} = \overline{CP} = \overline{DP}$$

그러므로 점 P의 점 O에 관한 대칭점을 P'이라 하면

$$\overline{PD}^2 = \frac{1}{4}\overline{PP'}^2 = \frac{1}{4}\overline{PP'}\cdot\overline{PP'}$$

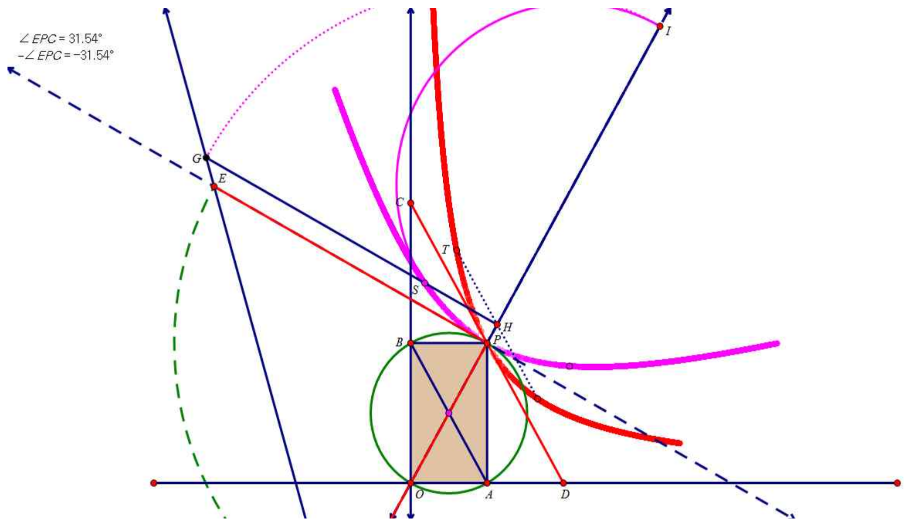


[그림 2.8]

따라서 $\overline{PP'}$을 횡단변(transverse side)으로 하고 $p := \overline{PP'}$을 매개변수로 하는 쌍곡선으로 직경 PP'의 세로좌표(ordinate)가 선분 CD에 평행인 것을 그리면 된다(Knorr, W., 1989; Heath, T. L., 1896, Proposition 31, p. 56). 이 경우에 직선 OA, OB는 이 쌍곡선의 점근선이며 직선 CD는 점 P에서의 접선이다. ◆

2) Abū Jáfar al-Khāzin이 제시한 방법1의 시각화

먼저 점 P에서 세운 직경 PP'의 수선 상에 $\overline{PE}=\overline{PP'}$을 만족하는 점 E를 찾아, 반직선 $P'E$를 긋는다. 다시 반직선 $P'E$ 상에 있으며 E보다 위쪽에 놓여있는 임의의 한 점 G를 잡아 직선 $P'P$에 내린 수선의 발을 H라 하여, $\overline{HG}=\overline{HI}$인 점 I를 직선 $P'P$ 상에서 택한다. 이제 지름이 $\overline{PH}+\overline{HI}$인 반원을 그려 수선 GH와 만나는 점 S를 잡아, 점 H를 중심으로 $\angle EPC$만큼 시계바늘방향으로 회전한 점을 T라 한다. 이때 점 G에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고 점 T에는 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하여 실행을 하면 우리가 찾고자 하는 쌍곡선(아래의 [그림 2.9]참조)을 얻을 수 있다(김향숙·박진석·하형수, 2013). ◆



[그림 2.9]

다. Abū Jáfar al-Khāzin이 보인 해결방법2에 대한 재해석과 시각화

1) Abū Jáfar al-Khāzin이 제시한 방법2에 대한 재해석

Abū Jáfar al-Khāzin이 보인 또 하나의 방법은 conchoid[11]를 이용한 Nicomedes의 방법에서 conchoid 대신에 쌍곡선을 이용한 것으로, 이처럼 원뿔곡선을 이용한 방법은 '기하적(geometric)'이라 부르는 반면에 그 이외의 방법은 '기계적(instrumental)'이라 불렀다.

지금부터 Sinclair, N. M.(1995)가 소개하고 있는 Abū Jáfar al-Khāzin의 쌍곡선을 이용한 방법을 재구현하기로 한다.

11) 참고문헌 [2](김향숙 · 박진석 · 하형수, 2013) 참조.

먼저 주어진 두 선분 AB, BG (단, $\overline{AB} > \overline{BG}$)를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형 $ABGD$ 를 아래의 그림처럼 만든다. 선분 AB, BG 의 중점을 차례로 E, Z 라 하고, 직선 DE 와 BG 의 교점을 H 라 하면

$$\overline{BH} = \overline{BG}$$

이다. 또, 점 Z 에서 내린 직선 BG 의 수선 상에 $\overline{GT} = \overline{BE}\,(= \overline{EA}\,)$ 를 만족하는 점 T 를 잡는다. 그리고 점 T 를 지나고 직선 BG 에 평행인 직선과 점 G 를 지나고 직선 HT 에 평행인 직선의 교점을 K 라 한다. 이제(*) 반직선 BG 상에 놓여있는 점 O 로서 선분 GK 와 TO 의 교점을 F 라 할 때 $\overline{OF} = \overline{GT}$ 를 만족하는 것을 잡으면, $\overline{GF} \,//\, \overline{HT}$ 이므로

$$\overline{OG} : \overline{GH} = \overline{OF} : \overline{FT}$$

를 얻을 수 있다. 따라서

$$\overline{OG} : 2\,\overline{BG} = \frac{1}{2}\overline{AB} : \overline{FT} \quad , \quad \text{즉} \quad \overline{AB} : \overline{GO} = \overline{FT} : \overline{BG}$$

이다. 여기서 반직선 OD 와 직선 BA 의 교점을 C 라 하면

$$\triangle CAD \backsim \triangle DGO$$

이므로 $\overline{DG} : \overline{GO} = \overline{CA} : \overline{AD}$ 이다. 그런데

$$\overline{DG} = \overline{AB}\ ,\ \overline{AD} = \overline{BG}$$

이므로 $\overline{AB} : \overline{GO} = \overline{CA} : \overline{BG}$, $\overline{FT} = \overline{CA}$ 가 성립한다. 그러므로 Nicomedes의 증명12) 을 따라 선분 GO, CA 는 선분 AB, BG 사이에 놓여있는 비례중항, 즉

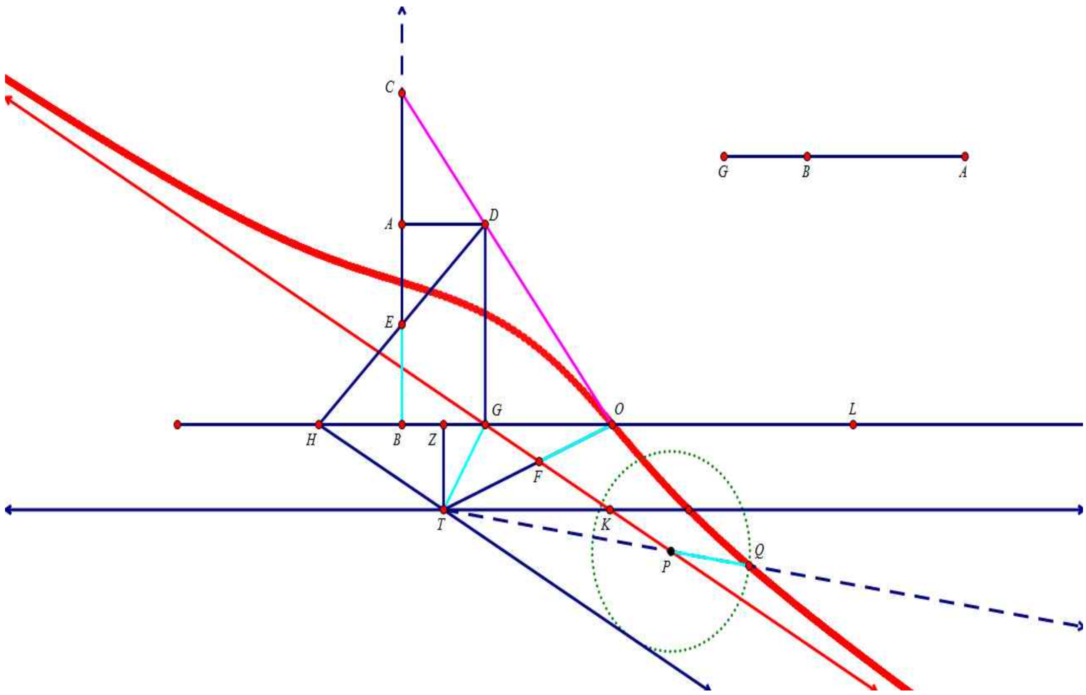
$$\overline{AB} : \overline{GO} = \overline{GO} : \overline{CA} = \overline{CA} : \overline{BG}$$

임을 알 수 있다(2.4절 참조).

이제 남은 문제는 『(*)에서 언급한 점 O 를 어떻게 잡을 수 있겠는가?』이다. 아래의 [그림 2.10]은 Nicomedes 가 이용했을 것으로 생각되는 conchoid를 동적기하프로그램(GSP)으로 그린 것이다.

먼저 직선 GK 위에 놓여있는 점 P 를 임의로 택해, 반직선 TP 상에서 $\overline{PQ} = \overline{TG}$ 를 만족하는 점 Q 를 잡는다. 다음으로 점 P 에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고 점 Q 에는 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하여 실행을 하면 Nicomedes 가 이용한 conchoid를 얻을 수 있다. 이때 이 conchoid와 직선 BG 와의 교점이 우리가 찾으려하는 점 O 이며, 물론 이 경우에 선분 OT 와 GK 의 교점을 F 라 하면 $\overline{OF} = \overline{GT}$ 를 만족한다.

12) Sinclair, N. M.(1995)에서는 Nicomedes의 증명이 생략되어 있으며, 불행하게도 정보부족으로 그 증명을 주변의 다른 문헌에서 찾을 수 없었다.



[그림 2.10]

Abū Jáfar al-Khāzin은 Nicomedes의 conchoid를 이용한 ‘neusis’는 기계적인 방법이므로, 원뿔곡선을 이용한 기하적인 방법을 찾고자 노력한 것 같으며, 실제로 직선 HG와 HT를 점근선으로 하고 점 K를 지나는 쌍곡선을 이용함으로써 이 문제를 다음과 같이 해결했다 (Sinclair, N. M., 1995).

실제로 아래의 [그림 2.11]과 같이 반직선 TK 위에 놓여있는 점 N으로

$$\overline{KN} = \overline{GT}$$

를 만족하는 것을 잡아, 점 K를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{KN}$인 원과 위의 쌍곡선과의 교점을 S라 한다. 다음으로 점 S를 지나는 직선 GK의 평행선이 직선 BG와 만나는 점을 O라 하면

$$\triangle FOG \backsim \triangle FTK, \quad \overline{HG} = \overline{TK}$$

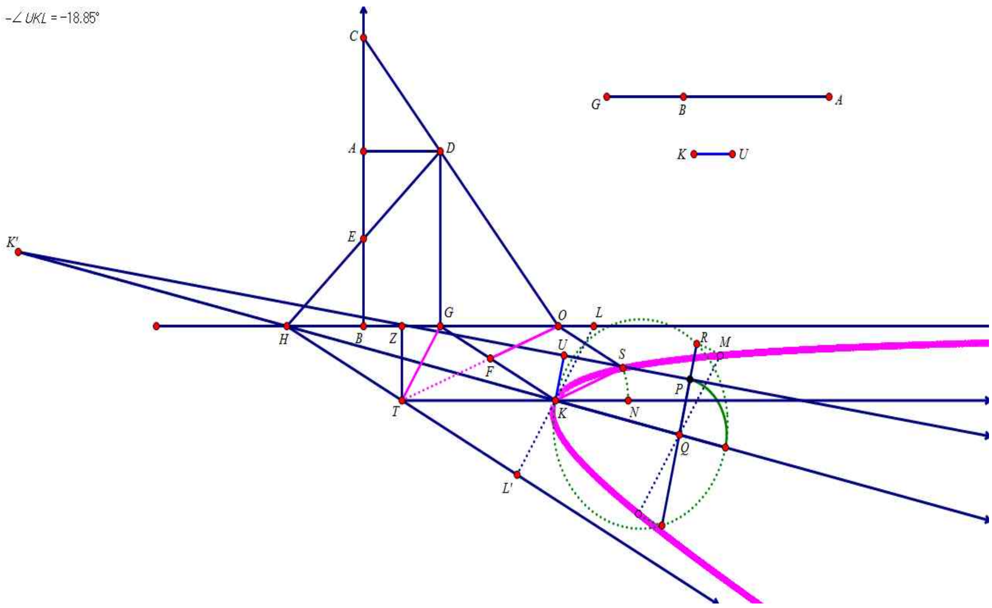
이므로

$$\overline{OG} : \overline{GH} = \overline{GF} : \overline{FK}$$

즉

$$\overline{GF} \cdot \overline{GH} = \overline{OG} \cdot \overline{KF}$$

이다.



[그림 2.11]

한편 쌍곡선의 성질(Heath, T. L., 1896, Proposition 34, p. 59)로부터

$$\overline{SO} \cdot \overline{OH} = \overline{KG} \cdot \overline{GH}$$

가 성립하므로

$$\begin{aligned} \overline{SO} \cdot (\overline{OG} + \overline{GH}) &= (\overline{KF} + \overline{FG}) \cdot \overline{GH} \\ &= \overline{KF} \cdot \overline{GH} + \overline{OG} \cdot \overline{KF} \\ &= \overline{KF} \cdot (\overline{OG} + \overline{GH}) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\overline{SO} = \overline{KF}$ 이며, 더욱이 $\overline{SO} \,/\!/\, \overline{KF}$ 이므로 사각형 $OFKS$ 는 평행사변형이다. 그러므로

$$\overline{OF} = \overline{KS} = \overline{GT}$$

이다.

2) Abū Jáfar al-Khāzin이 제시한 방법2에 대한 시각화

위의 해석에 따른 두 선분 AB, BG 의 비례중항 $\overline{GO}$, $\overline{CA}$ 의 작도는, 결국 직선 HG 와 HT 를 점근선으로 하고 점 K 를 지나는 쌍곡선의 작도만 해결되면 쉽게 얻을 수 있다. 위의 그림에서 보인 쌍곡선은 실제로 Proposition 31(Heath, T. L., 1896, p. 56)을 따라 동적기하 프로그램(GSP)으로 다음과 같이 구한 것이다.

먼저 점 H 를 중심으로 점 K 를 180° 회전시킨 점 K' 을 잡는다. 다음으로 반직선 HG 위에 놓여있는 점 L 로서 $\overline{GL} = \overline{HG}$ 를 만족하는 것을 택해 직선 LK 와 HT 의 교점을

L' 이라 한다. 이제 주어진 선분 LL' 과 KK' 에 대해

$$\overline{LL'}^2 = p \cdot \overline{KK'}$$

를 만족하는 상수 p 를 직각삼각형에 관한 Euclid 의 정리를 활용하여 찾는다. 위의 [그림 2.11]에서는 $p = \overline{UK}$ 이다. 이때 상수 p 를 매개변수로 직선 KK' 을 직경으로 하는 쌍곡선을 2.1절의 (2)에서 제시한 방법을 따라 구하면 된다. 보다 구체적으로 말하면 위의 [그림 2.11]에서처럼 점 R 을 얻은 다음, 이 점을 점 Q 를 중심으로 $\angle UKL$ 만큼 시계바늘방향으로 회전한 점 M 에 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하고, 점 P 에 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행을 하면, 직선 HG 와 HT 를 점근선으로 하고 점 K 를 지나는 쌍곡선을 얻을 수 있다.

라. Nicomedes가 제시한 입방배적문제의 새로운 증명법[13)]

아래의 [그림 2.12]처럼 변 CA, AD 를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형 $CADS$ 를 만들어, 변 CS 와 AD 의 연장선상에 각각 $\overline{SR} = \overline{GO}$ 인 점 R 과 $\overline{DQ} = \overline{GO}$ 인 점 Q 를 잡으면 사각형 $SDQR$ 은 직사각형이다. 또, 점 J, M, N 은 각각 변 AQ, QS, SA 의 중점이며, 점 P 는 3 점 D, J, S 를 지나는 원의 중심이다. 이때 사각형 $JMSN$ 은 평행사변형이며, $\triangle SDQ$ 는 직각삼각형이므로 $\overline{MS} = \overline{MD} = \overline{MQ}$

$$\therefore \ \overline{MD} = \overline{NJ}$$

한편 $\overline{NS} = \overline{ND}$,$\overline{JM} = \overline{NS}$ 이므로 $\overline{MJ} = \overline{ND}$ 이다. 따라서

$$\triangle JMN \equiv \triangle DNM \ (SSS \text{ 합동})$$

$$\therefore \ \angle MJN = \angle NDM$$

이로써 4 점 M, J, D, N 은 한 원위에 놓여있음을 알 수 있다.

그런데 점 P 는 $\overline{MN}$ 의 중점이며 사각형 $DJMN$ 은 $\overline{MJ} = \overline{ND}$ 인 등변사다리꼴이므로, 점 P 가 이 원의 중심이다. 따라서 점 S 도 이 원위에 놓여있으므로 $\triangle ASQ$ 는 $\angle ASQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. 여기서 직각삼각형에 관한 Euclid 의 정리를 적용하면 $\overline{SD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DQ}$, 즉 $\overline{CA}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{GO}$ 를 얻을 수 있다.

따라서

$$\overline{BG} : \overline{CA} = \overline{CA} : \overline{GO}$$

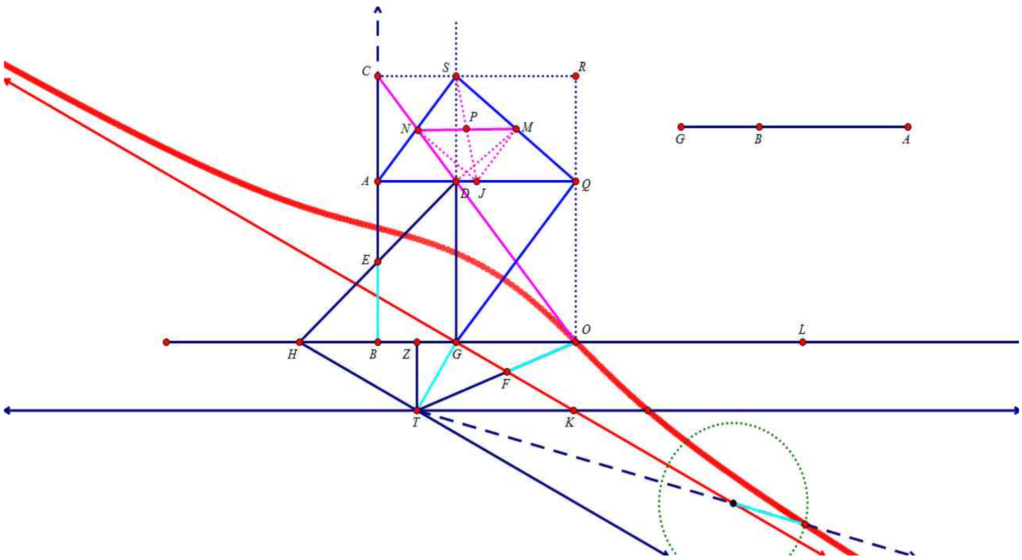
가 성립하며, 이로써

$$\overline{AB} : \overline{GO} = \overline{GO} : \overline{CA} = \overline{CA} : \overline{BG}$$

를 얻음으로써 증명이 완결된다. ◆

---

13) 이 증명은 본 논문의 저자들이 당시의 시대적 배경을 고려하여 중등기하 내용을 활용한 증명법을 제시한 것이며, Nicomedes 의 증명과 일치하는지는 알 수 없다.



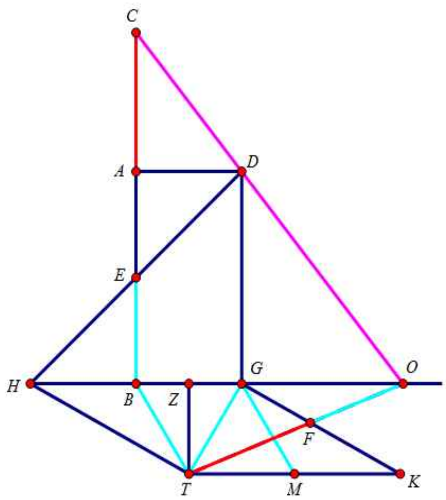
[그림 2.12]

참고 2.2 寺阪 英孝(1957, 問 109 (Nicomedes の作圖), p. 27)에 선분 GO, CA 가 선분 AB, BG 사이에 놓여있는 비례중항임을 보이고 있으므로 이를 소개하려 한다. 그러나 이 증명은 Nicomedes 주변의 시대적 상황을 미루어 볼 때 Nicomedes 의 것과 일치하는지는 의문이다.

지금부터 아래의 [그림 2.13]과 같이 $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BG}$, $x = \overline{GO}$, $y = \overline{FT}$ 라 각각 두면 $\overline{EB} = \overline{BT} = \overline{GT} = \overline{OF} = \frac{a}{2}$ 이고, 또, $\overline{CA} = \overline{TF}$ 이므로 $\overline{CA} = \overline{TF} = y$ 이다. 이때 $x : \frac{a}{2} = 2b : y$ 가 성립하므로

$$xy = ab \qquad \cdots\cdots\cdots \ (*)$$

이다.



[그림 2.13]

한편 $\triangle TOZ$ 는 $\angle TZO = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{TO}^2 = \overline{OZ}^2 + \overline{ZT}^2$$

이며

$$\overline{TO}^2 = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2, \overline{OZ}^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

$$\overline{ZT}^2 = \overline{GT}^2 - \overline{GZ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

이므로 $\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$, 즉

$$y^2 + ay = x^2 + bx$$

이다. 이 등식에 (*)로부터 얻어지는 등식 $y = \dfrac{ab}{x}$ 를 대입하면$(x^3 - a^2 b)(x + b) = 0$, 즉 $x^3 = a^2 b$ 이다. 따라서 (*)와 결부시킴으로써

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x} = \frac{x^2}{ab} = \frac{x}{y}$$

를 얻을 수 있으며, 이로부터

$$a : x = x : y = y : b$$

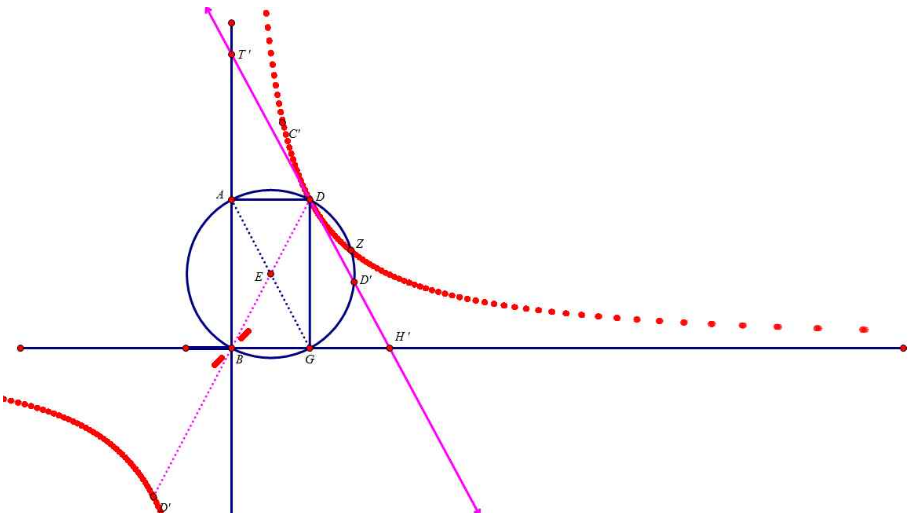
가 성립함을 알 수 있다. ◆

마. Nasīr al-Dīn al-Tūsī 가 보인 해결방법에 대한 재해석

13세기경의 수리천문학자로 잘 알려진 Nasīr al-Dīn al-Tūsī 는 Abū Bakr al-Harawī의 방법과 비슷한 것으로 입방배적문제를 다음과 같이 해결했다(Knorr, W., 1989; Sinclair N. M., 1995).

주어진 두 선분 AB, BG (단, $\overline{AB} > \overline{BG}$ 임)를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형 $BGDA$ 를 아래의 [그림 2.14]처럼 만든 후 두 대각선의 교점 E 를 중심으로 하는 외접원을 그린다. 또, 점 D 를 지나고 대각선 AG 와 평행인 직선 $T'DD'H'$ 를 그려 위의 외접원과의 교점을 D' 이라 한다. 이때 직선 $T'DD'H'$ 은 점 D 를 지나며 직선 AB, BG 를 점근선으로 하는 쌍곡선의 접선이다(2.2절의 (1) 참조). Nasīr al-Dīn al-Tūsī 는 이 사실을 이용하여 외접원과 쌍곡선은 점 D 이외의 또 다른 교점 Z 를 [그림 2.14]처럼 점 D 와 D' 사이에서 가짐을 보임으로 참고 2.1에서의 걱정을 깔끔이 해결했다. 그리고 나머지의 증명은 Abū Bakr al-Harawī의 것을 따라 완성했다.

Nasīr al-Dīn al-Tūsī 가 또 다른 교점 Z 의 존재성을 보이기 위해 사용한 정리는 Heath, T. L.(1896, Proposition 11, p. 22)와 Heath, T. L.(1896, Group I, 1, p. 127)이다.



[그림 2.14]

바. Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd가 보인 해결방법의 재해석과 시각화

1) Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd가 제시한 방법의 재해석

Al-Mu'taman은 Zaragoza[14]의 왕으로 재임(A.D 1081-1085)시 암살된 불운한 수학자이자 천문학자이다. Al-Mu'taman은 당시의 이슬람세계 어느 곳에서도 찾아볼 수 없는 원과 포물선을 이용한 독특한 방법으로 입방배적문제를 다음과 같이 해결했다.

주어진 두 선분 AB, BG (단, $\overline{AB} < \overline{BG}$ 임)를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형 $BGHA$ 를 아래의 [그림 2.15]처럼 만든 후 대각선 AG 를 지름으로 하는 외접원을 그린다. 또, 점 G 를 꼭짓점, 직선 GB 를 (대칭)축 그리고 $\overline{GB}$ 를 매개변수로 하는 포물선 γ 를 그려 외접원과의 교점을 D 라 한다. 이때 점 D 에서 직선 GB 에 내린 수선의 발을 E, 직선 DA 와 직선 GB 의 교점을 Z 라 하면 포물선의 symptom으로부터 $\overline{DE}^2 = \overline{GE} \cdot \overline{GB}$, 즉

$$\overline{BG} : \overline{ED} = \overline{ED} : \overline{EG}$$

를 얻는다. 한편 $\triangle EDG \backsim \triangle EZD$ 이므로

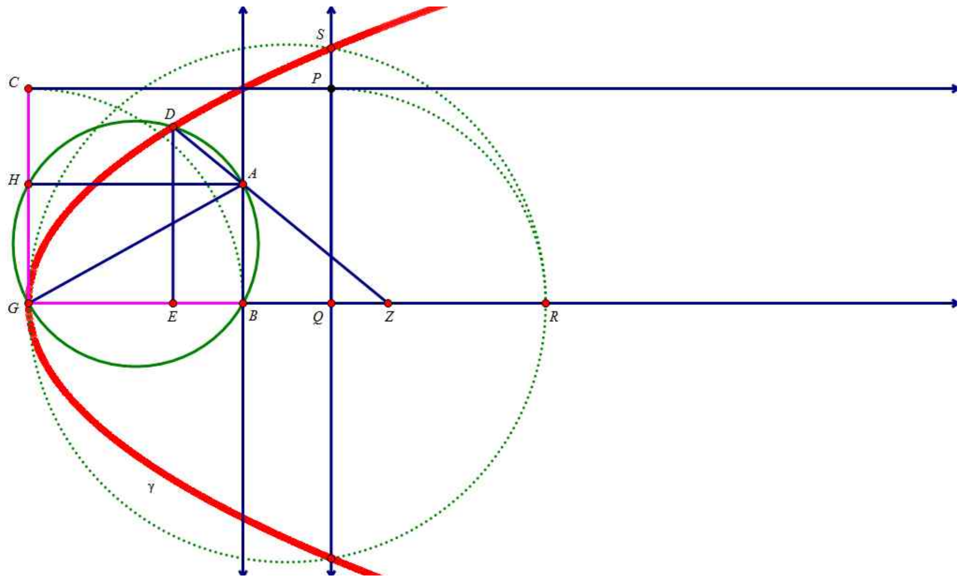
$$\overline{ZE} : \overline{ED} = \overline{ED} : \overline{EG}$$

이다. 따라서

$$\overline{BG} = \overline{ZE}\ , \quad \overline{ZB} = \overline{EG}$$

이다.

14) 스페인 동북부, Ebro강가에 있는 도시.



[그림 2.15]

그런데 $\triangle ABZ \backsim \triangle DEZ$ 이므로

$$\overline{ZB} : \overline{BA} = \overline{ZE} : \overline{ED}$$

이다. 그러므로

$$\overline{BG} : \overline{ED} = \overline{ED} : \overline{EG} = \overline{EG} : \overline{AB}$$

가 성립한다. 다시 말해서 선분 ED, EG 가 주어진 선분 BG, AB 의 비례중항이다.

2) Yūsuf al-Mu′taman ibn Hūd 가 제시한 방법의 시각화

우리는 여기서 점 G 를 꼭짓점, 직선 GB 를 (대칭)축 그리고 $\overline{GB}$ 를 매개변수로 하는 포물선 γ 를 동적기하프로그램(GSP)으로 작도하는 문제만 살펴보기로 한다.

먼저 점 G 에서 세운 직선 GB 의 수선위에 놓여있는 점 C 로서

$$\overline{GC} = \overline{GB}$$

를 만족하는 것을 잡는다. 다음으로 점 C 를 지나는 직선 GB 의 평행선을 그린 후 그 위에 놓여있는 점 P 를 임의로 잡아 위의 [그림 2.15]처럼 직선 GB 에 수선의 발 Q 를 내린다. 다시 점 Q 를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$ 인 반원을 그려 직선 GB 와의 교점을 R 이라 하고, 선분 GR 을 지름으로 하는 반원과 수선 PQ 와의 교점을 S 라 한다. 여기서 점 P 에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고, 점 S 에는 『[보기(D)]↘점의 흔적남기기(T)』를 명령하여 실행하면 우리가 찾는 포물선을 얻을 수 있다.

Ⅲ. 결론

우리는 지금까지 입방배적문제에 관한 고대 그리스 및 중세 이슬람 기하학자들의 주요 해법을 살펴보았으며, 그 과정에서 동적기하프로그램(GSP)을 이용한 원뿔곡선의 작도를 구체적으로 활용하였다. 여기서 강조하고 싶은 것은 많은 수학자들이 제시한 놀라운 해법을 확인하는 과정도 중요하지만, 실제로 동적기하프로그램으로 구현해 보는 과정에서 필요한 초등기하적인 기본성질의 중요성과 아름다움을 체험할 수 있다는 점이다. 어떤 문제해결을 위해 먼저 그 문제에 제시된 조건에 맞는 적합한 그림을 그려본다는 것은 문제해결의 접근방향의 예상·실험·발견을 가능케 한다는 것은 누구도 부인하지 않을 것이다. 또, 교육과정을 통해 습득한 도형에 관한 기본성질을 활용해서, 좌표평면상이 아니더라도, 동적기하프로그램을 통해 구현할 수 있음을 체험해 본다는 것은 수학의 유용성과 실용성을 느낄 수 있는 체험수학·실험수학의 한 장을 제공할 수 있을 것으로 본다.

고대 그리스의 이오니아학파[15]가 제시한 '3대 작도불능 문제'는 오래 동안 많은 수학자들을 괴롭혀 왔다. 근세에 이르러 대수학의 힘을 빌려 그것이 불가능하다는 것이 증명되기 전까지는 모든 수학자들의 관심이 이 한 곳에 쏠려있었다고 해도 과언이 아닐 것이다. 그러나 이러한 시행착오의 반복이 오늘날 눈부시게 발전된 현대수학 특히 기하학에 기여한 바는 실로 엄청나다고 할 것이다. 현대수학을 자유롭게 즐기고 있는 우리는 이러한 선조 수학자들의 노고에 대하여 고마움을 잊어버리고 심지어는 너무 간과하고 있는 현실에 대하여 반성해 볼 필요가 있다고 생각된다.

따라서 본 연구를 통하여 다음과 같은 몇 가지 시사점을 제시하고자 한다.

첫째, 수학에 대한 흥미유발을 위하여 교사는 학교수업에서 이러한 수학사적 이야기(선조들의 고난, 시련, 시행착오 등)를 많이 들려주어야 할 것이다.

둘째, 눈에 잘 보이지 않는 입체기하에 비해 직관적으로 이해하기 쉬운 평면기하는 가르치는 교사나 배우는 학생, 양쪽 모두가 쉽게 접근할 수 있다. 더욱이 동적기하프로그램을 활용한 구체적인 작도가 가능하므로, 여러 가지 작도문제를 실제로 해 보고, 또한 기존의 정리들을 확인하는 과정을 통하여 반힐(Van Hiele)[16]이 강조한 기하학습 수준이론 제 3, 4 단계(연역, 엄밀성)의 중요성을 느낄 수 있을 것이다.

셋째, 유능한 수학교사 양성을 위하여, 대학수학 관련 학과의 교육과정에서 경시되고 있는 고전 유클리드 기하의 부활을 심사숙고해야 할 것이다.

---

15) 이오니아 학파(Ionian school)는 B.C. 6-5세기 그리스의 철학 학파임. 이오니아는 고대 그리스의 식민지였던 소아시아의 서안지방의 고대지명임.

16) 기하학습 수준이론으로 잘 알려져 있는 네덜란드 수학교육학자.

끝으로 입방배적문제에 대한 많은 사람들의 관심을 통하여 아래와 같은 두 가지 문제의 후속 연구가 이어지길 기대한다.

첫째, 타원의 초등기하적인 성질을 이용한 입방배적문제 해결방법으로 동적기하프로그램으로 구현할 수 있는 방법은 없겠는가?

둘째, 중세 이슬람 기하학자들이 입방배적문제 해결을 위하여 접근한 이와 같은 방법을 ‘일반각의 3 등분문제 해결이나 삼차방정식 풀이’에는 어떻게 활용하였을까?

참 고 문 헌

[1] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 이차곡선을 활용한 정칠각형에 관한 Abū Sahl의 작도법의 GSP를 통한 재조명, 수학교육 제 50 권 제 2 호(2011), 233-246.

[2] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 Symptoms 재조명과 시각화, 수학교육 제 52 권 제 1 호(2013), 83-95.

[3] 박진석 · 김향숙, 해석기하학개론[제 2 판], 경문사, 2013.

[4] 祭藤 憲, 正五角形と正七角形の作圖, 數學教育, 2008, 8, pp. 28-33.

[5] 海老原 圓, 數學セミナ, デロスの問題, 2008年, 8月号, 26-30

[6] 寺阪 英孝, 初等幾何學, 數學演習講座 5, 共立出版株式會社, 1957.

[7] Berggren, J. L., Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Springer-Verlag, New York, 1986.

[8] Heath, T. L., Apollonius of Perga : Treatise on conic sections-The conics of Apollonius, Cambridge : at the university press, 1896.

[9] Knorr, W.,Textual Studies in ancient and medieval geometry, Birkhäuser, Basel/Boston, 1989.

[10] Sinclair, Nathalie M., Mathematical applications of conic sections in problem solving in ancient Greece and medieval Islam, Simon Fraser Univ., 1995.

Kim, Hyang Sook
Department of Applied Mathematics
Inje University
Inje, 621-749 Korea
E-mail: mathkim@inje.ac.kr

Pak, Jin Suk
Department of Mathematics Education
Kyungpook National University
Daegu, 609-736 Korea
E-mail: jspak@knu.ac.kr

Lee, Eun Kyoung
Department of Mathematics Education
Kyungpook National University
Daegu, 609-736 Korea
E-mail: eunkyung21c@knu.ac.kr

Lee, Jae Don
Department of Mathematics Education
Daegu University
Gyeonsan, 712-741 Korea
E-mail: jdlee@daegu.ac.kr

Ha, Hyoung Soo
Daegu Science High School
Daegu, 706-852 Korea
E-mail: 9429ha@hanmail.net