

위상민감도를 이용한 선형구조물의 레벨셋 기반 형상 최적설계

윤 민 호¹ · 하 승 현² · 김 민 근³ · 조 선 호^{1*}

¹서울대학교 아이소-지오메트릭 최적설계 창의연구단, ²존스홉킨스대학교 토목공학과, ³삼성중공업 풍력발전사업부

Level Set Based Shape Optimization of Linear Structures using Topological Derivatives

Minho Yoon¹, Seung-Hyun Ha², Min-Geun Kim³ and Seonho Cho^{1*}

¹National Creative Research Initiatives(NCRI) Center for Isogeometric Optimal Design, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Korea

²Department of Civil Engineering, Johns Hopkins University, Baltimore, MD 21218, USA

³WTG development team, Samsung Heavy Industries, Gouje, 656-813, Korea

Abstract

Using a level set method and topological derivatives, a topological shape optimization method that is independent of an initial design is developed for linearly elastic structures. In the level set method, the initial domain is kept fixed and its boundary is represented by an implicit moving boundary embedded in the level set function, which facilitates to handle complicated topological shape changes. The "Hamilton-Jacobi(H-J)" equation and computationally robust numerical technique of "up-wind scheme" lead the initial implicit boundary to an optimal one according to the normal velocity field while minimizing the objective function of compliance and satisfying the constraint of allowable volume. Based on the asymptotic regularization concept, the topological derivative is considered as the limit of shape derivative as the radius of hole approaches to zero. The required velocity field to update the H-J equation is determined from the descent direction of Lagrangian derived from optimality conditions. It turns out that the initial holes are not required to get the optimal result since the developed method can create holes whenever and wherever necessary using indicators obtained from the topological derivatives. It is demonstrated that the proper choice of control parameters for nucleation is crucial for efficient optimization process.

Keywords : Shape design optimization, topological derivative, level set method, adjoint sensitivity analysis

1. 서 론

형상 최적설계에서 레벨셋(Level set) 방법은 암시적 이동경계(Implicit moving boundary)를 변화시켜서 고정된 격자에 복잡한 형상을 표현할 수 있는 장점을 가지고 있다. Osher 등(1988)은 평균 곡률에 근거한 자유 경계면의 움직임 방법을 고안하였다. Allaire 등(2004)은 형상 미분과 레벨셋 방법에 근거한 구조 최적화 방법을 제안하였으며, 더 나아가 이러한 레벨셋 기반 형상 최적화 방법은 열전달 문제(Ha *et al.*, 2005; Ahn *et al.*, 2010), 소음 문제(Cho *et al.*, 2006), 기하 비선형을 가지는 탄성구조 문제(Kwak *et*

al., 2005), 비구조격자를 가지는 기하 비선형 기반 탄성구조 문제(Ha *et al.*, 2008), 초탄성 비선형 구조 문제(Kim *et al.*, 2012), 음향 문제(Hashimoto *et al.*, 2013) 등의 분야로 확장 연구되었다. 그러나 레벨셋 기반 형상 최적설계에서는 최적화 과정에서의 구멍 생성이 용이하지 않다는 특징이 있다. 이를 해결하기 위한 다양한 선행 연구들이 진행된 바 있다. Sokolowski 등(1999)은 미소 구멍이 생성되었을 때의 임의의 형상 범함수에 대한 위상 미분을 정의하였으며, C ea 등(2000)은 형상 및 위상 구배를 이용하여 최적화 조건을 유도하였고, Novotny 등(2000)은 유한한 크기의 구멍을 점근적으로 0으로 접근시켜 위상 미분을 정의하였다.

* Corresponding author:

Tel: +82-02-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr
Received July 1 2013; Revised November 29 2013;
Accepted January 28 2014

 2014 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

따라서 본 논문에서는 이러한 위상 미분을 이용하여 초기 형상의 내부 구멍 유무와 관계없이 최적화 중간에서 구멍 생성이 가능한 최적화 연구를 진행하였으며 이에 대한 적절한 해를 구하였다.

2. 레벨셋 기법

Fig. 1과 같이 부드러운 경계 Γ 를 가진 열린 영역을 $\Omega \subset R^d$ 라 하고, 주어진 속도 V_n 에 따라 경계의 수직 방향으로 움직이는 영역의 경계 Γ 를 생각하자. 시간에 따라 이동하는 경계 방정식을 유도하기 위해서 전파하는 경계를 $(d+1)$ 차원 함수 $\Phi(\phi, k)$ 의 0 레벨셋 $\phi(\mathbf{x}, \tau=0)$ 으로 간주하자. 시간 $\tau=0$ 에서 립시츠(Lipschitz) 연속성을 갖는 레벨셋 함수 $\phi(\mathbf{x}, 0)$ 가 존재한다면 Ω_I 에서 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\phi(\mathbf{x}, \tau=0) \begin{cases} +\zeta(\mathbf{x}, \Gamma) & \mathbf{x} \in \Omega \\ = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ -\zeta(\mathbf{x}, \Gamma) & \mathbf{x} \in \Omega_I/\overline{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

여기에서 모든 $\mathbf{x} \in R^d$ 에 대하여 $\zeta(\mathbf{x}, \Gamma)$ 는 점 \mathbf{x} 에서 경계 Γ 까지의 거리이다. Γ_I 는 초기 기준경계이고, Ω_I 는 다음과 같은 가능한 영역 Ω 를 포함하는 초기 기준영역이다.

$$\Omega \subseteq \Omega_I \quad (2)$$

레벨셋 함수 ϕ 를 이용하여 경계 Γ 에 수직인 법선 벡터 \mathbf{n} 은 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (3)$$

곡률 κ 는 \mathbf{n} 의 발산값으로 정의된다.

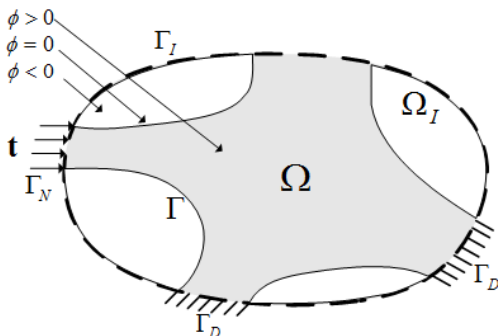


Fig.1 Level set function

$$\kappa = \text{div } \mathbf{n} = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad (4)$$

문제의 단순성을 위해 2차원 레벨셋 함수 ϕ 를 고려하자. 이동경계의 암시적 표현을 위해서 레벨셋 기법을 이용하며, 레벨셋 모델은 3차원 공간에 있는 스칼라 함수 $\phi: R^d \rightarrow R$ 의 등위면으로서 0 레벨에서 암시적 형태로 경계를 묘사한다.

$$S = \{x : \phi(\mathbf{x}, 0) = k\} \quad (5)$$

여기서, k 와 \mathbf{x} 는 각각 임의의 등위값과 등위면 ϕ 에서의 점을 의미한다. 섭동 매개변수 τ 에 관하여 레벨셋 함수에 전미분을 취하면 다음의 "해밀턴-자코비(Hamilton-Jacobi) 방정식"을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{D\phi}{D\tau} &\equiv \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} + \nabla \phi(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=0} \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, 0)}{\partial \tau} + \nabla \phi(\mathbf{x}, 0) \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

V_n 을 경계에 수직인 속도함수라 하고 식 (3)을 이용하면 다음의 식을 얻는다.

$$V_n = \mathbf{V} \mathbf{n} = -\mathbf{V}(\mathbf{x}) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (7)$$

식 (7)을 이용하고 적절한 경계조건을 적용하면 식 (6)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = V_n |\nabla \phi|, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_I} = 0 \quad (8)$$

3. 탄성 문제

영역 Ω 에서 탄성 문제에 대한 평형식을 고려해 보자.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (9)$$

여기서, \mathbf{b} 는 단위 체적력이다. 필수경계조건 및 자연경계조건은 다음과 같이 부과된다.

$$\mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \mathbf{x} \in \Gamma_N \quad (10)$$

또한 변형률-변위식과 구성방정식은 각각 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{z} + \nabla \mathbf{z}^T), \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (11)$$

\mathbf{C} 는 탄성 재료텐서이다. 가상변위 $\bar{\mathbf{z}} \in Z$ 를 이용하면 변분식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{z}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (12)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{z}} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{z}} d\Gamma \equiv \ell(\bar{\mathbf{z}}), \forall \bar{\mathbf{z}} \in Z$$

$$Z = \{\mathbf{z} \in [H^1]^d : \mathbf{z} = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \quad (13)$$

식 (12)의 애조인(adjoint)식을 유도하기 위해 일반 성능함수 $\Psi(\mathbf{z})$ 를 고려하자.

$$\Psi(\mathbf{z}) = \int_{\Omega} F(\mathbf{z}) d\Omega \quad (14)$$

$\bar{\mathbf{z}}$ 방향의 \mathbf{z} 에 대한 Fréchet 미분 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 을 취하면

$$\left\langle \frac{\partial \Psi(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}} \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial F(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \bar{\mathbf{z}} d\Omega \quad (15)$$

식 (13)을 이용하여 라그랑지안(Lagrangian)을 정의하면 다음과 같다.

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \Psi(\mathbf{z}) - a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) + \ell(\boldsymbol{\lambda}), \forall \boldsymbol{\lambda} \in Z \quad (16)$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 는 애조인 해이며, 식 (16)을 Fréchet 미분을 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ 의 방향 \mathbf{z} 에 관해 취하고 정상조건을 이용하면 애조인 식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}), \bar{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle & \quad (17) \\ &= \left\langle \frac{\partial \Psi(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

따라서 애조인 시스템식의 약형은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) & \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} a(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}), \bar{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle \quad (18) \\ &= \left\langle \frac{\partial \Psi(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \right\rangle \equiv \ell(\bar{\boldsymbol{\lambda}}), \forall \bar{\boldsymbol{\lambda}} \in Z \end{aligned}$$

4. 탄성체의 형상 미분

식 (12), (14), (16)을 이용하여 탄성문제의 컴플라이언스(Compliance) 범함수에 대한 라그랑지안을 정의하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{z} d\Gamma \quad (19) \\ &\quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{z}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\lambda}) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma, \forall \mathbf{z} \in Z \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 는 다음 애조인 식의 해이다.

$$a(\boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}} d\Gamma, \forall \bar{\boldsymbol{\lambda}} \in Z \quad (20)$$

또한 섭동된 설계에 대해 라그랑지안을 다음과 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} L_{\tau}(\mathbf{z}_{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_{\tau}) & \quad (21) \\ &= \int_{\Omega_{\tau}} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{z}_{\tau} + \boldsymbol{\lambda}_{\tau}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{z}_{\tau} + \boldsymbol{\lambda}_{\tau}) d\Gamma_{\tau} \\ &\quad - \int_{\Omega_{\tau}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{z}_{\tau}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\lambda}_{\tau}) d\Omega_{\tau}, \forall \boldsymbol{\lambda}_{\tau} \in Z_{\tau} \end{aligned}$$

여기서, $\boldsymbol{\lambda}_{\tau} \equiv \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_{\tau})$ 는 다음의 섭동된 애조인 식의 해이다.

$$a_{\tau}(\boldsymbol{\lambda}_{\tau}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\tau}) = \int_{\Omega_{\tau}} \mathbf{b} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\tau} d\Omega_{\tau} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{\tau} d\Gamma_{\tau} \quad (22)$$

\mathbf{V} 방향으로 식 (21)의 형상 미분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{L}_S(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) & \quad (23) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot [\{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{t} \cdot (\nabla(\mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \mathbf{n})\} \mathbf{V}] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla \cdot [\kappa \{\mathbf{t} \cdot (\mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{z}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\lambda})\} \mathbf{V}] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \{\Pi(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) \mathbf{V}\} d\Omega \end{aligned}$$

5. 평면 탄성체에서의 위상민감도

Fig. 2와 같이 다양한 영역들을 고려해 보자.

섭동된 점 $\mathbf{x}_{\tau} \in \partial\omega_{p+\tau}$ 과 \mathbf{x}_{τ} 와 $\hat{\mathbf{x}} \in \omega_{p+\tau}$ 를 잇는 선 위에 있

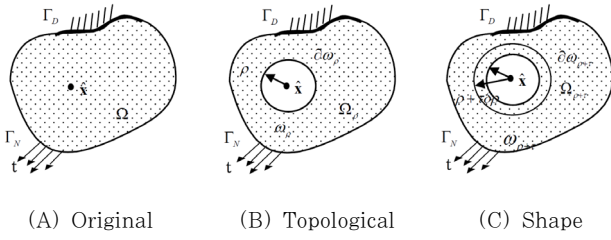


Fig. 2 Various domain variations

는 원래의 점 $\mathbf{x} \in \partial\omega$ 에서는 다음의 관계식이 만족된다.

$$\|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}\| = \|\tau V_n \mathbf{n}\| = \tau \delta\rho \quad (24)$$

구멍이 팽창할 때 $V_n < 0$ 과 $\delta\rho > 0$ 이므로

$$\delta\rho = \|V_n \mathbf{n}\| = -V_n \text{ on } \partial\omega_\rho \quad (25)$$

그리고 다음을 정의할 때

$$|\omega_\rho| = - \int_{\omega_\rho} d\omega_\rho \quad (26)$$

그의 미분값은 다음과 같이 얻어진다.

$$|\omega_\rho|_{,\tau} = - \frac{d}{d\tau} \int_{\omega_{\rho+\tau}} d\omega_{\rho+\tau} \Big|_{\tau=0} = \int_{\partial\omega_\rho} V_n d\omega_\rho \quad (27)$$

만약 원형 영역이 선택되면 식 (26)의 변분은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta|\omega_\rho| = -2\pi\rho\delta\rho = 2\pi\rho V_n \text{ on } \partial\omega_\rho \quad (28)$$

경계 적분항에서 대응되는 형상 미분은 다음과 같다.

$$\dot{L}_s(\mathbf{z}_\rho, \lambda_\rho) = \int_{\partial\omega_\rho} \Pi(\mathbf{z}_\rho, \lambda_\rho) V_n d\Gamma_\rho \quad (29)$$

구멍의 경계만이 선택되므로 설계속도는 다른 경계에서 사라진다. 컴플라이언스에 대한 위상민감도는 다음과 같다.

$$\dot{L}_T(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_\rho|_{,\tau}} \dot{L}_s(\mathbf{z}_\rho, \lambda_\rho), \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega \quad (30)$$

식 (27), (29)를 이용하면 (30)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{L}_T(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\int_{\partial\omega_\rho} V_n d\omega_\rho} \int_{\partial\omega_\rho} \Pi(\mathbf{z}_\rho, \lambda_\rho) V_n d\Gamma_\rho \quad (31)$$

구멍 $\partial\omega_\rho$ 의 경계에서의 표면력은 없으므로 식 (31)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{L}_T(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) \quad (32)$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\int_{\partial\omega_\rho} V_n d\omega_\rho} \left[\int_{\partial\omega_\rho} \mathbf{b}_\rho \cdot (\mathbf{z}_\rho + \lambda_\rho) V_n d\omega_\rho + \int_{\partial\omega_\rho} \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}_\rho) : \boldsymbol{\epsilon}(\lambda_\rho)\} V_n d\omega_\rho \right], \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega$$

점근적인 확장으로 식 (32)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{L}_T(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) - \eta [4\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) : \boldsymbol{\sigma}(\lambda) - \text{tr}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})\text{tr}\boldsymbol{\sigma}(\lambda)] \quad (33)$$

$$\equiv -\Sigma(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}})$$

여기서, 평면 변형 문제에 대해서는

$$\Sigma(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\lambda + 2\mu}{8\mu(\lambda + \mu)} [4\mu\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) : \boldsymbol{\epsilon}(\lambda) + (\lambda + \mu)\text{tr}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}(\lambda)] \quad (34)$$

평면 응력 문제에서는

$$\Sigma(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} [8\mu\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z}) : \boldsymbol{\epsilon}(\lambda) + \frac{2\mu(\lambda - 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{z})\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}(\lambda)] \quad (35)$$

여기서 λ, μ 는 라메이(Lamé)상수이다.

6. 위상 및 형상 최적설계

6.1 최적화 문제의 정식화

위상 및 형상 최적설계의 목적은 주어진 하중에서 시스템의 컴플라이언스를 최소화하는 최적의 레이아웃(Layout)을 찾는 것이다. 최적설계 이전의 영역과 경계를 생각할 때 위상 및 형상 최적설계 문제는 다음과 같이 표현된다.

Minimize

$$\Psi = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{z} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{z} d\Gamma \quad (36)$$

Subject to

$$m = \int_{\Omega} d\Omega \leq M_{\max} \quad (37)$$

여기서, M_{\max} 는 허용 가능한 체적이다. 식 (36)에서의 컴플라이언스의 애조인 형상 미분과 위상민감도는 식 (23)과 식 (33)을 통해 계산할 수 있다. 또한 식 (37)의 형상 미분은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{m}_s = \left. \frac{dm_{\rho+\tau}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} d\Omega \quad (38)$$

그리고 위상 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{m}_T(\hat{\mathbf{x}}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|\omega_{\rho}|} \left. \frac{dm_{\rho+\tau}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 1 \quad (39)$$

설계속도장 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 은 바깥쪽 수직 방향으로 모든 레벨셋의 전과 속도로 정의된다. 설계속도는 허용 가능한 재료량 제약 조건을 만족시키면서 시스템의 컴플라이언스를 줄이는 방향으로 결정되어야 한다. 제약조건을 갖는 최적화 문제에 대한 라그랑지안 함수 Λ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Lambda(\tau, \mu, s) = \Psi + \mu \{m + s^2 - M_{\max}\} \quad (40)$$

여기서, M_{\max} , s , μ 는 각각 허용가능 재료량, 부등호 제약 조건을 등호 제약조건으로 바꾸기 위한 여유변수, 라그랑지 승수이다. 최적설계를 위한 쿤-터커(Kuhn-Tucker) 최적조건은 다음과 같다.

$$\left. \frac{d\Lambda(\tau, \xi, s)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \{ \Pi(\mathbf{z}, \lambda) + \xi \} \mathbf{n} V_n d\Omega = 0 \quad (41)$$

여기서,

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{if } \int_{\Omega} d\Omega < M_{\max} \\ \mu & \text{if } \int_{\Omega} d\Omega \geq M_{\max} \end{cases} \quad (42)$$

6.2 설계속도장의 계산

거리함수 $\phi(\mathbf{x})$ 는 경계에 수직이고, 형상 최적설계에는 법

선 속도만이 영향이 있으므로, 영역변화는 법선속도 $V_n(x)$ 을 통해서 표현된다.

$$\Omega_{\tau} = (\mathbf{I} + \tau \mathbf{V}_n)(\Omega_I) \quad (43)$$

설계속도장의 법선방향으로 테일러 전개를 하여 섭동된 라그랑지안 함수를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Lambda(\Omega_{\tau}) &= \Lambda\{(\mathbf{I} + \tau \mathbf{V}_n)(\Omega_I)\} \\ &= \Lambda(\Omega_I) + \Lambda'(\Omega_I)(\tau \mathbf{V}_n) + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

여기서, 라그랑지안 함수의 설계민감도는 다음과 같다.

$$\Lambda'(\Omega_I) = \int_{\Omega_I} \delta(\phi) \{ \Xi_{\phi}(e, \lambda) + \xi \} \varphi d\Omega \quad (45)$$

경계의 변화를 라그랑지안 함수의 감소방향으로 취하면 설계속도장은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{V}_n = - \{ \Xi_{\phi}(e, \lambda) + \xi \} \varphi \quad (46)$$

그렇다면 식 (45)는 다음과 같이 다시 쓰여질 수 있다.

$$\begin{aligned} \Lambda(\Omega_{\tau}) &= \Lambda(\Omega_I) - \tau \int_{\Omega_I} \delta(\phi) \{ \Xi(e, \lambda) + \xi \}^2 \varphi^2 d\Omega \\ &\quad + \mathcal{O}(\tau^2) + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

따라서 허용 가능한 재료 체적량 요구조건을 만족시키면서 일반화된 컴플라이언스 범함수의 감소가 보장이 된다.

6.3 구멍의 생성기준

위상 민감도를 이용한 레벨셋 기반 최적화 기법은 최적화 도중에 새로운 구멍의 생성이 가능하며 이를 위한 기준은 다음과 같다.

$$\dot{\Lambda}_T(\hat{\mathbf{x}}) = \dot{\Psi}_T(\hat{\mathbf{x}}) + \beta \xi = - \Sigma(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}}) + \beta \xi \quad (48)$$

여기서, $\Sigma(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}})$ 와 새로 생성되는 구멍의 개수를 조정하는 ξ 는 양의 값을 가지며, β 는 최적화 과정의 속도를 높이기 위한 조정 매개변수이다. 식 (48)이 음의 값을 가지게 되면 구멍이 점 $\hat{\mathbf{x}}$ 에서 생성된다.

7. 수치 예제

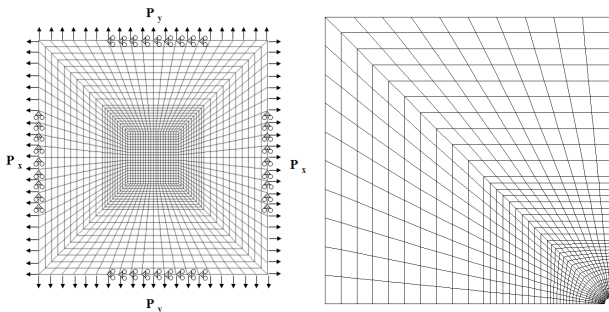
7.1 위상민감도의 검증

이 예제의 목적은 유도된 위상민감도 식을 검증하는 것이며 Fig. 3(A)의 모델은 가로, 세로 2,430mm×2,430mm 이고 두께 10mm, 영률은 2GPa, 포아송 비는 0.3을 갖는 평면응력 문제이다. 구조물은 $P_x = P_y = 2.43 \times 10^7 N$ 의 면내 분포하중을 받고 있으며, Fig. 3(B)는 유한차분 민감도를 얻기 위한 1/4 유공판 모델을 보여주고 있다.

Table 1에서는 개발한 방법론을 통해 컴플라이언스의 해석적 설계민감도를 Fig. 3(B)에 있는 1/4 모델을 이용한 유한차분 민감도와 비교하였다. 행 (a)와 (b)는 각각 해석적 민감도와 유한차분 민감도를 나타낸다. 식 (28)을 이용하여 컴플라이언스 유한차분 민감도는 다음 식을 통해 얻을 수 있다.

$$\dot{\Psi}_T = \frac{\delta \Psi(\Omega)}{\delta |\omega_\rho|} \cong \frac{\Psi(\Omega_\rho) - \Psi(\Omega)}{\delta |\omega_\rho|} \quad (49)$$

구멍의 반지름을 줄여가면서 설계민감도 값을 구하였으며 Table 1 마지막 행에는 해석적 민감도(a)와 유한차분 민감



(A) Full model w/o a hole (B) 1/4 model with a hole
Fig. 3 Validation model

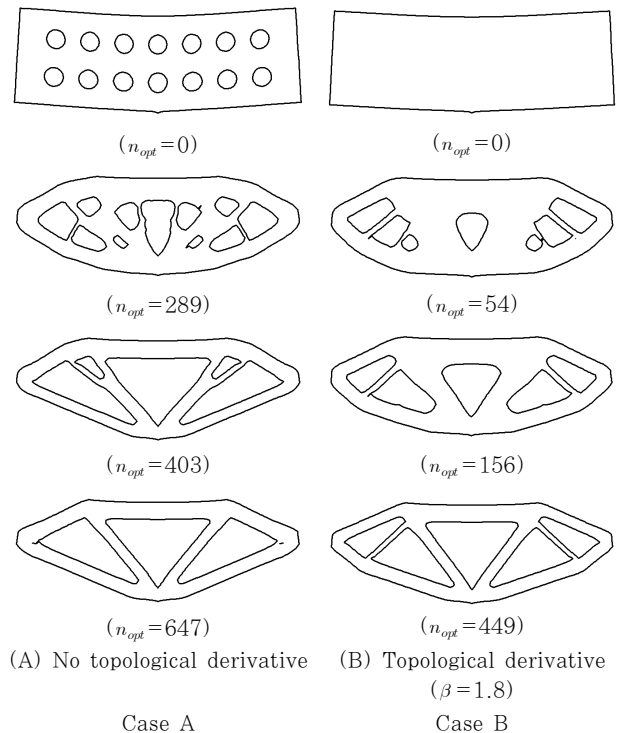
Table 1 Comparison of compliance sensitivity

Radius	Compliance without hole	Compliance with hole	$\Sigma(\mathbf{z}, \lambda)(\hat{\mathbf{x}})$ (a)	Finite Difference Sensitivity (b)	(a)/(b) × 100 (%)
Plane stress case					
1.50	2869.466	3365.570	4650.784	4923.928	94.55
1.20		3305.261		4816.591	96.56
0.95		3138.642		4746.896	97.98
0.70		3013.999		4694.525	99.07
0.50		2942.594		4655.492	99.88
0.30		2895.628		4626.452	100.53
0.10		2872.354		4596.018	101.18
0.02		2869.581		4570.226	101.76

도(b)와의 일치 정도를 제시하였는데 매우 높은 일치성을 보여주고 있음을 알 수 있다. 반지름이 0.5일 때 가장 좋은 결과값을 얻을 수 있었다. 물론, 섭동(Perturbation)량이 0.5 보다 더 작을 때 일반적으로 민감도 일치성이 높아야 되지만 실제 수치계산에서는 컴퓨터 유효자리의 한계로 인하여 정확도가 더 나빠짐을 Table 1을 통해 확인할 수 있다.

7.2 구멍의 생성

위상 및 형상 최적설계의 목적은 주어진 재료 체적량 요구 사항을 만족시키면서 구조물의 컴플라이언스를 최소화하는 최적의 레이아웃을 얻는 것이다. 수치 모델은 양 끝단이 단 순지지된 평판 모델이며 가로, 세로 1,800mm×600mm, 두께는 10mm, 영률은 2GPa, 포아송 비는 0.3을 갖는 평면 응력 문제이다. $F = 1.0 \times 10^7 N$ 의 집중하중이 중앙에 가해지며 예제 7.1에서 검증한 민감도 식을 기반으로 최적화가 진행되었다. Fig. 4(A)는 기존의 레벨셋 기반 최적화 방법론을 통해 얻어진 암시적 경계의 히스토리를 보여주고 있다. 설계영역은 초기 설계 단계에서 충분한 수의 구멍을 가지고 있으며 구멍이 따로 생성되는 기능은 없다(Case A). 괄호 안의 숫자는 반복설계 숫자를 의미한다. Fig. 4(B)는 초기 영역에는 구멍이 없으나 새로운 생성을 위한 위상민감도가 있는 경우의 최적설계 이력을 보여준다(Case B).



(A) No topological derivative (B) Topological derivative ($\beta = 1.8$)
Case A Case B

Fig. 4 Comparison of optimization history

일반적으로 형상 최적설계는 초기 형상에 강하게 좌우되는 국소 최적설계를 제시하므로 Fig. 4와 같이 서로 다른 최적설계를 얻었다. 레벨셋 기반 최적화 기법은 새로운 구멍을 생성할 수 없으므로 Case A의 경우, 내부에 초기 구멍이 없다면 마지막 최적 형상에서 내부에 어떠한 구멍도 포함할 수가 없다. 이에 반해 Case B의 경우, 식 (48)를 이용하여 구멍의 생성이 가능한 최적화가 진행되었으며, 이때 최적화 과정의 속도를 높이기 위한 β 는 1.8이 사용되었다. 일단 위상 변화가 생기게 되면, 즉 구멍이 생성이 되면 연속적인 형상 변화로 인하여 다른 설계 변화가 일어나게 된다. 이에 따라 위상민감도를 이용한 레벨셋 기반 최적화 기법(Case B)이 기존의 레벨셋 기반 최적화 기법(Case A)보다 더욱 빠르게 수렴된 결과를 도출하였다.

8. 결 론

레벨셋 기법과 위상민감도를 이용하여 선형 구조물에 대한 위상 및 형상 최적설계 기법을 개발하였다. 초기 영역에서 암시적 함수에 의해 이동 경계를 표현하였기 때문에 위상과 형상의 변화를 표현하기에 용이하였으며 뿐만 아니라 최적화 과정에서 발생하는 급격한 형상 변화 후에도 재 매개화할 필요성이 없었다. 필수적인 설계민감도는 애초인 설계민감도 해석을 통하여 효율적으로 계산하였다. 점근적인 정규화 개념에 근거하여 구멍의 반지름을 0으로 접근시켜 형상 미분의 극한값으로 하는 위상민감도를 개발하였다. 최적화 과정에서 해밀턴 자코비 방정식에 쓰이는 설계속도장은 라그랑지안 함수의 쿤-터커 최적조건에 의해 구하였다. 개발된 위상 설계민감도 해석 기법의 수치적 검증은 해석적 민감도와 유한 차분 민감도와와의 비교를 통해 수행하였으며 높은 일치성을 확인할 수 있었다. 위상민감도는 설계변수에 대해 매우 비선형적인 특징을 가지고 있으며, 이러한 위상민감도를 통해 최적 설계 도중에 구멍을 생성할 수 있으므로 설계영역에서 초기 구멍이 필수적이지 않음을 확인할 수 있었다. 또한 위상 도함수를 도입한 최적화 과정의 효율성을 반복설계 횟수 n_{opt} 를 통해 검증할 수 있었다.

감사의 글

이 논문은 2008, 2010 년도 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다(R32-2008-000-10161-0, No. 2010-0018282). 저자들은 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- Ahn, S.H., Cho, S. (2010) Level Set Based Topological Shape Optimization of Heat Conduction Problems with Design-dependent Convection Boundary, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, 58(5), pp.304~322.
- Allaire, G., Jouve, F., Toader, A. (2004) Structural Optimization using Sensitivity Analysis and a Level-set Method, *Journal of Computational Physics*, 194, pp.363~393.
- Céa, J., Garreau, S., Guillaume, P., Masmoudi, M. (2000) The Shape and Topological Optimization Connection, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, pp.713~726.
- Cho, S., Ha, S.H., Park, C.Y. (2006) Topological Shape Optimization of Power Flow Problems at High Frequencies using Level Set Approach, *International Journal of Solids and Structures*, 43, pp.172~192.
- Ha, S.H., Cho, S. (2005) Topological Shape Optimization of Heat Conduction Problems using Level Set Method, *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, 48, pp.67~88.
- Ha, S.H., Cho, S. (2008) Level Set Based Topological Shape Optimization of Geometrically Nonlinear Structures using Unstructured Mesh, *Computer and Structures*, 86, pp.1447~1455.
- Hashimoto H., Kim, M.-G., Abe K., Cho, S. (2013) A Level Set Based Shape Optimization Method for Periodic Sound Barriers Composed of Elastic Scatterers, *Journal of Sound and Vibration*, 332, pp.5283~5301.
- Kim, M.-G., Ha, S.H., Cho, S. (2012) Level Set Based Topological Shape Optimization of Hyper-Elastic Nonlinear Structures using Topological Derivatives, *Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 25(6), pp.559~567.
- Kwak, J.H., Cho, S. (2005) Topological Shape Optimization for Geometrically Nonlinear Structures using Level Set Method, *Computers and Structures*, 83, pp.2257~2268.
- Novotny, A.A., Feijóo, R.A., Tarroco, E., Padra, C. (2000) Topological Sensitivity Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, pp.713~726.
- Osher, S., Sethian, J.A. (1988) Front Propagating

with Curvature Dependent Speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi Formulations, *Journal of Computational Physics*, 79, pp.12~49.

Sokolowski, J., Zochowski, A. (1999) On Topol-

ogical Derivative in Shape Optimization, *SIAM Journal of Control and Optimization*, 37, pp.1251~1272.

요 지

레벨셋 기법과 위상민감도를 이용하여 선형 탄성 구조물에 대하여, 초기 설계형상에 의존성이 없는 위상 및 형상 최적설계 기법을 개발하였다. 레벨셋 기법에서는 복잡한 위상 형상변화를 쉽게 다루기 위해 초기 영역은 고정된 채 레벨셋 함수로 표현되는 암시적 이동경계로 경계를 표현한다. 해밀턴-자코비(H-J) 방정식과 수치적으로 강건한 기법인 'up-wind scheme'은 컴플라이언스 목적함수를 최소화시키고 허용체적 제약조건을 만족시키면서, 초기 암시적 경계를 법선 속도장에 따라 최적의 형상으로 이끌어 낸다. 점근적인 정규화 개념에 근거하여, 구멍의 반지름을 0으로 접근시켜 형상 미분의 극한을 취한 위상민감도를 고려하였다. 최적조건으로부터 유도된 라그랑지안의 감소 방향을 이용하여 H-J 방정식을 갱신하기 위한 속도장을 결정하였다. 개발한 방법에서는 위상민감도로부터 얻어지는 지표를 이용하여 구멍을 언제든지 어디에서나 생성가능하기 때문에 초기 구멍이 최적 형상을 얻기 위해 요구되지 않는다는 사실을 확인하였다. 또한 효율적인 최적화 과정을 위해서는 구멍 생성을 위한 조정변수의 적절한 선택이 중요함을 확인하였다.

핵심용어 : 위상 형상 최적화, 위상 도함수, 레벨셋 기법, 애조인 민감도 해석