대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 24 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 24, No. 1, 1 ~ 27. Feb 2014

개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석

양 은 경* · 신 재 홍**

본 연구는 개방형 기하 문제에서 드래깅 활동을 통해 나타난 중학교 3학년 학생들의 사고 과정을 가추법, 귀납법, 연역법을 중심으로 분석하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같다. 첫째, 학생들은 자신의 가설을 도입하기 위해 가추법을 사용하고, 다양한 사례를 통해 가설을 일반화하기 위해 귀납법을 사용하며, 가설의 근거를 설명하기 위해 연역법을 사용하였다. 둘째, '임의적 드래깅'과 '안내된 드래깅'은 학생들의 가추 과정에서 가설을 마련하는데 도움이 되었으며, '드래깅 검증'은 학생들의 귀납 과정에서 가설을 확신하고 일반화하는 데 사용되었다. 셋째, 학생들은 도형을 고정된 것으로 생각하거나 종속 관계나 경로의 개념을 쉽게 인식하지 못하거나 개연적 추론에서 연역법으로 부드럽게 나아가지 못하거나 순환논리에 빠지는 인지적 어려움을 겪었다.

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

추론은 학생들이 가정에서 출발하여 결론에 이르기까지 논리적인 사고를 조직하는 것으로 수학적 사고와 관련한 정신 활동이다(김선희, 김기연, 2004). 수학적 추론 능력은 수학 학습을 통해 신장되어야 할 목표 중 하나로, NCTM (2000)에서 학교 수학의 규준으로 선택되기도 하였다. 학교수학의 추론지도는 학생들로 하여금 탐구하고 추측하며 추측된 사실을 정당화하고 이를 통해 제기된 주장을 상대방에게 설득시키는 자연스런 태도를 기를 수 있도록 이루어져야 한다. 특히, 연역적인 증명을 본격적으로 다루기 시작하는 중학교 이후의 수학에서는 기본적인 성질을 전제로 한 타당한 추론 양식에 대한 분명한 인식과 더불어 수학적 사실을 발견하고 창조하는 능력과 연결되는 개연적 추론 양식이 중요하게 다루어져야 한다(김남희, 2002). Polya (1954)는 수학 교과에서 추론 지도의 필요성을 언급하면서 개연적 추론으로서 귀납법을 생각하였으나(김선희, 2004, 재인용), 개연적 추론 내에는 여러 사실들의 관찰을 통해 결론을 도출하는 귀납법뿐만 아니라 법칙과 결과로부터 사례에 대한 가설을 세워 새로운 지식이나 정보를 알아낼 수 있는 가추법이 사용되기도 한다(김선희, 이종희, 2002). 가추법은 연역법, 귀납법과 더불어 수학적 모델링에서 의미를 이해하는 활동에 사용되며(Kehle & Lester, 2003), 모델링 이외에 다른 학습 상황에서도 연역법과 귀납법 이외에 가추법이 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대되는 바(김선희, 김기연, 2004), 본 연구에서는

* 한국교원대학교 대학원, dubu123@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

평면 기하문제를 다루는 과정에서 드러나는 중학교 3학년 학생들의 추론 양식을 분석함에 있어 귀납법, 연역법과 더불어 가추법을 포함하여 기술하고자 한다.

기하교육의 주된 목적은 학생들의 기하학적 직관을 키우고 논리적 추론능력을 향상시키는데 있다. 이를 위해서는 연역적 증명 활동만으로는 부족하므로 탐구, 추측하며 가설을 설정하는 비형식적 활동도 중요하다. 현재의 기하교육은 연역적 증명에 강조를 두고 있으나 기하학적 개념이나 원리들이 학생들에게 의미 있게 이해되는 것이 중요한 바, 이를 위해서는 학생들이 연역 이전에 수학적 지식을 탐구하는 '구성'의 과정이 필요하다(신동선, 류희찬, 1998). 폐쇄형 문제와는 달리 개방형 문제(open problem)는 학생들에게 각자의 수준에서 다양하고 새로운 산출물을 생산하는 보다 풍부한 탐구 활동을 경험하도록 해 준다(Pehkonen, 1997). 이러한 맥락에서 Arzarello, Olivero, Paola & Robutti(2002), Baccaglini-Frank(2010), Olivero (2001, 2002), Laborde(2005), Lopez-Real & Leung(2006), Leung(2008)은 DGS(Dynamic Geometry Software)가 개방형 기하 문제를 탐구하는데 효과가 있으며, 개방형 문제의 추측 단계에서 학생의 추론에 기여한다고 주장한 바 있다. 개방형 문제에 대한 DGS의 기여는 소프트웨어와의 상호작용을 통해 안내 받고 제공 받는 드래깅 활동(dragging activity)에 기인한다(Lopez-Real, & Leung, 2006). 드래깅은 DGS와 다른 환경을 구별하는 중요한 특징이며(Baccaglini-Frank, 2010), 변화 속에서 동시에 기하학적 불변량(geometrical invariants)을 시각적으로 나타낼 수 있다(Leung, 2008). 드래깅의 기능을 언급하는 국내 연구들은 많으나(손홍찬, 2011a ; 류성림, 2001 ; 류희찬, 유공주, 조민식, 2000 ; 류희찬, 윤옥교, 2012), 드래깅 활동을 세분화하고, 세분화된 드래깅 활동에서 나타나는 학생의 인지 과정을 살펴보는 연구는 거의 없다.

따라서 본 연구에서는 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 방식을 Peirce의 가추법, 귀납법, 연역법의 관점에서 분석해 보고, GSP(Geometer's Sketchpad)라는 실험적인 환경에서 발생한 추측이 유클리드 기하의 연역적인 증명으로 이어질 수 있는 방법을 모색해 보고자 한다. 또한, GSP 환경에서 학생들이 추론하는 과정에서 겪는 인지적 어려움을 통해 GSP를 활용한 수업에서 바람직한 교사의 역할을 논의하고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구를 위하여 다음과 같은 3가지 연구 문제를 설정하였다.

1. **GSP를 사용하여 개방형 기하 문제를 해결하는 동안 학생의 수학적 추론은 어떤 방식으로 나타나는가?**
2. **GSP를 사용하여 개방형 기하 문제를 해결하는 동안 학생의 드래깅 활동은 수학적 추론에 어떤 역할을 하는가?**
3. **GSP 환경에서 개방형 기하 문제를 해결하는 동안 학생들이 겪은 인지적 어려움은 무엇인가?**

Ⅱ. 이론적 배경

1. 개방형 기하 문제(open-ended geometry problem)

문제에는 출발 상황(주어진 자료, 조건)과 목표 상황(구하고자 하는 것)이 존재한다. 출발 상황과 목표 상황이 모두 닫혀 있는 문제를 폐쇄형 문제라고 할 때, 개방형 문제는 이와 반대되는

개념으로 문제의 출발 상황이나 목표 상황 등이 열려 있는 문제라고 할 수 있다(Pehkonen, 1997). Pehkonen(1997)은 세계 여러 나라에서 개발되고 논의되어 온 여러 가지 유형의 개방형 문제들을 수집하여 종합한 후, 출발 상황과 목표 상황의 닫힘과 열림 여부에 따라 개방형 문제를 <표 Ⅱ-1>과 같이 분류하여 제시하였다.

<표 Ⅱ-1> 출발 상황과 목표 상황에 따른 개방형 문제의 분류 (Pehkonen, 1997, p. 9)

목표 / 출발	닫혀있음 (closed)	열려있음 (open)
닫혀 있음 (closed)	폐쇄형 문제 (closed problem)	*목표 상황이 열린 문제(open-ended problem)*, 실생활 상황(real-life situations), 탐구과제(investigations), 문제장(problem fields), 문제 변형(problem variations)("what-if" 방식)
열려 있음 (open)	실생활 상황(real-life situations), 문제 변형(problem variations)("what-if"방식)	실생활 상황(real-life situations), 문제 변형(problem variations)("what-if" 방식), 프로젝트(project), 문제 제기(problem posing)

<표 Ⅱ-1>에 따르면, '목표 상황이 열린 문제(open-ended problem)'란 주어진 하나의 문제에 대해 유일한 정답만 존재하는 것이 아니라 문제 해결 접근 방법에 따라 풀이 전략이 다양하며 여러 가지 답을 산출할 수 있는 문제이다(고상숙, 노지연, 2007).

특히, Mogetta, Olivero & Jones(1999)는 기하에서 개방형 문제란 진술이 짧고, 특별한 풀이 방법이나 답이 요구되지 않으며, 도형의 형태(configuration)에 대한 간단한 설명을 포함하고 요소와 성질 사이의 관계에 대한 포괄적인 진술을 요구한다고 하였다. 즉, '~할 때, 어떤 형태가 예상되는가?', '~사이에 어떤 관계를 찾을 수 있는가?', '어떤 도형으로 변화 가능한가?'와 같은 형태이다. 이러한 발문은 이미 주어진 결론에 대해 '~임을 증명하라.'와 같은 전통적인 폐쇄형 질문과는 분명히 다르다.

도종훈(2007)은 개방형 문제의 풀이가 곧 학생의 추측 형성을 의미하며, 학생은 자신이 생산한 추측의 불확실성으로 인해 정당화의 필요성을 느끼고 자연스럽게 자신만의 다양하고 새로운 추측을 생산한 후 자신의 추측을 정당화하는 수학적 탐구 과정을 경험한다고 하였다. 중학교 기하단원의 개방형 문제에서 학생의 문제 해결 과정의 사고 특성을 연구한 고상숙, 노지연(2007)은 개방형 문제는 학생들의 논리에 따라 여러 가지 답이 가능하므로 풀이 과정이 무엇보다 중요하며 풀이 과정에 나타난 학생들의 표현 방법은 학생들의 문제 해결 능력을 판단할 수 있는 하나의 자료가 될 수 있다고 하였다. 초등학교 4학년 학생들의 비구조화된 문제에서 나타난 해결 과정 및 추론을 분석한 김민경, 허지연, 조미경, 박윤미(2002)는 개방형 문제의 한 종류인 비구조화된 문제를 해결함으로써 학생들은 수학적 추론과 의사소통을 경험하게 되며, 궁극적으로 문제 해결력을 포함한 수학적 힘의 신장에 기여할 것으로 기대한다고 주장하였다.

본 연구에서는 학생에 따라 구하는 답이 여러 가지가 될 수 있는 '목표 상황이 열린 문제'를 사용하며, 기하와 관련된 이러한 개방형 문제를 '개방형 기하 문제(open-ended geometry problem)'라고 규정한다.

2. 드래깅 활동(dragging activity)

가. 종속성(dependency), 불변량(invariants)[1], 경로

1) 도형에서 한 점을 드래깅하는 동안 불변량(invariants)으로 인식되는 특성(property)을 불변성(invariance ;

(path)

이 절에서는 DGS 환경에서 드래깅과 관련된 중요한 기하학적 개념인 종속성, 불변량, 경로의 개념을 소개한다.

우선, 지필환경과는 달리 DGS에서 작도 순서에 따른 개체(object) 간의 종속성은 아주 중요하다(Talmon, & Yerushalmy, 2004). 예를 들어, 지필환경에서 한 직선 위의 점이나 한 점을 지나는 직선의 작도는 동일한 의미를 가진다. 그러나 DGS에서 한 점 A가 주어진 직선 위에 있을 때 (작도 순서: 직선 ⇒ 점 A), 그 점은 단지 그 직선 위에서만 드래깅 될 수 있다. 이 경우, 드래깅을 통해 직선 위의 한 점은 다른 개체(직선)에게 영향을 주지 않는다. 반면, 한 직선이 주어진 점 A를 지날 때(작도 순서: 점 A ⇒ 직선), 점 A는 평면 안에서 자유롭게 드래깅 될 수 있고 직선의 위치는 점 A에 따라 변한다. 이러한 두 가지 구성은 다른 역동적 움직임을 탄생시킨다.

DGS 환경의 또 하나의 중요한 특징은 드래깅 활동을 통한 변화 속에서 동시에 기하학적 불변량을 시각적으로 나타낼 수 있다는 것이다(Leung, 2008). 불변량이란 한 점을 드래깅 하는 동안 변하지 않는 도형의 형태 혹은 특성을 말하며 기하 관계와 종속 관계에 의해 결정된다(Baccaglini-Frank, 2010). 불변량은 수학적 활동을 통해서 다른 수학적 요소가 다양해지는 동안 변화하지 않는 패턴을 구별하고 이러한 패턴을 부분적으로 일반화, 기호화, 공리화 하는 것이다(Lopez-Real & Leung, 2006). 일반적으로 불변량은 도형을 작도하기 위해 사용된 명령들에 의한 기하학적 관계와 작도 순서 및 유클리드 이론의 결과로 파생된 종속 관계에 의해 결정된다 (Leung, Chan, & Lopez-Real, 2000).

마지막으로 경로는 Arzarello et al.(2002)의 궤적(trajectory)과 Leung & Lopez-Real(2002)의 '하나의 성질을 가진 점들의 집합', '타당한 자취(locus)'와 비슷한 개념이다. '숨겨진 자취 드래깅'[2]을 사용하는 학생은 점의 움직임에서 규칙성에 주목하여 명백한 개체로 개념화하는데 이 개체를 경로라고 한다(Baccaglini-Frank, 2010). Leung(2012)는 학생이 경로를 인식하는 단계를 다음과 같이 설명하였다. 우선 경로가 예상되고(경로를 예상하기), 경로가 대략 그려지고(경로의 흔적 그리기), 경로가 작도되고 그 경로를 따라 점을 드래깅 하여(경로 따라 드래깅 하기) 경로를 통해 점의 움직임을 일반화하는 것이다. DGS 환경에서 도형을 이루는 어떤 요소를 드래깅 하여 움직였을 때, 화면의 근간을 이루는 기하학적 관계가 계속 유지되도록 하면서 도형을 변화시켜 일반화하는 것은 딘즈의 수학적 다양성의 원리와도 부합한다(류성림, 2001). 본 연구에서 경로란 학생이 흔적(trace) 도구를 사용하여 화면에 나타낸 후 그 흔적을 도형으로 인식한 것뿐만 아니라 인식한 도형을 직접 작도한 것 모두를 말한다.

나. 드래깅 양상(dragging modalities)

동적인 DGS와 정적인 유클리드 기하 사이의 정교한 변환은 드래깅 활동과 관련된다는 점에서 Lopez-Real & Leung(2006)은 드래깅을 개념적인(conceptual) 도구로 보았다. Arzarello et al.(2002), Hölzl(1996), Lopez-Real & Leung(2006), Leung(2008), Healy(2000)는 학생들이 문제 해결 과정에서 사용한 드래깅 양상을 분류하면서 드래깅이 수학의 추측 형성에 중요한 역할을 한다

---

the property of being invariant)이라고 하며(위키피디아 ; http://www.wikipedia.org), 연구에 따라 불변량 대신 불변성을 사용하기도 하나, 본 연구에서는 원문의 용어를 그대로 해석하여 불변량이라고 한다.

2) '숨겨진 자취 드래깅'에 대한 자세한 설명은 다음 절에서 서술될 것이다.

고 주장하였다.

본 연구에서는 Arzarello et al.(2002)가 주장한 7가지 드래깅 양상[3] 중 문제 해결 과정에서 뚜렷이 나타나고 선행연구에서 그 중요성을 강조했던 양상들을 추출하여 아래와 같이 4가지[4]로 정리하였다.

1) **임의적 드래깅 (wandering dragging)** : 학생은 도형의 흥미로운 형태나 규칙성을 발견하기 위해서 '드래깅 가능한 점'[5](이하 기본 점)들을 계획 없이 무작위로(randomly) 드래깅 한다.
2) **안내된 드래깅 (guided dragging)** : 학생은 특별한 도형의 형태를 유지하기 위해서 기본 점을 드래깅 한다.
3) **숨겨진 자취 드래깅 (dummy locus dragging)** : 학생은 도형에서 발견된 성질이나 유지하기 위한 형태를 보존하기 위해서 기본 점을 드래깅 하면서 흔적이나 자취를 그린다. 이때, 학생은 자신이 그린 흔적이나 자취를 점의 경로로 확실하게 인식하지 못한다.
4) **드래깅 검증 (dragging test)** : 학생은 구성된 도형이 요구한 성질을 보존하는지 알아보기 위해서 경로를 따라 점을 드래깅 한다. 즉, 학생은 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅에서 형성된 자신의 추측을 검증하기 위해 경로를 새롭게 작도하거나, 점을 경로에 병합한 뒤, 경로를 따라 그 점을 드래깅 한다.

학생은 임의적 드래깅을 통해 개체 간의 종속관계를 이해하고 기본 점을 파악하게 되며, 문제에서 요구한 성질을 만족하는 도형을 발견하게 된다. 안내된 드래깅은 학생이 특정한 도형을 의식하면서 점을 드래깅 하는 것이다(Arzarello et al., 2002). 학생은 여러 가지 점들을 임의적 드래깅하여 특별한 도형을 발견하고, 기본 점을 안내된 드래깅하여 발견된 도형의 성질을 보존할 수 있는 기본 점의 위치를 찾는다. 이때, 기본 점의 위치가 규칙적인 경우, 즉 경로가 원이나 직선 같은 도형으로 예상되는 경우, 학생은 숨겨진 자취 드래깅을 사용하여 기본 점의 흔적이나 자취를 구체적으로 확인하기도 한다. 숨겨진 자취 드래깅은 안내된 드래깅에 흔적 도구가 접목된 형태로써(Baccaglini-Frank, 2010), 발견된 도형의 성질을 유지하면서 점의 흔적 혹은 자취를 찾기 위해서 기본 점을 드래깅 하는 것이다. Hollebrands, Laborde & Straesser(2005)는 학생이 임의적 드래깅에서 숨겨진 자취 드래깅으로 이동하는 것은 확신 없는 추측에서 명백하고 정확한 가설을 향한 인지적 이동을 의미한다고 하였다. 마지막으로 학생은 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅에서 얻은 자신의 추측을 확인하고 일반화하기 위하여 기본 점의 경로를 직접 작도하거나, 한 점을 그 경로에 병합시킨 후 경로를 따라 점을 드래깅 하는데 이러한 활동을 드래깅 검증이라고 한다(Baccaglini-Frank, 2010).

3) Arzarello et al(2002)는 Cabri를 사용한 개방형 문제 해결 과정에서 학생들이 자신의 목적에 따라 다른 형태의 드래깅 활동을 하는 것을 확인하였고, 그러한 드래깅 활동을 wandering dragging, bound dragging, guided dragging, dummy locus dragging, line dragging, linked dragging, dragging test로 분류하였다.

4) wandering은 '헤매는, 종잡을 수 없는'이라는 뜻을 가지나 학생이 뚜렷한 목표 없이 드래깅 한다는 점에서 임의적(일정한 기준이나 원칙 없이 하고 싶은 대로 하는. 또는 그런 것)이라는 용어를 사용하였다(국립국어원 표준국어대사전). dummy는 '모조의, 가짜의'의 뜻으로 dummy locus dragging을 사용하는 학생은 점의 자취(locus)가 무엇인지 인식하지 못한 상태에서 드래깅 한다. 그런 의미에서 Baccaglini-Frank (2010)는 dummy locus를 '숨겨진 자취(hidden locus)'라고 불렀으며 본 연구에서는 Baccaglini-Frank(2010)의 해석을 따른다.

5) Arzarello et al(2002)는 DGS에서 다른 개체와 상관없이 자유롭게 드래깅 할 수 있는 점을 '드래깅 가능한 점(draggable point)' 혹은 '자유점(free point)'이라 하고, 한 개체(object)에 연결되어 그 개체 위에서만 드래깅 가능한 점을 '준-드래깅 가능한 점(semi-draggable point)'라고 하였다. Baccaglini-Frank(2010)는 자신의 연구에서 '드래깅 가능한 점' 혹은 '자유점'을 '기본 점(basic point)'이라고 불렀다.

본 연구의 드래깅 검증은 Arzarello et al.(2002)가 제시한 line dragging, linked dragging, dragging test를 결합한 것이다.

Hölzl(2001)는 임의적 드래깅, 안내된 드래깅, 숨겨진 자취 드래깅을 탐구와 발견을 위한 드래깅 활동으로 분류하여 드래깅 검증과 구분하였다. Olivero(2002)는 Cabri를 사용한 개방형 문제에서 임의적 드래깅, 안내된 드래깅, 숨겨진 자취 드래깅을 중요한 전략이라고 생각하고 학생들이 사용한 드래깅 유형의 빈도를 조사하였으며, Arzarello et al.(2002)은 Cabri 환경에서 탐구부터 추측과 증명으로 전환하는데 중요한 역할을 하는 드래깅 양상을 분석하고 학생의 가추과정은 숨겨진 자취 드래깅 활동에서 발생한다고 주장하였다. 한편, Leung et al.(2000)은 DGS에서 안내된 드래깅을 'drag to fit' 전략으로 소개하며 이러한 드래깅 활동이 학생의 인지과정에서 중요한 역할을 한다고 주장하였다.

본 연구에서는 앞의 4가지 드래깅 양상을 사용하여 학생들이 문제를 해결하는 활동을 '드래깅 활동'이라고 한다. 또한 학생들이 GSP 환경에 쉽게 적응하도록 하기 위해서 본 수업 전에 종속성, 불변량과 점의 역동성을 의미하는 경로 개념을 소개하는 도입수업을 제공하였다.

3. Peirce[6]의 수학적 추론

Peirce는 추론을 세 가지 유형으로 구분하는데, 첫째는 연역법(deduction), 설명적 추론이며, 둘째는 귀납법(induction), 평가적 추론이고, 셋째는 가추법(abduction)[7], 창의적 추론이다(김선희, 이종희, 2002). Peirce는 삼단 논법의 차원에서 가추법을 다른 두 가지 추론(귀납법과 연역법)과 비교하기 위해 규칙, 사례, 결과에 따라 <표 Ⅱ-2>처럼 구체화하였다(김성도, 1997, 재인용). 연역법은 규칙과 사례를 통해 결과를 도출하는 추론이고, 귀납법은 주어진 사례와 결과를 통하여 규칙을 도출하는 것이다. 연역법과 귀납법이 모두 사례를 통해 결론을 이끌어내는 데 반해 가추법은 결과와 규칙으로부터 사례에 대한 짐작을 하게 하는 추론이다. 가추법을 통해서는 일반적인 예측을 할 수 있지만, 성공할 것이라는 보장은 없다. 가추법은 절대적으로 확실한 것을 도출할 수 없으며, 귀납법과 마찬가지로 개연적 추론에 속하게 된다(김선희, 이종희, 2002).

<표 Ⅱ-2> Peirce의 수학적 추론(김성도, 1997, p. 35)

	규칙+사례 ⇒ 결과
연역법	규칙 : 저 가방 속에 들어있는 완두콩들은 하얗다. 사례 : 이 완두콩들은 저 가방에서 나왔다. 결과 : 이 완두콩들은 하얗다
	사례+결과 ⇒ 규칙
귀납법	사례 : 이 완두콩들은 저 가방에서 나왔다. 결과 : 이 완두콩들은 하얗다. 규칙 : 저 가방 속에 들어있는 완두콩들은 하얗다.
	결과+규칙 ⇒ 사례
가추법	결과 : 이 완두콩들은 하얗다. 규칙 : 저 가방 속에 들어있는 완두콩들은 하얗다. 사례 : 이 완두콩들은 저 가방에서 나왔다.

연역법이나 귀납법은 주어진 정보 내에서 다른 것을 창조할 수 없고 기존 사실을 진술하는 것이지만, 가추법은 새로운 것을 얻어낼 수 있는

6) Peirce는 미국의 프래그머티즘의 창시자이자 기호학자, 논리학자이고 그의 방대한 업적은 그가 남긴 수작업으로 남아 있으며, C. Harshorne, P. Weiss, A. W. Burks가 1933년에서 1966년까지 편집한 8권의 Collected Papers of Charles Sanders Pierce 안에 들어 있다(김선희, 2004).

7) Peirce의 abduction을 귀환법(retroduction), 가정(hypothesis), 추정(presumption), 독창적인 주장(originary argument) 등으로 부르며, 상정논법, 귀추법, 추리법 등으로 번역하고 있으나, 김성도(1997), 김선희, 김기연(2004), 김선희, 이종희(2002) 연구에 근거하여 abduction을 가추법이라고 해석한다.

창조적인 특징을 갖고 있다. 따라서 가추법을 인간의 본능적인 관찰에 따른 심리적인 추론으로 여긴다면, 그 추론이 취약하다 해도 연역법과 귀납법과 더불어 하나의 추론 방식으로서 받아들일 수 있다(김성도, 1997).

수학 개념의 발명과 발견을 경험하는 수학 학습 과정에서 연역 추론뿐만 아니라 개연적 추론의 중요성이 많이 인정되고 있다. 김선희, 이종희(2002)는 개연적 추론을 귀납법과 가추법으로 분리하고 Polya(1954)가 언급한 일반화와 특수화는 귀납법에, 유추, 은유, 환유는 가추법에 속하는 추론 유형으로 구분한 뒤, 은유와 환유를 Peirce의 기호학적 관점에서 살펴보았다. 김선희, 김기연(2004)은 수학적 모델링에서 나타나는 추론적 사고를 조사하였다. 수학적 모델링에서 연역법은 수학적 모델이 옳은지 현실에 비추어 확인하는 과정에서 그리고 수학적 결과를 유도하여 해를 구할 때 사용되고 귀납법은 수학적 모델이 옳은지를 실험적으로 검증해 보고자 할 때 사용된다고 하였다. 특히, 수학적 모델링에서 여러 역할을 담당한 가추법은 현실 모델로부터 수학적 모델을 추상화하고 수학적 결과에 대한 현실적 근거를 제시하는 해석을 하고, 현재의 수학적 모델을 수정하여 새로운 수학적 모델을 도출하는데 사용된다고 하였다.

가추법은 문제에 대한 설명을 할 수 있는 가설을 형성하는 과정이다(김선희, 2004). Peirce에 의하면 검증을 위한 하나의 가설은 그 가설이 그 결과가 실험에 의해 검증될 수 있고(귀납법), 관찰된 사실들이 그 가설로부터 필연적 결론으로서 도출될 수 있으며(연역법), 그 가설이 궁극적으로 진리의 발견에 이를 수밖에 없는 방법론에 따라 선별된 것이어야 한다(연희원, 1998, 재인용). 수학적 발견을 이루고 난 후 그것을 검증하고자 하는 생각이 메타-가추법[8]이며, 수학에서는 후속적으로 연역법을 필요로 한다(김선희, 김기연, 2004).

본 연구에서도 학생들이 개연적 추론을 한 후에 그에 대한 근거를 찾고 증명하고 확인하는 활동을 할 것으로 기대한다. 수학적 모델링에서 이루어진 기존 연구를 바탕으로 본 연구에서는 개방형 기하 문제에서 드래깅 활동을 통하여 학생들이 추론한 사고과정을 가추법, 귀납법, 연역법을 중심으로 살펴본다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

연구자들은 상황의 심층적 이해와 그 상황에 관계된 것들의 의미를 깊이 파악하기 위하여 질적 사례 연구(qualitative case study)를 사용한다. 질적 사례 연구에서 사례는 내재적으로 주목을 끄는 것이거나 연구자가 그 현상에 대해 가능한 한 완전한 이해를 얻고자 하여 선택한 의도적 표집이 될 수 있다(Merriam, 1997). 설정(setting)이나 연구대상자에 대한 연구자의 영향력을 '반응성(reactivity)'이라고 하는데, 질적 연구에서 연구자의 영향력을 제거하는 일은 실제 불가능하며, 질적 연구의 목표는 연구자의 영향력을 제거하는 것이 아니라 이를 이해하고 생산적으로 사용하는 것이다(Maxwell, 2012).

본 연구는 가추법, 귀납법, 연역법을 중심으로 한 학생들의 사고과정을 살펴보기 위해 다양한 추론적 표현이 가능한 중학교 3학년 학생들을 선정하였으며, 학생과의 원활하고 의도적인 상호작용을 위해 수업 진행자가 연구자인 질적 사례 연구 방법으로 설계되었다.

8) Eco(1983)는 가추법의 유형에 '메타-가추법'을 추가하였다. 메타-가추법은 세 가지 가추법('지나치게 규범화된(over-coded)', '덜 규범화된(under-coded)', '창조적(creative)' 가추법)이 기초하고 있는 세상이 우리의 경험에 의한 세상과 동일한지 아닌지를 결정하는 것과 관련되는 것이다(김선희, 김기연, 2004, 재인용).

1. 연구 대상

본 연구는 K대학교 영재학급 중학교 3학년 학생 4명을 대상으로 수행하였다. 네 학생 모두 수학에 대한 흥미와 성취가 높고, 평면 기하에서 연역적인 증명이 가능하였다. 정형적인 과제가 아닌 개방형 과제에서 다양한 수학적 추론 과정을 살펴보기 위해서는 중학교 3학년 중에서도 수학에 관심이 많은 학생들이 적합하다고 판단되었기에 이 학생들을 선정하였다. <표 Ⅲ-1>은 연구 대상자들의 성향과 문제 해결 과정에서 보였던 특징을 나타낸 것이다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상자의 특징

학생	특징
Y	GSP를 조작하는 능력이 뛰어나며, 유클리드 기하에 대한 직관이 탁월하였다. 처음에는 GSP를 사용하기 보다는 자신의 직관으로 증명 문제를 해결하기도 하였으나 수업이 진행되고 GSP에 적응하게 되자, 가장 뛰어난 성취를 보여준 학생이었다.
J	GSP를 사용한 경험이 있는 유일한 학생이나 유클리드 기하에 대한 사전 지식이 다른 학생들에 비해 부족하였다. 기하에 대한 지식의 부족으로 인해 개방형 문제를 해결하는 데 어려움을 겪었으나 수업태도는 성실하였다.
S	GSP의 조작에 쉽게 적응하고 수학에 대한 관심이 많고 긍정적이었다. 새로운 내용에 관심이 많으며 자신의 생각을 잘 표현하는 편이어서 '경로'의 개념을 쉽게 받아들였고 다른 학생들에 비해 다양한 드래깅 양상을 사용하였다.
E	GSP와 개방형 문제에 적응하는 데 어려움이 있었다. 유클리드 기하에 대한 지식은 부족하지 않으나 소심한 성격과 GSP에 대한 기술적인 어려움으로 인해 문제 해결에 어려움을 많이 겪었다.

2. 과제

본 연구의 과제는 중학교 2학년부터 3학년까지의 기하 영역에서 사각형, 닮음 조건, 원주각 등의 내용을 기초로 한 개방형 문제들 중에서 Baccaglini-Frank(2010) 연구에서 사용된 두 문제를 채택하였다. 이러한 과제에서 학생들은 도형 간의 종속 관계를 파악한 뒤 기본 점을 결정하여 특별한 사각형의 형태를 발견하고, 그 전제(premise)를 찾아내고 근거를 설명한다. 학생에 따라 답이 달라질 수 있는 목표 상황이 열린 개방형 문제이다. <표 Ⅲ-2>는 과제에 대한 개요를 나타낸 것이며, 자세한 내용은 <부록 1>에 첨부한다.

<표 Ⅲ-2> 본 연구의 개방형 기하 과제

<table>
<tr><th colspan="2">상위 구분 및 내용</th><th>하위 구분</th><th>학생들이 제시한 답</th></tr>
<tr><td rowspan="2">문제 1</td><td rowspan="4">문제에서 제시한 대로 작도한 뒤, 한 점을 드래깅하여 사각형 ABCD가 될 수 있는 사각형의 경우를 모두 추측하고 그 이유를 설명하라.</td><td>문제 1-1</td><td>▶ 점 A를 중심으로 하고 반지름이 PA인 원을 따라 점 D를 드래깅하면 사각형 ABCD는 평행사변형이다.</td></tr>
<tr><td>문제 1-2</td><td>▶ 점 A를 중심으로 하고 반지름이 PA인 원과 점 P를 중심으로 하고 반지름이 AP인 원의 교점 위로 점 D를 드래깅하면 사각형 ABCD는 직사각형이다.
▶ 삼각형 PAD와 삼각형 PCB가 합동이 되도록 점 D를 드래깅하면 사각형 ABCD는 직사각형이다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">문제 2</td><td>문제 2-1</td><td>▶ 선분 AK를 지름으로 하는 원을 따라 점 M을 드래깅하면 사각형 ABCD는 직사각형이다.
▶ 점 K를 중심으로 하고 반지름이 BK인 원을 따라 점 A를 드래깅하면 사각형 ABCD는 직사각형이다.
▶ 직선 CD와 평행하고 점 B를 지나는 직선을 따라 점 A를 드래깅하면 사각형 ABCD는 직사각형이다.</td></tr>
<tr><td>문제 2-2</td><td>▶ 선분 AK를 지름으로 하는 원과 선분 AK의 수직이등분선의 교점 위로 점 M을 드래깅하면 사각형 ABCD는 정사각형이다.
▶ 점 K를 중심으로 하고 반지름이 BK인 원과 중심이 M이고 반지름이 BM인 원의 교점 위로 점 A를 드래깅하면 사각형 ABCD는 정사각형이다.</td></tr>
</table>

2. 연구 일정 및 내용

2013년 8월 3일부터 10월 26일까지 두 차례의 도입수업과 두 차례의 본 수업을 실시하였다. 개방형 문제와 GSP 환경에 쉽게 적응할 수 있도록 하기 위해서 연구자는 두 차례의 도입수업을 진행하였고 이를 통해서 학생들은 드래깅 활동이나 경로, 도형 간의 종속 관계에 대한 존재를 의식하게 되었다. 이러한 도입수업은 연구자가 학생들의 성향을 파악하여 학생들의 사고 과정에서 수학적 추론을 끌어내는데 도움이 되었다. <표 Ⅲ-3>는 수업 일정 및 내용을 나타낸 것이다.

<표 Ⅲ-3> 수업 일정 및 내용

일시	수업 주제	수업 내용	소요시간
2013. 08. 03	도입수업 - GSP 소개 및 도구 사용법	도형의 작도, 흔적 도구, 측정 도구 사용법 및 연습하기	2
2013. 09. 28	도입수업 - GSP 환경의 특징 및 개방형 기하 문제 소개	도형 간의 종속 관계, 경로의 개념에 관한 문제 해결, 개방형 기하 문제 소개하기	2
2013. 10. 26	본 수업 - 개방형 기하 문제 1	GSP로 개방형 기하 문제 해결하기	2
	본 수업 - 개방형 기하 문제 2	GSP로 개방형 기하 문제 해결하기	2

3. 자료 수집 및 분석 방법

각 차시별로 수업 장면을 동영상으로 녹화하였으며, 학생들의 GSP 조작 과정을 담은 화면과 음성은 동영상 파일로 저장하였다. 또한 학생들이 수업시간에 작성한 활동지와 GSP 파일, 학생과의 비구조화된 면담 내용, 연구자가 작성한 현장 노트(field note)도 연구의 자료로서 수집되었다. 수업 화면 동영상은 모두 전사되고 패턴들은 범주들로 변형되며, 이후 항목들은 이 범주들로 분류되었다. 인용된 발췌문은 <발췌문 번호 - 문제 - 학생>으로 구분하여 제시되었으며, 연구자[9]는 T로, 네 명의 학생은 Y, J, S, E로 표현되었다. 또한 인용된 발췌문에서 연구자는 확신이 있는 경우에 한하여 대괄호([ ])를 사용하여 학생의 생략된 인터뷰 내용을 보충하였고, 소괄호(( ))를 사용하여 학생이나 연구자의 행동을 자세하게 서술하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

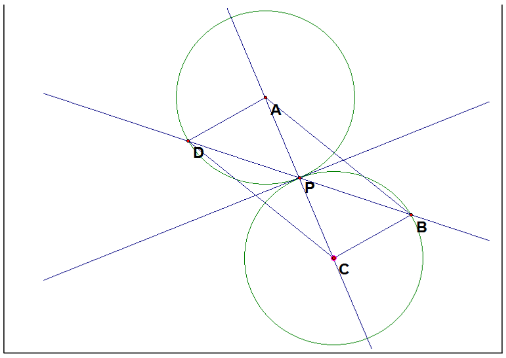
1. 개방형 기하 문제 해결 과정에서 나타난 학생들의 수학적 추론 방식

학생들은 자신의 가설을 도입하기 위해 가추법을 사용하고, 여러 가지 사례를 보고 가설을 일반화하기 위해 귀납법을 사용하며, 가설의 근거를 설명하기 위해 연역법을 사용하였다.

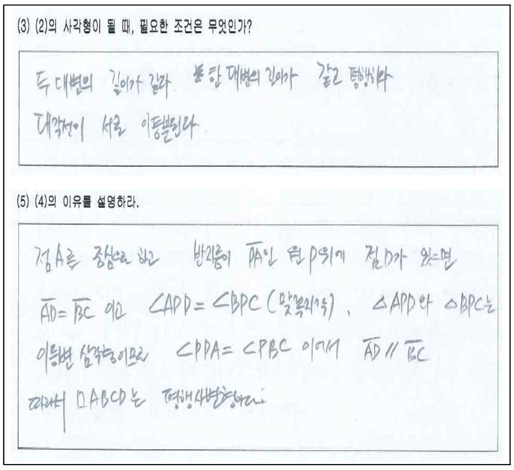
<발췌문 1 - 문제 1-1 - Y>[10]

1T : 그런데 이 원은 어떻게 찾은 거야?
2Y : 어... 평행사변형이니까요.
3T : 음. 직관적으로로?
4Y : 어... 평행사변형이면 대변의 길이가 같아야 하잖아요. (도형을 가리키면서) 여기[선분 AD]랑 여기[선분 BC]. 그리고 대각선[선분 AC]도 이등분되고. 그러니까 이 원[중심이 A이고 반지름이 AP인 원]을 그려 본 거죠.

9) 여기서 '연구자'는 본 논문의 제1저자를 의미한다.
10) 본 논문에서 사용된 GSP 환경에서의 작도 그림은 학생들의 문제 해결 과정을 관찰한 비디오 촬영 내용과 학생들이 제출한 GSP 파일을 근거로 하여 연구자가 재작도한 것이다.



Y는 임의적 드래깅을 사용하여 여러 가지 점들을 움직여 보면서 도형 간의 종속 관계를 파악하고 점 D를 기본 점으로 결정하였으며 사각형 $ABCD$가 평행사변형임을 발견하였다(2Y). Y는 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 되도록 안내된 드래깅을 사용하여 점 D를 움직이다가 '두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다' 또는 '한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다' 또는 '두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다'는 평행사변형의 성질을 떠올렸고, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AP}=\overline{CP}$을 사용하여 점 D의 경로인 중심이 A이고 반지름이 $\overline{AP}$인 원을 작도한 뒤 점 D를 이 원에 병합시켰다(4Y). 처음에 Y는 세 가지 다른 규칙을 사용하여 세 가지 가설을 만들었다. 즉, Y는 (1) 사각형 $ABCD$가 평행사변형임을 발견하였고, 사각형 $ABCD$에서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으면 평행사변형이라는 규칙을 통해, 사각형 $ABCD$는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 사례와, (2) 사각형 $ABCD$가 평행사변형임을 발견하였고, 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으면 평행사변형이라는 규칙을 통해, 사각형 $ABCD$에서 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다는 사례를, 그리고 (3) 사각형 $ABCD$가 평행사변형임을 발견하였고, 사각형 $ABCD$에서 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하면 평행사변형이라는 규칙을 통해, 사각형 $ABCD$는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다는 사례를 얻었다. 그러나 기본 점의 위치를 탐색하는 과정에서 Y가 한 쌍의 대변의 길이만 같다고 하거나 ($\overline{AD}=\overline{BC}$), 한 대각선이 이등분된 것 ($\overline{AP}=\overline{CP}$)만 언급한 것으로 보아(4Y), Y는 자신의 규칙을 하나로 결정하지 못하고 이 세 가지 모두를 가설로 생각하고 있음을 알 수 있다. 이것은 <그림 Ⅳ-1-(3)>에서 평행사변형이 되기 위한 필요한 조건을 묻는 질문에 Y가 이 세 가지 모두를 기술한 것에서 알 수 있다. 교사가 자리를 이동한 후에 Y는 원을 따라 점 D를 움직이면서 사각형 $ABCD$가 평행사변형의 성질을 유지하는지 살펴보았다. 즉, Y는 경로(중심이 A이고 반지름이 $\overline{AP}$인 원)를 따라 점 D를 움직이는 드래깅 검증을 통해서 다양한 평행사변형들을 확인할 수 있었고, 이러한 다양한 사례들 속에서 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 되기 위해 어떤 성질을 만족해야 하는지 결정할 수 있었다.


(3) (2)의 사각형이 될 때, 필요한 조건은 무엇인가?

두 대변의 길이가 같다 또 한 대변의 길이가 같고 평행하다
대각선이 서로 이등분된다

(5) (4)의 이유를 설명하라.

점 A를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{PA}$인 원 P위에 점 D가 있으면
$\overline{AD}=\overline{BC}$ 이고 $\angle APD=\angle BPC$ (맞꼭지각), $\triangle APD$와 $\triangle BPC$는
이등변 삼각형이므로 $\angle PDA=\angle PBC$ 이어서 $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$
따라서 □ABCD는 평행사변형이다.

[그림 Ⅳ-1] 문제 1-1에 대한 Y의 활동지

Y는 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으면 사각형 $ABCD$는 평행사변형이라는 규칙(그

[그림 Ⅳ-2] 문제 1-1에서 Y의 드래깅 활동과 추론의 형태

(드래깅) 활동	수학적 추론	
	형태	내용
임의적 드래깅, 안내된 드래깅	가추법 1	• 결과1 : 사각형 ABCD는 평행사변형이다. • 규칙1 : 사각형 ABCD에서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으면 평행사변형이다. • 사례1 : 사각형 ABCD에서 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다. 즉, $\overline{AD}=\overline{BC}, \overline{AB}=\overline{CD}$
	가추법 2	***• 결과2 : 사각형 ABCD는 평행사변형이다.*** ***• 규칙2 : 사각형 ABCD에서 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으면 평행사변형이다.*** ***• 사례2 : 사각형 ABCD에서 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이는 같다. 즉,*** $\overline{AD}=\overline{BC}, \overline{AD}//\overline{BC}$
	가추법 3	• 결과3 : 사각형 ABCD는 평행사변형이다. • 규칙3 : 사각형 ABCD에서 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하면 평행사변형이다. • 사례3 : 사각형 ABCD에서 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다. 즉, $\overline{AP}=\overline{PC}, \overline{DP}=\overline{PB}$

⇩

드래깅 검증	중심이 A이고 반지름이 AP인 원(경로)을 작도하고 점 D를 원에 병합시킨다. 경로를 따라 점 D를 드래깅 하자 다양한 평행사변형의 사례들이 관찰된다.

⇳

드래깅 검증	귀납법	• 사례4 : (경로 위의) 모든 사각형 ABCD는 $\overline{AD}=\overline{BC}, \overline{AD}//\overline{BC}$이다.
		• 결과4 : 사각형 ABCD는 평행사변형이다.
		• 규칙4 : $\overline{AD}=\overline{BC}, \overline{AD}//\overline{BC}$이면 평행사변형이다.

⇳

드래깅 검증	점 D가 경로를 따라 움직인다는 것은 $\overline{AD}//\overline{BC}$을 보장해준다.

⇩

활동지 작성	연역법	• 규칙5 : 사각형 ABCD에서 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으면 평행사변형이다. • 사례5 : 사각형 ABCD는 $\overline{AD}=\overline{BC}, \overline{AD}//\overline{BC}$이다. • 결과5 : 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

림 Ⅳ-2의 가추법 2)을 채택하고 [그림 Ⅳ-1-(5)]에서 $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AD}//\overline{BC}$인 이유를 제시하여 사각형 $ABCD$가 평행사변형이라고 진술하였다. 결국 Y는 가추법을 통해 얻어낸 세 가지 가설 중에서 경로와 드래깅 검증을 통하여 전제 중 하나인 $\overline{AD}//\overline{BC}$을 인식하게 되었고 정당화 과정에서 전제의 근거를 연역적으로 밝혀 증명을 완성하였다.

Y뿐만 아니라 다른 세 명의 학생들도 가추법 ⇒ 귀납법 ⇒ 연역법 순으로 추론을 이어갔으나, 인지적 어려움과 기술적 어려움의 개인차로 인해 추론에 도달하는 모습은 다소 달랐다.

이상 문제 1-1에서 Y의 드래깅 활동과 추론의 형태를 정리하면 [그림 Ⅳ-2]와 같다.

2. 개방형 기하 문제 해결 과정에서 수학적 추론에 대한 드래깅 활동의 역할

가. 임의적 드래깅과 안내된 드래깅은 학생들이 가추 과정에서 가설을 마련하는데 도움이 되었다.

주로 학생들은 가추 과정에서 임의적 드래깅과 안내된 드래깅을 사용하였으며, 귀납 과정에서는 드래깅 검증을 사용하였다. <표 Ⅳ-1>은 본 연구의 과제에서 학생들이 사용한 드래깅 활동과 추론 과정을 나타낸 것이다. 학생들은 임의적 드래깅을 사용하여 특정한 도형(예를 들어, 평행사변형이나 직사각형 등)을 발견하고 안내된 드래깅을 사용하여 자신의 가설을 도입하였다. 이것은 개방형 과제에서 학생들이 임의적 드래깅과 안내된 드래깅을 주로 사용하며, 숨겨진 자취 드래깅은 가끔 사용되거나 거의 사용되지 않는다고 한 Olivero(2002)의 연구와도 일치한다. 특히 <표 Ⅳ-1>의 음영부분에 의하면, 모든 문제를 해결한 Y를 제외하고 E, J와 S가 다른 추론

<표 Ⅳ-1> 학생들이 사용한 드래깅 활동과 수학적 추론

학생	과제	드래깅 활동				Peirce의 수학적 추론		
		임의적 드래깅	안내된 드래깅	숨겨진 자취 드래깅	드래깅 검증	가추법	귀납법	연역법
Y	문제 1-1	○	○	X	○	⇒	⇒	⇒
	문제 1-2	○	○	○	○	⇒		⇒
	문제 2-1	○	○	○	○	⇒	⇒	⇒
	문제 2-2	○	○	X	○	⇒		⇒
J	문제 1-1	○	○	X	○	⇒	⇒	
	문제 1-2	○	○	X	○	⇒		
	문제 2-1	○	○	X	○	⇒	⇒	⇒
	문제 2-2	○	○	X	○	⇒		⇒
S	문제 1-1	○	○	○	○	⇒	⇒	
	문제 1-2	○	○	○	○	⇒		
	문제 2-1	○	○	○	X	⇒		
	문제 2-2	X	X	X	X			
E	문제 1-1	○	X	X	X	⇒		
	문제 1-2	○	X	X	X	⇒		
	문제 2-1	○	X	X	X	⇒		⇒
	문제 2-2	○	X	X	X	⇒		
○는 사용한 경우, X는 사용하지 않은 경우를 의미한다.						⇒는 해당 추론에 성공한 경우, 빈칸은 해당 추론을 생략하거나 성공하지 못한 경우를 의미한다.		

에 비해 가추적 사고에 임할 때, 임의적 드래깅이나 안내된 드래깅을 선호하였음을 알 수 있다. 이것은 논리적인 근거가 따로 필요 없는 가추 과정에서 비교적 부담이 적고 접근하기 쉬운 드래깅 활동으로 학생들이 임의적 드래깅이나 안내된 드래깅을 생각하고 있음을 의미한다. 결국, 학생들은 가추 과정에서 임의적 드래깅이나 안내된 드래깅을 주로 사용하였고 이를 통해 자신의 가설을 마련하는 데 도움을 받았다.

나. 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅을 통해 발견된 사례가 단일하거나 적은 경우 학생들은 귀납 과정을 생략하였다.

<발췌문 2>에서 Y는 임의적 드래깅을 사용하다가 점 D가 특정한 위치에 있을 때, 평행사변형 $ABCD$가 직사각형임을 발견하고 이 직사각형을 유지하면서 안내된 드래깅을 하였다. 숨겨진 자취 드래깅을 사용한 Y는 직사각형 $ABCD$를 만족하도록 하는 점 D의 위치에 일정한 규칙성이 보이지 않자 당황하였고(1Y), 교사의 설명을 들은 후에야 점 D의 흔적을 지우고 직사각형 $ABCD$를 만족하는 점 D의 위치를 최종 결정하였다. 이때, Y의 가추법은 다음과 같았다. 평행사변형 $ABCD$가 직사각형임을 발견하였고 (5Y), 평행사변형 $ABCD$에서 두 대각선의 길이가 같으면 직사각형이라는 규칙을 통해(7Y), 평행사변형 $ABCD$의 두 대각선이 같다는 사례를 찾았다. 그러나 이 때의 규칙은 Y에게 그저 추측에 지나지 않을 뿐이다(8T, 9Y). Y는 주어진 조건과 자신의 가설을 뒷받침할 근거를 찾기 위해 고민하다가 점 P가 중심이고 반지름이 $\overline{PA}$인 원(원 3)을 작도하고, 두 원(원 2와 원 3)의 교점에 점 D를 드래깅 하는 드래깅 검증을 통해 연역 추론으로 나아갈 준비를 하였다(12Y, 13T).

(드래깅) 활동	Peirce의 수학적 추론	
	형태	내용
임의적 드래깅 안내된 드래깅 숨겨진 자취 드래깅	가추법	• 결과1 : 평행사변형 ABCD는 직사각형이다. • 규칙1 : 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 같으면 직사각형이다. • 사례1 : 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 길이는 같다. 즉, $\overline{AC} \fallingdotseq \overline{BD}$
⇩		
드래깅 검증	점 P가 중심이고 반지름이 PA인 원을 새롭게 작도한다(원 3). 점 D를 원 3과 원 2의 교점 위로 드래깅하는 드래깅 검증을 시도한다. 이로 인해 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 같다는 성질 즉, $\overline{AC} \fallingdotseq \overline{BD}$이 보장된다. 그러나 사각형 ABCD가 직사각형이 되도록 하는 점 D의 위치가 두 개이므로 경로를 따라 점 D를 드래깅하는 드래깅 검증은 생략된다.	
⇩		
활동지 작성	연역법	• 규칙2 : 두 대각선의 길이가 같으면 평행사변형 ABCD는 직사각형이다. • 사례2 : 평행사변형 ABCD는 $\overline{AC} \fallingdotseq \overline{BD}$이다. • 결과2 : 평행사변형 ABCD는 직사각형이다.

[그림 Ⅳ-4] 문제 1-2에서 Y의 드래깅 활동과 추론의 형태

<발췌문 2 - 문제 1-2 - Y>

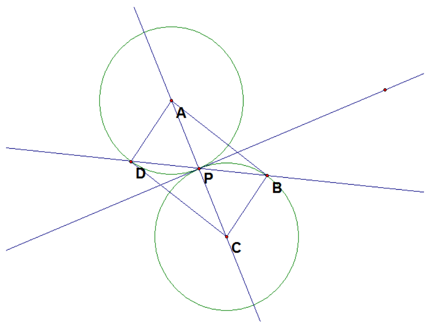
1Y : (점 D에 숨겨진 자취 드래깅을 시도한다.) 원이 안 나타나요.[점 D의 경로가 원이 아니에요]

2T : 꼭 원일 필요는 없어. 전에 있던 조건에서 더 추가가 되는 거니까. 평행사변형일 때 경로가 원이었잖아. 직사각형이 되면 더 조건이 많아지니까 [경로가] 원일 수도 있지만 아닐 수도 있지.

3Y : (점 D의 흔적을 지우고 직사각형 ABCD가 되도록 점 D를 드래깅 한다)

4T : 뭐가 나왔네. 설명해줄래?

5Y : 막 돌려보다가 [점 D가] 이쯤 있을 때.



6T : 음, 점 D를 계속 사용했구나. 그럼 이게 왜 네가 원하는 사각형이 된 거니?

7Y : 이게[사각형 ABCD가] 직사각형이 되려면 대각선의 길이가 서로 같아야 하니까요.

8T : 여기서 어떻게 대각선이 같다는 거야? 이 상태에서는 알 수가 없는데...

9Y : ...

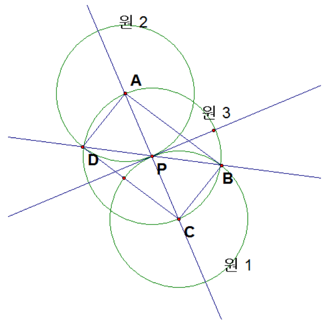
10Y : 음. (화면을 가리키면서) 여기는 여기랑 [선분 AP와 선분 PC] 같고, 여기랑 여기랑[선분 DP와 선분 PB] 같으면...

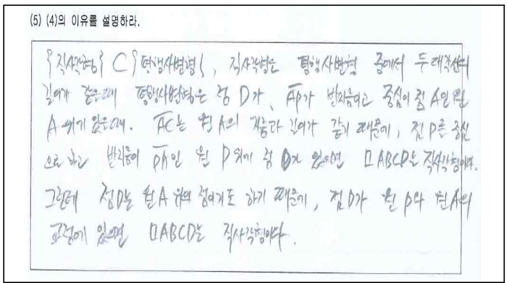
11T : 그렇구나. 점 D의 위치를 정확하게 말해 줄래?

12Y : (점 P가 중심이고 반지름이 PA인 원[원 3]을 새롭게 작도하고 점 D를 두 원[원 2와 원 3]의 교점 위로 드래깅 한다.)

13T : 원[원 3]을 새롭게 그렸구나. 두 번째 원[원 2]을 점 D가 움직일 때는 평행사변형을 유지했고, 이번에 점 D가 두 번째 원[원 2]과 세 번째 원[원 3]의 교점에 있을 때는 직사각형이 되는 구나. 교점 맞지? 하하.

14Y : (미소)




(5) (4)의 이유를 설명하라.

{직사각형} ⊂ {평행사변형}, 직사각형은 평행사변형 중에서 두 대각선의 길이가 같을 때 평행사변형은 점 D가, $\overline{AP}$가 반지름이고 중심이 점 A인 원 A 위에 있을 때. $\overline{AC}$는 원 A의 지름과 길이가 같기 때문에, 점 P를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{PA}$인 원 P 위에 점 D가 있으면 □ABCD는 직사각형이다. 그런데 점 D는 원 A 위의 점이기도 하기 때문에, 점 D가 원 P와 원 A의 교점에 있으면 □ABCD는 직사각형이다.

[그림 Ⅳ-3] 문제 1-2에 대한 Y의 활동지

[그림 Ⅳ-3]에서 Y는 점 D가 원 2(원 A)와 원 3(원 P)의 교점일 때, 두 대각선의 교점은 원 3의 중심이므로 두 대각선(원의 지름)의 길이가 같아서 평행사변형 $ABCD$는 직사각형이 된다고 진술하였다. 처음에 Y는 안내된 드래깅을 통하여 직사각형이 되게 하는 점 D의 위치(사례)가 많지 않음을 예상하였고 이것을 직접 확인하기 위해 점 D에 흔적 도구를 가미시킨 숨겨진 자취 드래깅을 사용하였다. 이후 Y는 직접 원 3을 작도하여 점 D를 두 원의 교점으로 둠으로써 직사각형 $ABCD$를 만족하는 점 D의 위치가 단 두 개뿐임을 확신하게 되었다(발췌문 2 - 아래 그림). 더 이상 Y는 직사각형이 되는 다른 사례들을 찾지 않았고 경로를 따라 점 D를 드래깅 하는 활동도 하지 않았다. 이상 문제 1-2에서 Y의 드래깅 활동과 추론의 형태를 정리하면 [그

림 Ⅳ-4]와 같다.

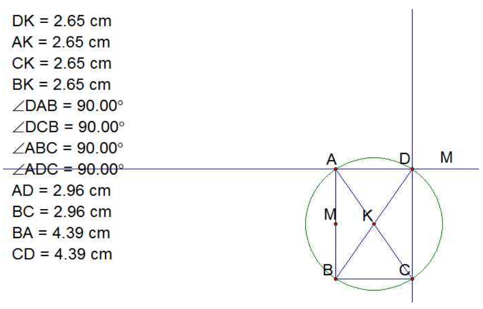
다. 학생들은 귀납 과정에서 자신의 가설을 일반화하거나 자신의 가설을 뒷받침할 도형의 성질을 찾기 위해 측정도구나 드래깅 검증을 사용하였다.

<발췌문 3>에서 J는 임의적 드래깅을 사용하여 여러 점들을 움직이다가 점 A를 움직일 때 사다리꼴 $ABCD$가 직사각형이 된다는 사실을 발견하였다. J는 중심이 K이고 점 A, B, C, D를 지나는 원을 작도하기 위해 점 A를 안내된 드래깅 하였고(1J), 선분 AB, 선분 BD를 작도한 뒤 $\overline{DK}, \overline{AK}, \overline{CK}, \overline{BK}$의 길이를 측정하였다(발췌문 3의 GSP 그림). J의 이러한 행동은 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하고 두 대각선의 길이가 같다는 직사각형의 성질을 만족하는지 조사하기 위한 것으로 볼 수 있다.

J는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하고 두 대각선의 길이가 같다는 두 가지 성질을 $\overline{AK}=\overline{CK}=\overline{DK}=\overline{BK}$로 대체하는데(3J), 이것은 복잡한 성질을 자신이 구현하거나 유지하기 쉬운 성질(한 원의 반지름은 모두 같다)로 바꾸어 문제를 해결하려는 의도로 보인다. J는 원에서 $\overline{DK}, \overline{AK}, \overline{CK}, \overline{BK}$을 측정한 것에 만족하지 않고 네 각과 네 변의 길이를 더 측정하였다. J는 GSP 환경에서 측정 도구를 자주 사용하며 자신의 추측을 입증하는 도구로 활용하고 있었다. 이러한 측정이 끝난 뒤에 J는 드래깅 검증을 사용하여 새롭게 작도한 원을 따라 점 A를 움직였으며, 네 각과 네 변의 길이의 변화를 함께 살펴보면서 직사각형 $ABCD$가 유지되는지 확인하였다(5J). 이러한 귀납 과정에서 J는 다양한 직사각형들을 관찰하였고 $\overline{AK}=\overline{CK}=\overline{DK}=\overline{BK}$이면 직사각형이라는 규칙을 인식할 수 있었다.

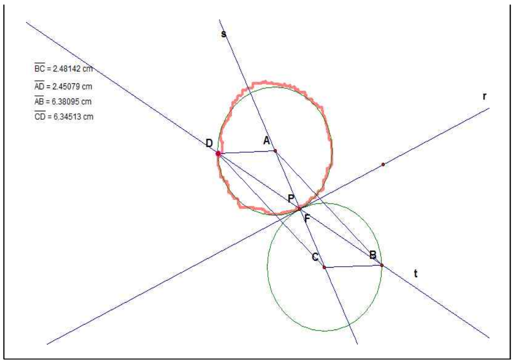
<u><발췌문 3 - 문제 2-1 - J></u>

1J : (중심이 K이고 점 A, B, C, D를 지나도록 원을 작도한다.)
2T : 잘 되어 가니?
3J : 원을 사용했어요.
4T : 음... 그러네. 그러니까 점 A가 더 분명해지네... 잘 했어. 정리해봐.
5J : (작도한 원을 따라 점 A를 드래깅 한 뒤 활동지를 작성하기 시작한다.)



<u><발췌문 4 - 문제 1-1 - S></u>

1S : (S는 흔적 남기기를 하여 만들어진 원 위에 중심이 P이고 반지름이 AP인 원을 다시 작도한다.)
2T : 어떻게 움직인 거야?
3S : 대변[선분 AD와 선분 BC, 선분 AB와 선분 CD]의 길이를 같다고 두고서.
4T : 음... 그런 식으로 했구나. 흔적 남기기 할 때 계속 움직이다가 평행사변형이 안 되는 부분도 있었을 텐데... 예를 들어, 사각형이 일직선이 되거나 겹치는 상태 말이야. 그런데 네가 계속 원을 유지하고 그린 것은 원이라는 도형이 연속적으로 이루어질 것이라는 기대 때문인 거니?
5S : 하하. 네, 네.
6S : 점 D를 원 위에 두고 싶어요.
7T : 점 D를 원 위에 두고 돌려보고 확인하고 싶은 거니?
8S : 네. (점 D를 작도한 원 위에 두고 작도한 원을 따라 점 D를 드래깅 한다.)



S는 점 D를 임의적 드래깅하여 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 된다는 사실을 관찰하였다. S는 두 쌍의 대변의 길이를 측정하고(발췌문 4의 GSP 그림), 평행사변형이 유지되도록 안내된 드래깅을 하다가 숨겨진 자취 드래깅을 사용하여 점 D의 흔적을 그려 나갔다. S는 자판의 화살표를 이용하여 점 D의 흔적을 정교하게 그렸으며 다 그린 후에는 점 D의 경로가 원임을 확신하고 중심이 P이고 반지름이 $\overline{AP}$인 원을 그 위에 직접 작도하였다(1S). 이것은 학습자가 이산적인 점의 집합을 일반화하여 경로를 도형으로 인식한 것이며 이 때의 흔적은 경로의 적절한 기하학적 설명에 대한 힌트를 제공해 주는 하나의 이미지이다(Baccaglini-Frank, 2010). S는 흔적 도구를 통해 경로가 어느 정도 진행되자 평행사변형이 안 되는 경우를 무시하려는 경향을 보이기도 하였다(4T, 5S). 귀납 과정에서 S는 흔적 도구를 통해 얻은 경로를 직접 작도해 보는 것에 끝나지 않고 경로를 따라 점 D를 움직이면서 평행사변형의 성질이 유지되는지 확인하는 드래깅 검증을 사용하였다(6S, 8S).

학생들은 문제 해결 과정에서 규칙성을 찾거나, 추측하거나, 추측을 검증하거나 정당화하는 자신들의 목적에 따라 다른 드래깅 활동을 하였다. 임의적 드래깅과 안내된 드래깅은 학생들의 가추 과정에서 가설을 마련하는데 도움이 되었으며 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅을 통해 발견된 사례가 단일하거나 적은 경우 학생들은 귀납 과정을 생략하고 가추법에서 바로 연역법으로 넘어갔다. 또한 학생들은 귀납 과정에서 자신의 가설을 일반화하거나 근거를 찾기 위해 측정도구나 드래깅 검증을 사용하였다. 이때, 안내된 드래깅은 가추 과정에서 다양한 사례를 발견하고 예상하는데 사용되었고, 숨겨진 자취 드래깅은 이러한 사례를 시각적으로 확인하는데 유용한 전략이었으며, 귀납 과정에서 드래깅 검증은 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅을 통해 추측된 사례를 검증하고 일반화하는 역할을 하였다. 이러한 다양한 드래깅 활동은 학생의 가추적 사고와 귀납적 사고에 도움이 될 뿐만 아니라 학생의 사고가 가추법이나 귀납법에서 연역법으로 부드럽게 넘어갈 수 있는 발판을 마련해 주었다.

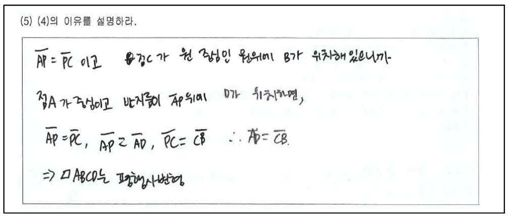
3. GSP 환경에서 개방형 기하 문제 해결 동안 학생들이 겪은 인지적 어려움

가. 가설의 근거를 설명하는 과정에서 연역적 정당화[11]로 발전시키지 못하고 경험적 정당화 수준에 머물렀다.

<발췌문 4>에서 S는 경로 위의 모든 사각형 $ABCD$는 $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$라는 사례와 사각형 $ABCD$가 평행사변형이라는 결과를 통해

11) 정당화는 주장에 대한 충분한 근거(이유)를 제시하는 것을 말하는데, 증명(proof)은 정당화의 한 형태이며 모든 정당화가 증명은 아니다(Brodie, Coetzee, & Lauf. 2010). 경험적 정당화는 수학적 명제의 타당성을 결정하는 데 있어 시각적, 수치적 예를 근거로 참이라고 받아들이는 정당화 유형이며(박수정, 2009), 연역적 정당화는 보다 엄밀하고 형식적인 증명을 말한다(조완영, 2000). 본 연구에서는 가설의 근거를 연역적 정당화로 설명(진술)한 경우에만 연역적 추론에 도달한 것으로 본다.

$\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{CD}$이면 평행사변형이라는 규칙을 얻었다. 그러나 이러한 Y의 귀납 추론은 측정도구를 이용한 수치적 예를 근거로 한 것이었다(발췌문 4의 GSP 그림). 한편 [그림 Ⅳ-5]에서 S는 사각형 $ABCD$가 평행사변형인 이유를 한 쌍의 대변의 길이가 같고($\overline{AD}=\overline{CB}$), 한 대각선이 이등분($\overline{AP}=\overline{PC}$) 되기 때문이라고 하였는데 이것은 점 D의 경로(원)인 시각적 예에 근거한 설명일 뿐 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 되는 충분한 이유가 되지 못한다. 결국 가설의 근거를 설명하는 과정에서 S는 수치적 혹은 시각적 예에 의존한 경험적 정당화 수준에 머물렀으며, 엄밀한 연역적 추론으로 나아갔다고 볼 수 없다.



[그림 Ⅳ-5] 문제 1-1에 대한 S의 활동지

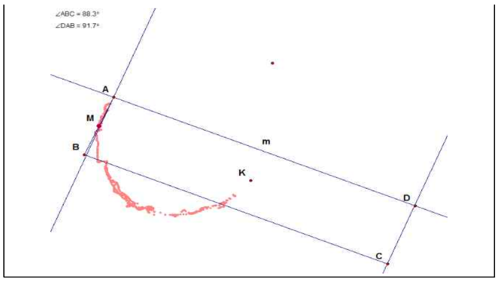
문제 1-1을 연역적으로 바르게 증명했던 Y는 가추 과정에서 가설에 해당하는 내용을 세 가지 정도 생각하였고[그림 Ⅳ-1], 귀납 과정에서 $\overline{AD}//\overline{BC}$을 조금씩 인식하여 연역 과정에서 사각형 $ABCD$가 평행사변형인 근거를 제시하는데 무리가 없었다. 반면, S는 자신의 가설을 실험적인 방식에 의존한 채 경로가 작도된 이유를 평행사변형이 되는 근거로 채택함으로써 연역 과정에서 엄밀한 증명을 하는데 실패하였다.

교사가 학생의 추측이나 주장에 대하여 그 이유를 설명하도록 자극하지 않는다면 학생에 의한 정당화는 드래깅 할 때 관찰된 성질이 주어진 가설을 불변으로 유지해 주기 때문에 주장은 참이라는 실험적 수준에 머물게 된다(Arzarello et al., 2002). 따라서, 학생들이 개연적 추론을 통해 새로운 사실을 추측하고 자신이 추측한 사실의 확실성과 일반성을 입증할 필요성을 느끼면서 의욕적으로 연역 추론을 해 나갈 수 있도록 교사의 적절한 안내는 반드시 필요하다(김남희, 2002).

나. 도형 간의 종속 관계를 파악하지 못하여 기본 점을 결정하지 못하거나 숨겨진 자취 드래깅을 통해 얻은 흔적에서 경로를 인식하기 쉽지 않았다.

<발췌문 5 - 문제 2-1 - S>

1S : (점들을 드래깅 하다가 사각형 ABCD가 직사각형임을 발견한다.) 2T : 어떤 점을 움직일 건데? 3S : M? 아니예요? 4T : 움직일 점은 본인이 정하는 거야. M 움직일래? 5S : 네. 6S : (숨겨진 자취 드래깅을 사용하여 흔적을 만들기 시작한다.) 7S : 이제 원이야. 원의 중심을 모르겠어요. 8T : 네 그림에서 지름은 MK 아니야? 9S : 네... 10S : (반쯤 그린 흔적에서 점 M을 움직일 때마다 지름 MK가 변하는 것을 확인한다.) 11S : 점 M을 원으로 움직일 때마다 지름 MK가 자꾸 변하는데요. 지름이 MK가 아닌가 봐요. 12T : 그래? 13S : 원도 고정이 안돼요. 14T : 그래? 네가 저번에 점의 경로는 변하지 않는다고 했는데.. 기억나니? 지금은 경로가 변하고 있구나. 15S : MK의 중점을 찍어서 원의 중심을 정하고 점 M을 그 원 위에 돌리면 원이 움직여요. 16T : 음... 그럼 중심이 선분 MK의 중점이고 지름이 MK인 원이 M의 경로가 아니겠네. 17S : 네.

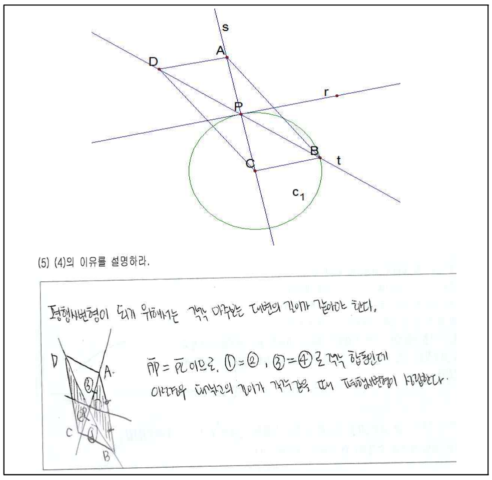


S는 임의적 드래깅을 사용하여 사다리꼴 $ABCD$가 직사각형임을 발견하지만(1S), 어떤 점을 기본 점으로 정하여 안내된 드래깅을 할지 쉽게 결정하지 못하였다(3S). S는 점 M을 움직이기로 결정하고 숨겨진 자취 드래깅을 사용하여 흔적을 그리기 시작하였다(6S). S가 흔적을 반 정도 그렸을 때, 점 M의 흔적은 원이라고 추측하지만 정확한 중심과 반지름을 알지 못하였다(7S). S는 각을 조절하여 나머지 흔적을 완성해 보지만(발췌문 5의 GSP 그림), 점 M을 움직일 때마다 지름 $\overline{MK}$의 길이가 변하는 것을 확인하고 점 M의 흔적은 지름이 $\overline{MK}$인 원이 아닐 수도 있다고 생각하였다(10S, 11S). 사실 이 문제에서 점 M의 경로는 지름이 $\overline{AK}$인 원이다. S는 문제 해결 과정 내내 자신의 잘못된 추측을 바꾸지 않았고 결국 점 M의 경로를 찾는데 실패하였다.

GSP를 수학교육에 도입할 때 교사가 가장 주의 깊게 생각해 볼 문제는 GSP 환경과 지필 환경의 차이점을 알고 이를 연결하는 문제이다(류성림, 2001). GSP 환경에서 도형 간의 종속 관계와 점의 변화를 일반화한 경로의 개념은 지필환경에서는 고려되지 않는 부분이다. 교사는 도형 간의 종속 관계를 파악하지 못하는 학생들을 위해 작도 단계를 한번 더 꼼꼼히 살펴보게 하거나 모든 점들을 드래깅 하여 움직임을 파악하게 함으로써 학생이 개체 간의 다른 상태를 인식하여 결론의 조건이나 전제를 찾을 수 있도록 도와주어야 한다. 또한 수학 수업 전에 교사는 학생들에게 GSP 환경과 지필환경의 차이점을 소개하는 시간을 충분히 가져 학생들이 GSP 환경을 이해하고 적응할 수 있도록 도와주어야 한다.

다. 작도된 도형을 고정된 것으로 생각하여 다양한 사례를 발견하지 못하였다.

문제 1-1에서 E는 임의적 드래깅을 사용하여 도형의 종속 관계를 파악한 후 점 D를 드래깅 하기로 결정하였다. E는 점 D를 드래깅 하여 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 되자(그림 Ⅳ-6-위), 드래깅 활동을 아예 멈추고 활동지를 작성하면서 평행사변형의 성질을 찾는데 집중하였다(그림 Ⅳ-6-아래). E는 평행사변형 $ABCD$를 지필환경에서의 정적인 도형으로 생각하고 다양한 형태의 평행사변형을 찾기 위해 탐구하지 않았다. 이 경우 E는 유클리드 기하 성질과 사각형의 특별한 형태(평행사변형) 사이의 논리적이고 종속적인 관계는 인식하지만, 이러한 성질을 특정한 점을 드래깅 하여 생긴 불변량으로 인식하지는 못한 것이다.



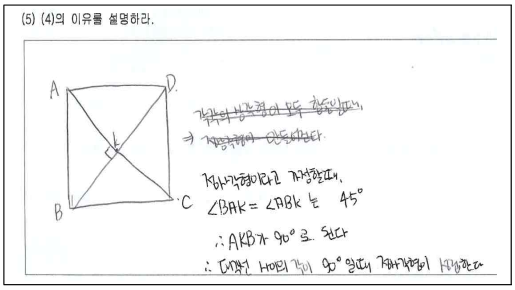
[그림 Ⅳ-6] 문제 1-1에 대한 E의 GSP 그림(위)과 활동지(아래)

GSP는 정적인 교육매체와는 달리 역동적인 상호작용이 가능하고, 학습자가 대상의 구조, 대상들 간의 관계, 표상체계를 동시에 탐구할 수 있게 해 주는 기능을 갖고 있다. 교사는 도형을 정적인 상태로 인식하는 학생들에게 숨겨진 자취 드래깅 사용을 권장하여 GSP의 역동성을 인식하고 정신적으로 유연해질 수 있도록 도와줄 필요가 있다.

라. 조건이나 전제와 결론을 구분하지 못하고 순환논리(circular reasoning)[12]에 빠지는 논리적 오류를 범하였다.

E는 점 D를 드래깅하여 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 되는 이유를 밝히는 [그림 Ⅳ-6-아래]에서 사각형 $ABCD$가 평행사변형임을 가정하여 마주 보는 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로 다시 사각형 $ABCD$가 평행사변형이 된다는 순환논리에 빠졌다.

또한 [그림 Ⅳ-7]에서도 E는 점 A를 드래깅하여 직사각형 $ABCD$가 정사각형이 되는 이유를 설명하는 과정에서 직사각형 $ABCD$가 정사각형이라고 가정하여 파생되는 성질들을 사용해서 다시 직사각형 $ABCD$가 정사각형임을 보였다.



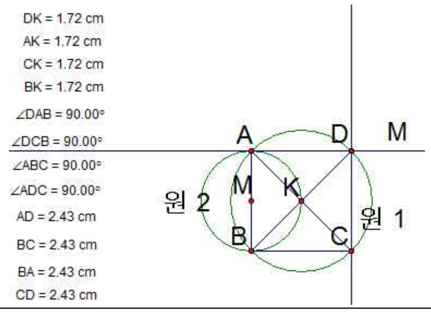
[그림 Ⅳ-7] 문제 2-2에 대한 E의 활동지

논리적 사고를 함양하기 위해서 교사는 먼저 조리에 닿도록 사고하는 태도를 길러주어야 한다. 전제가 무엇이며 결론이 무엇인가를 확실히 파악하게 하고 어떤 전제로부터 결론이 이끌어 내어지는가를 명확히 이해시켜야 한다. 결론이 성립하기 위해서는 무엇이 성립하면 좋은가를 설명하도록 요구하는 것도 좋은 방법일 것이며, '...이므로', '왜냐하면...'과 같은 용어를 바르게 사용할 수 있도록 지도해야 하고 설명을 할 때 무엇을 근거로 하고 있는가에 주의를 돌려 반성해 보도록 하는 것도 좋은 방법이다(우정호, 1998). 따라서 교사는 학생에게 결론의 조건이나 전제는 무엇인지, 구하고자 하는 것은 무엇인지, 전제와 결론을 연결해주는 것은 무엇인지 등에 관한 적절한 발문과 안내를 제공하여 학생의 논리적 사고를 도와주어야 할 것이다.

마. 유클리드 기하에 대한 부족한 지식이 추론을 저해하는 요인이 되었다.

<발췌문 6 - 문제 2-2 - J>

1J : 점 A를 이렇게 움직이니까...(점 A가 두 원의 교점이 되도록 드래깅한다.) 정사각형이 되었어요.
2T : 그렇구나. 점 A가 두 원의 교점일 때 그렇게 되는 구나. 그럼... 왜 그렇지?
3J : 어... (화면을 가리키면서) AK랑 BK, DK랑 CK가 같아야 돼요.[네 선분이 모두 같아야 돼요.]
4T : 아... 똑같아야 돼.
5J : 각 A, B, C, D도 같아야 돼요.



12) 순환논리(circular reasoning)란 다음과 같은 형태의 논리적 오류이다. 예를 들어, "B가 참이므로 A는 참이다. 왜냐하면 A가 참이므로 B가 참이기 때문이다." 즉, 서로가 서로를 증명하는 것처럼 보이나, 서로가 서로를 가정하기 때문에 사실은 증명이 되지 못한다. http://en.wikipedia.org/wiki/Circular_reasoning

J는 점 A를 임의적 드래깅하여 직사각형 $ABCD$가 정사각형이 되는 것에 주목하였다. J는 세 점 A, K, B를 지나도록 원을 작도하고 길이와 각을 각각 측정하였다. J는 점 A를 두 원의 교점으로 두면서도(1J), 정작 직사각형 $ABCD$가 정사각형이 되는 이유를 파악하지 못하였다. 즉, J는 $\overline{AK}=\overline{CK}=\overline{DK}=\overline{BK}$와 네 각이 같다는 진술(3J, 5J)이 둘 다 직사각형의 성질을 나타내고 있을 뿐 정사각형이 되는 근거가 되지 못한다는 사실을 알지 못했다. J는 학교에서 '원주각의 성질'을 배웠음에도 불구하고 $\angle AKB$가 90°라는 사실을 이용하지 못했다. 교사가 자리를 이동할 때마다, J는 인터넷을 통해 사각형의 성질을 검색하는 모습을 자주 보였으며 다른 학생들보다 문제를 해결하는 데 시간도 많이 걸렸다.

GSP를 활용한 수업에서 교사는 학생 개개인의 인지 수준을 파악하여 학생과 함께 상호작용하는 중재자 역할을 해야 한다. 교사는 DGS 환경이 기존의 지필환경을 대체할 수 있는 것이 아니라 상호 보완할 수 있는 학습 환경이라는 점을 항상 명심해야 하며(류성림, 2001), 학생의 개인차를 고려하여 수준에 맞는 문제를 선택하여 공학을 사용하는 것이 유리한 문항과 공학을 사용해야만 해결할 수 있는 문항을 구별한 뒤 학생에게 적절하게 제시할 필요가 있다(손홍찬, 2011b).

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서는 개방형 기하 문제에서 드래깅 활동을 통해 가추법, 귀납법, 연역법을 중심으로 한 학생의 추론 과정을 살펴보았다. 연구 결과를 통해 GSP라는 실험적인 환경에서 발생한 추측이 유클리드 기하의 연역적인 증명으로 이어질 수 있는 방법을 모색해 보고, 학생들이 겪는 인지적 어려움을 통해 GSP를 활용한 수업에서 바람직한 교사의 역할을 논의하고자 하였다.

본 연구를 통해 얻을 수 있는 결론은 다음과 같다.

첫째, 개방형 기하 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 자신의 가설을 도입하기 위해 가추법을 사용하고, 여러 가지 사례를 보고 가설을 일반화하기 위해 귀납법을 사용하며, 가설의 근거를 설명하기 위해 연역법을 사용하였다. 가추법에서 귀납법과 연역법으로 넘어가는 것이 자연스러웠던 Y이외의 다른 학생들도 이러한 단계를 밟아갔으며, 가추법에서 귀납법으로 가는 과정은 GSP 환경에서 비교적 쉽게 진행되었으나 귀납법에서 연역법으로 넘어가는 과정은 순조롭지 못했다. 또한, 학생들은 가추 과정에서 개체 간의 종속 관계를 파악하여 기본 점을 결정하였고 귀납 과정에서 다양한 사례의 규칙성을 경로를 통해 일반화하였으며 연역 과정에서는 가추와 귀납 과정에서 인식된 불변성과 유클리드 기하 이론을 통해 자신의 가설을 입증하였다.

둘째, 임의적 드래깅, 안내된 드래깅, 숨겨진 자취 드래깅은 학생들의 가추 과정에서 가설을 마련하는데 도움이 되었으며 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅을 통해 발견된 사례가 단일하거나 적은 경우 학생들은 불필요한 귀납 과정을 생략하였다. 또한 학생들은 다양한 사례를 발견하는 귀납 과정에서 자신의 가설을 뒷받침할 근거를 찾기 위해 측정도구나 드래깅 검증을 사용하였다. 특히 안내된 드래깅은 가추 과정에서 다양한 사례를 발견하고 예상하는데 사용되었고, 숨겨진 자취 드래깅은 이러한 사례를 시각적으로 확인하는데 유용한 전략이었으며, 귀납 과정에서 드래깅 검증은 안내된 드래깅이나 숨겨진 자취 드래깅을 통해 추측된 사례를 검증하고 일반화하는 역할을 하였다. 이러한 다양한 드래깅

활동은 학생의 가추 과정과 귀납 과정에 도움을 주었으며, 연역 과정으로 넘어가기 위한 발판이 되어 주었다.

셋째, GSP 환경에서 개방형 기하 문제를 해결하는 동안 학생들은 도형을 고정된 것으로 생각하여 다양한 사례를 발견하지 못하거나, 종속 관계나 경로의 개념을 인식하기가 쉽지 않았다. 또한 학생들은 가설의 근거를 설명하는 과정에서 연역적 정당화로 발전시키지 못하고 경험적 정당화 수준에 머물거나, 순환논리에 빠지는 논리적 오류를 범하였다. GSP 환경에서 교사가 학생의 추측이나 주장에 대하여 그 이유를 설명하도록 자극하지 않는다면 학생에 의한 정당화는 실험적 수준에 머물게 될 것이며, 개방형 문제와 같이 문제 상황이나 목표 상황이 열려 있는 경우, 교사가 문제를 제시할 때 전제와 결론에 대한 구분을 소홀히 다룬다면 학생은 문제를 이해하는 과정에서 혼란에 빠질 수 있다. 교사는 GSP 환경이 기존의 지필환경을 대체할 수 있는 것이 아니라 상호 보완할 수 있는 학습 환경이라는 점을 명심하고 컴퓨터가 학생들의 이해와 직관을 대체한다기 보다는 그들의 이해를 증진시키고 직관을 발전시키는 쪽으로 이용해야 한다.

본 연구의 결과 및 분석을 바탕으로 한 교육적 시사점은 다음과 같다.

첫째, 지필 환경과의 차이점을 인지할 수 있는 기회를 충분히 마련해 준다면 학생들은 GSP 환경에서 수학적 탐구를 활발하게 진행할 것이다. 본 연구에서는 특별히 GSP의 역동성 및 개체간의 종속 관계나 경로의 개념을 설명해 주는 수업을 도입했음에도 불구하고 학생들은 여전히 문제 해결 과정에서 기본 점을 선택하거나 흔적 도구를 사용하여 경로를 그리는 활동에 소극적이었으며 아예 드래깅 활동을 중단하고 활동지에서 증명을 하다가 실패하는 경우도 보였다. 따라서 교사는 GSP 환경에 쉽게 적응하고 기술적 어려움을 최소화하여 문제 해결에 집중할 수 있도록 학생들을 도와주기 위해서 체계적인 도입 수업에 충분한 시간을 할애할 필요가 있다.

둘째, GSP 환경 그 자체만으로는 학생들이 개연적 추론에서 연역적 추론으로 나아가는데 결정적인 역할을 하지 못함을 알 수 있다. 특히, 사고의 흐름이 가추 과정이나 귀납 과정에서 연역 과정으로 부드럽게 넘어갔던 Y의 경우, 다른 학생들과 달리 가추 과정에서 최대한 많은 가설들을 도입하고, 귀납 과정에서는 측정 도구에만 의존하지 않고 경로를 이용하여 도형의 성질(근거)을 찾으려는 모습을 볼 수 있었다. 이러한 Y의 활동은 귀납 과정에서 측정 도구에만 의존하던 S나 가추 과정에서 하나의 가설만 고집했던 E와는 달랐다. 따라서 GSP 환경에서 학생의 사고가 개연적 추론인 가추법이나 귀납법에서 연역법까지 이어지기 위해서는 학생의 다양한 드래깅 활동뿐만 아니라, 가추 과정에서 많은 가설을 포용할 수 있는 유연성과 실험적인 수준에서 이론적인 수준으로 도약하기 위한 증명의 필요성을 안내하고 격려하는 교사의 역할이 필요하다.

본 연구는 특정 단원을 체계적으로 다루지 않고 중학교 과정에서 GSP를 이용하여 효과적으로 지도할 수 있는 부분을 선정하였으며 중학교 3학년 영재 학생들을 연구 대상으로 했다는 점에서 한계점이 있다. 그러나 GSP 환경에서 학생의 사고를 살펴보기 위해 드래깅 양상, 경로, 종속 관계 등을 구체적으로 도입하였고, 학생의 드래깅 양상을 추론과 연결시켰으며, 학생의 인지적 어려움을 통해 교사의 역할을 살펴보았다는 점에서 차후 GSP를 활용한 수업에서 교사의 역할이나 과제 제시 및 수학적 추론 연구의 기초자료가 될 수 있겠다.

참고문헌

고상숙·노지연 (2007). 중학교 기하단원의 개방형문제에서 학생의 문제해결과정의 사고 특성에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 10**(3), 303-322.

김남희 (2002). GSP를 활용한 수학수업에서의 추론지도. **교육논총, 17**(1), 17-33.

김민경·허지연·조미경·박윤미 (2002). 초등학교 4학년 학생들의 비구조화된 문제에서 나타난 해결 과정 및 추론 분석. **수학교육, 51**(2), 95-114.

김성도 (1997). 기호와 추론 - 퍼스의 가추법을 중심으로. 한국기호학회 엮음. **삶과 기호**,. 351-379. 서울: 문학과 지성사.

김선희 (2004). **수학적 지식 점유에 관한 기호학적 고찰**. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

김선희·김기연 (2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. **학교수학, 6**(3), 283-299.

김선희·이종희 (2002). 수학적 추론으로서의 가추법. **수학교육학연구, 12**(2), 275-290.

도종훈 (2007). 개방형 문제를 어떻게 만들 것인가?: 두 개의 개방형 문제 제작을 중심으로. **한국학교수학회논문집, 10**(2), 221-235.

류성림 (2001). 기하 수업에서 탐구형 소프트웨어의 활용 방법. **과학수학연구**, 24, 1-20.

류희찬·유공주·조민식 (2000). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색. **수학교육학연구, 10**(1), 139-159.

류희찬, 윤옥교 (2012). 역동적 기하 환경에서 비례를 이용한 이차방정식의 지도. **학교수학, 14**(4), 565-577.

박수정 (2009). **GSP를 이용한 기하문제 해결에서의 정당화 과정**, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

신동선·류희찬 (1998). **수학교육과 컴퓨터**. 서울: 경문사.

손홍찬 (2011a). GSP를 활용한 역동적 기하 환경에서 기하적 성질의 추측. **학교수학, 13**(1), 107-125.

손홍찬 (2011b). 우리나라 수학교육에서 공학 활용의 역사와 현황. **학교수학, 13**(3), 525-542.

연희원 (1998). 퍼스의 상정논법에 관한 연구. **철학연구, 21**(1), 177-213.

우정호 (1998). **학교수학의 교육적 기초**, 서울: 서울대학교 출판부.

조완영 (2000). **탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 34, 66-72.

Baccaglini-Frank, A. (2010). *Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-Generation through maintaining dragging*, Doctoral dissertation, University of New Hampshire, Durham, NH, USA. ISBN: 9781124301969.

Brodie, K., Coetzee, K., & Lauf, L. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer.

Healy, L. (2000). *Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions.* Paper presented at the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-24), Hiroshima, Japan.

Hollebrands, K., Laborde C., & Straesser, R. (2005). Technology and the learning of geometry at the secondary level. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Syntheses, cases, and perspectives.* (Vol 1, pp. 155-205). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(2), 169-187.

Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations – a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(1), 63-86.

Kehle, P. E,. & Lester, F. K. (2003). A semiotic look at modeling behavior from problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.*A semiotic look at modeling behavior.* In R.

Laborde, C. (2005, December). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics (pp. 22-35).

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. International *Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135-157.

Leung, A. (2012). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. www.icme12.org/upload/submission/1961_F.pdf.

Leung, A., Chan, Y. C., & Lopez-Real, F. (2000). Instrumental genesis in dynamic geometry environments. *Learning, 44*, 1-161.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7,* 145-165.

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(6), 665-679.

Maxwell, J. A. (2012). *Qualitative research design: An interactive approach (Vol. 41).* Sage.

Merriam, S. B. (1997). **질적 사례연구법**. (허미화, 역). 서울: 양서원.

Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999). Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment. *British Society for Research into Learning Mathematics, 19*(2), 91-96.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.* 류희찬・조완영・이경화・나귀수・김남균・방정숙(역). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Olivero, F. (2001). Conjecturing in open geometric situations using dynamic geometry: An exploratory classroom experiment. *Research in Mathematics Education, 3*(1), 229-246.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment.* Doctoral Dissertation, University of Bristol, Graduate School of Education, Bristol, UK.

Pehkonen, E. (1997). *Use of open-ended problems* *in mathematics classroom* (Research Report 176). Helsinki, Finland: University of Helsinki.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics.* Prinston University Press.

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 91-119.

Students' Mathematical Reasoning Emerging through Dragging Activities in Open-Ended Geometry Problems

Yang, Eun Kyung (Graduate School, Korea National University of Education)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

In the present study, we analyze the four participating 9th grade students' mathematical reasoning processes in their dragging activities while solving open-ended geometry problems in terms of abduction, induction and deduction. The results of the analysis are as follows. First, the students utilized 'abduction' to adopt their hypotheses, 'induction' to generalize them by examining various cases and 'deduction' to provide warrants for the hypotheses. Secondly, in the abduction process, 'wandering dragging' and 'guided dragging' seemed to help the students formulate their hypotheses, and in the induction process, 'dragging test' was mainly used to confirm the hypotheses. Despite of the emerging mathematical reasoning via their dragging activities, several difficulties were identified in their solving processes such as misunderstanding shapes as fixed figures, not easily recognizing the concept of dependency or path, not smoothly proceeding from probabilistic reasoning to deduction, and trapping into circular logic.

* Key Words : dragging activity (드래깅 활동), mathematical reasoning (수학적 추론), open problems (개방형 문제)

논문접수 : 2013. 12. 27
논문수정 : 2014. 2. 7
심사완료 : 2014. 2. 14

<부록 1> 개방형 기하 문제 (활동지)

학교	학년	이름

<문제 1>

아래의 순서대로 GSP를 이용하여 작도하라.
① 한 점 P를 작도하라.
② 점 P를 지나는 직선 r을 작도하라.
③ 점 P를 지나고 직선 r과 수직인 직선 s를 작도하라.
④ 직선 s 위에 한 점 C를 작도하라.
⑤ 점 P에 대하여 C의 대칭점 A를 작도하라.
⑥ 직선 r은 평면을 두 개로 나눈다. 점 A를 포함한 쪽에 한 점 D를 작도하라.
⑦ 점 D와 P를 지나는 직선 t를 작도하라.
⑧ 중심이 C이고 반지름이 CP인 원 c1을 작도하라.
⑨ 직선 t와 원 c1의 두 번째 교점 B를 작도하라.
⑩ 네 점 A, B, C, D를 연결하여 사각형을 작도하라.
<u>이때, 사각형 ABCD는 어떤 사각형이 되는지 가능한 모든 경우를 추측하고 이를 설명하라.</u> (단, 추측은 “~일 때, 사각형 ABCD는 ~이다.” 형식으로 작성한다.)

1. 추측 1
(1) 어떤 점을 드래깅 할 것인가? 왜 그렇게 생각하는가?

(2) (1)의 점을 드래깅 했을 때, 어떤 사각형이 나타나는가?

(3) (2)의 사각형이 될 때, 필요한 조건은 무엇인가?

(4) 추측(답)을 작성한다. (단, “~일 때, 사각형 ABCD는 ~이다.” 형식의 조건문으로 작성한다.)

(5) (4)의 이유를 설명하라.

2. 추측 2
(1) 어떤 점을 드래깅 할 것인가?

(2) 점을 드래깅 했을 때, 어떤 사각형이 나타나는가?

(3) (2)의 사각형이 될 때, 필요한 조건은 무엇인가?

(4) 추측(답)을 작성한다. (단, “~일 때, 사각형 ABCD는 ~이다.” 형식의 조건문으로 작성한다.)

(5) (4)의 이유를 설명하라.

<문제 2>

아래의 순서대로 GSP를 이용하여 작도하라.
① 세 점 A, M, K를 작도하라.
② 점 M에 대하여 A의 대칭점 B를 작도하라.
③ 점 K에 대하여 A의 대칭점 C를 작도하라.
④ 점 A를 지나고 선분 BC에 평행인 직선 m을 작도하라.
⑤ 점 C를 지나고 직선 m에 수직인 직선 n을 작도하라.
⑥ 두 직선 m과 n의 교점 D를 작도하라.
⑦ 네 점 A, B, C, D를 연결하여 사각형을 작도하라.
이때, 사각형 ABCD는 어떤 사각형이 되는지 가능한 모든 경우를 추측하고 이를 설명하라.
(단, 추측은 "~일 때, 사각형 ABCD는 ~이다." 형식으로 작성한다.)

1. 추측 1

(1) 어떤 점을 드래깅 할 것인가? 왜 그렇게 생각하는가?

(2) (1)의 점을 드래깅 했을 때, 어떤 사각형이 나타나는가?

(3) (2)의 사각형이 될 때, 필요한 조건은 무엇인가?

(4) 추측(답)을 작성한다. (단, "~일 때, 사각형 ABCD는 ~이다." 형식의 조건문으로 작성한다.)

(5) (4)의 이유를 설명하라.

2. 추측 2

(1) 어떤 점을 드래깅 할 것인가?

(2) 점을 드래깅 했을 때, 어떤 사각형이 나타나는가?

(3) (2)의 사각형이 될 때, 필요한 조건은 무엇인가?

(4) 추측(답)을 작성한다. (단, "~일 때, 사각형 ABCD는 ~이다." 형식의 조건문으로 작성한다.)

(5) (4)의 이유를 설명하라.