

## 축비대칭 회전계에서 나타나는 Sommerfeld 현상

신응수<sup>a\*</sup>

## Sommerfeld Phenomena of an Asymmetric Rotor

Shin, Eung-Soo<sup>a\*</sup><sup>a</sup> School of Mechanical Engineering, Chungbuk National University, Republic of Korea

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received	3	January	2014
Revised	10	February	2014
Accepted	10	February	2014

## Keywords:

Sommerfeld phenomena  
Asymmetry  
Critical speed  
Damping  
Non-ideal power  
Passage through resonance

## ABSTRACT

This paper provides a comprehensive study on the Sommerfeld phenomena in an asymmetric rotor with a nonideal power supply. An analytical approach is employed by deriving the equations of motion in a nondimensional form. The system parameters, including the asymmetry, external and internal damping, and motor power, are chosen to find their effects on the characteristics of the Sommerfeld phenomena and critical behavior around resonance. Results show that the rotor asymmetry suppresses the Sommerfeld phenomena and helps pass through resonance if the asymmetry is small. However, it is observed that the opposite effects exist in case of a large asymmetry. It is also found that the effects of external damping on the Sommerfeld phenomena are similar to those of the asymmetry, whereas internal damping has less effects than external damping and the asymmetry. By performing numerical simulations, four types of critical behavior are identified from the viewpoints of the stability and the passage through resonance.

## 1. 서론

최근의 많은 초고속 회전기기들은 임계 속도보다 높은 영역에서 운전되고 있다. 이러한 회전계의 구동원이 충분한 에너지를 공급할 수 있는 이상적인 경우에는 임계 속도를 부드럽게 통과하여 초임계 영역으로 진입할 수 있으나 구동원의 용량이 제한적인 비이상(non-ideal) 시스템에서는 회전계의 기계적인 운동이 임계 영역 부근에서 급격하게 증가함으로 인하여 구동원이 공급하는 에너지가 크게 영향을 받게 된다. 따라서 비이상 회전계에서 발생하는 복잡하고 다양한 형태의 임계 거동에 대해서 많은 연구가 진행되어 왔다<sup>[1]</sup>.

그 중에서 가장 대표적인 임계 거동으로서 Sommerfeld 현상을

들 수 있는데<sup>[2]</sup>, 구동원이 공급하는 에너지가 증가하여도 계의 회전 속도는 임계 속도 부근에서 더 이상 증가하지 않고 계의 기계적인 응답만이 커지다가 어느 순간 갑자기 회전 속도의 급격한 상승과 응답의 급격한 감소가 일어나는 현상이다. 이 외에도 임계 영역을 벗어나지 못하고 공진 대역에서 기계적인 응답의 증가로 인해 발생하는 다양한 형태의 비선형 및 카오스 진동에 관해 많은 연구가 발표된 바 있으며<sup>[3,4]</sup>, 효과적으로 임계 영역을 통과하는 방안에 관한 연구가 수행되어 왔다<sup>[5,6]</sup>.

본 연구에서는 비대칭성이 존재하는 회전계에서 구동원의 제한된 용량으로 인하여 발생하는 Sommerfeld 현상에 관해 분석하고자 한다. 위에서 언급한 선행 연구들은 모두 축대칭 회전계에서 발

\* Corresponding author. Tel.: +82-43-261-3159

Fax: +82-43-263-2448

E-mail address: [esshin@cbnu.ac.kr](mailto:esshin@cbnu.ac.kr) (Shin, Eung-Soo).

생하는 Sommerfeld 현상에 대해 분석을 수행하였다. 하지만 실제 회전계에서는 회전축 및 지지베어링의 이방성, 외부하중의 불균일성 등으로 인하여 축 비대칭이 존재하는 경우가 많이 있다. 본 연구에서는 회전축의 비대칭성을 포함하여 내부 및 외부 감쇠 그리고 구동원의 공급전압이 Sommerfeld 현상과 임계 거동에 미치는 영향에 관하여 분석하고자 한다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 축비대칭의 비이상 회전계

Fig. 1(a)에 나타난 바와 같이 본 연구에서의 회전계는 질량편심이 있는 비대칭 구동축, 로터 및 비이상적 특성을 갖는 구동원인 DC모터로 구성되며 이에 대한 운동방정식을 회전하는  $\xi$ - $\eta$ 좌표계에 대해 나타내면 다음과 같다<sup>[7]</sup>.

$$m\ddot{\xi} + (c_e + c_{i\xi})\dot{\xi} + (k_\xi - m\Omega^2)\xi - 2\Omega m\dot{\eta} - \Omega c_e\eta = me\Omega^2 \cos\lambda \quad (1)$$

$$m\ddot{\eta} + (c_e + c_{i\eta})\dot{\eta} + (k_\eta - m\Omega^2)\eta + 2\Omega m\dot{\xi} + \Omega c_e\xi = me\Omega^2 \sin\lambda \quad (2)$$

여기서  $m$ 은 회전계 질량,  $c_e$ 는 외부감쇠상수,  $c_{i\xi}$ ,  $c_{i\eta}$ 는 비대칭 구동축의  $\xi$ -방향과  $\eta$ -방향에 대한 내부감쇠상수,  $k_\xi$ ,  $k_\eta$ 는 구동축의  $\xi$ -방향과  $\eta$ -방향의 강성,  $\Omega$ 는 회전속도,  $e$ 는 편심반경,  $\lambda$ 는 편심질량의 방향을  $\xi$ 축으로부터 측정된 각이다. 식 (1), (2)를 무차원 파라미터를 사용하여 다시 쓰면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\xi} + 2\omega_o\{\zeta_e + \zeta_i(1+\beta)\}\dot{\xi} - 2\Omega\dot{\eta} + \{\omega_o^2(1+\alpha) - \Omega^2\}\xi - 2\zeta_e\Omega\omega_o\eta = e\Omega^2 \cos\lambda \quad (3)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega_o\{\zeta_e + \zeta_i(1-\beta)\}\dot{\eta} + 2\Omega\dot{\xi} + \{\omega_o^2(1-\alpha) - \Omega^2\}\eta + 2\zeta_e\Omega\omega_o\xi = e\Omega^2 \sin\lambda \quad (4)$$

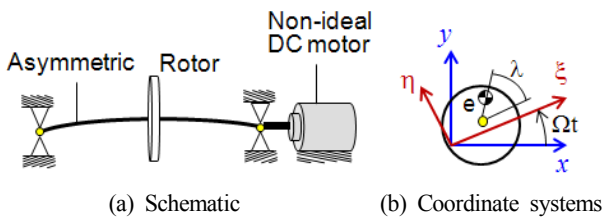


Fig. 1 An asymmetric rotor with a Non-Ideal DC motor

여기서,

$$\alpha \equiv \frac{k_\xi - k_\eta}{k_\xi + k_\eta}, \quad \beta^{[8]} \equiv \frac{c_{i\xi} - c_{i\eta}}{c_{i\xi} + c_{i\eta}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \quad (5)$$

$$k \equiv \frac{k_\xi + k_\eta}{2}, \quad c_i \equiv \frac{c_{i\xi} + c_{i\eta}}{2} \quad (6)$$

$$\omega_o \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta_e \equiv \frac{c_e}{2\sqrt{mk}}, \quad \zeta_i \equiv \frac{c_i}{2\sqrt{mk}} \quad (7)$$

또한 비이상 회전계에서 구동모터와 회전축 사이의 상관관계는 아래와 같다<sup>[2]</sup>.

$$J_m\dot{\Omega} + c_m\Omega = \frac{\kappa_m(V - \kappa_b\Omega)}{R_m} + c_{i\xi}\dot{\xi}\eta - c_{i\eta}\dot{\eta}\xi \quad (8)$$

위 식에서  $J_m$ 은 회전계의 질량관성모멘트,  $c_m$ 은 회전감쇠상수이다. 또한 우변은 모터로부터 공급되는 토크와 회전계의 기계적 응답에 의해 생성되는 토크를 나타낸 것으로  $V$ 는 모터전압,  $\kappa_m$ 은 모터상수,  $\kappa_b$ 는 역기전력상수,  $R_m$ 은 모터저항이다.

### 2.2 비이상 구동특성을 고려한 정상상태 응답

정상상태에서 질량편심에 의한 계의 응답은  $\xi(t) = \xi_o$ ;  $\eta(t) = \eta_o$  이므로 이를 식 (3), (4)에 대입하면 아래와 같이 응답의 크기를 구할 수 있다.

$$A = \sqrt{\xi_o^2 + \eta_o^2} = \frac{e\Omega_N^2\sqrt{B}}{(1 - \Omega_N^2)^2 + (2\zeta_e\Omega_N)^2 - \alpha^2} \quad (9)$$

여기서,

$$\Omega_N \equiv \Omega/\omega_o, \quad B = (1 - \Omega_N^2)^2 + (2\zeta_e\Omega_N)^2 + \alpha^2 - 2\alpha(1 - \Omega_N^2)\cos 2\lambda - 4\alpha\zeta_e\Omega_N\sin 2\lambda \quad (10)$$

비이상 구동계의 경우, 구동모터로부터 공급되는 전기적 에너지 ( $W_m$ )와 계의 응답에 의해 소산되는 기계적 에너지( $W_D$ )는 각각 아래와 같이 주어진다.

$$W_m = \tau_m\Omega = \frac{\kappa_m\omega_o V\Omega_N}{R_m} \left(1 - \frac{\kappa_b\omega_o}{V}\Omega_N\right) \quad (11)$$

$$W_D = c_e(x^2 + y^2) + c_{i\xi}\xi^2 + c_{i\eta}\eta^2 + c_m\Omega^2 \quad (12)$$

$$= 2\omega_o^3 m \Omega_N^2 A^2 (\zeta_e + \zeta_i - \zeta_i \beta \cos 2\phi) + c_m \omega_o^2 \Omega_N^2$$

식 (12)에서  $\phi$ 는  $\xi$ 축으로부터 정의한 응답의 위상각으로서 다음과 같다.

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{(1 - \Omega_N^2 + \alpha) \sin \lambda - 2\zeta_e \Omega_N \cos \lambda}{(1 - \Omega_N^2 - \alpha) \cos \lambda + 2\zeta_e \Omega_N \sin \lambda} \right\} \quad (13)$$

정상상태에서는  $W_D = W_m$  조건이 만족되어야 하므로 식 (12), (13)으로부터 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$2m\omega_o R_m \Omega_N (\zeta_e + \zeta_i - \zeta_i \beta \cos 2\phi) A^2 = \{ \kappa_m V - (\kappa_m \kappa_b + R_m c_m) \omega_o \Omega_N \} \quad (14)$$

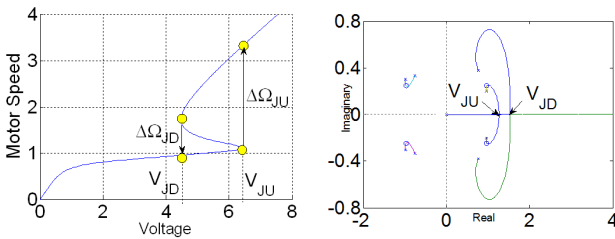
식 (9), (14)로부터  $A$ 를 소거하면  $\Omega_N$ 에 관한 9차의 방정식을 얻을 수 있다.

$$f(\Omega_N) = \sum_{i=0}^9 a_i \Omega_N^i = 0 \quad (15)$$

식 (15)에서 계수  $a_i$ 는 회전축의 감쇠  $\zeta_e, \zeta_i$ , 비대칭성  $\alpha, \beta$ , 편심  $e, \lambda$ , 비이상 구동모터의 공급전압  $V$  등의 함수로 정리할 수 있다 (부록 참조). 따라서 식 (15)를 만족하는  $\Omega_N$ 을 구하고 그 결과를 식 (9)에 대입하면 정상상태의 응답을 결정할 수 있다.

### 2.3 Sommerfeld 현상

식 (15)를 만족하는  $\Omega_N$ 은 복소근의 형태로 총 9개가 존재하는데 이 중에서 (+)의 실수로 주어지는 해가 모터 회전수에 해당한다. 회전축의 감쇠, 비대칭 및 편심에 대한  $\zeta_e, \zeta_i, \alpha, \beta, e, \lambda$ 가 일정한



(a) Non-Ideal power supply vs. motor speed (b) Root locus

Fig. 2 Sommerfeld phenomena

값으로 주어졌을 때 식 (15)을 만족하는 (+)의 실수해  $\Omega_N^{R+}$ 는 공급전압  $V$ 에 의해 결정된다. 즉,  $V$ 값에 따라  $\Omega_N^{R+}$ 의 크기와 개수가 정해진다. 만약 하나의  $V$ 값에 대해 2개 이상의  $\Omega_N^{R+}$ 가 존재한다면 모터 회전수의 급격한 변화가 발생할 수 있으며 이를 Sommerfeld 현상이라 한다. Fig. 2는 식 (15)의 회전계에서 발생하는 Sommerfeld 현상의 전형적인 예다. 즉, 무차원화된 공급전압  $V_N \equiv V/(\kappa_m \omega_o)$ 가  $V_{JD}$ 보다 크고  $V_{JU}$ 보다 작으면 Fig. 2(b)에 나타낸 바와 같이 3개의  $\Omega_N^{R+}$ 가 존재한다. 만약  $V_N$ 이 0에서부터 증가하여  $V_{JU}$ 에 도달하면 모터 회전수는  $\Delta\Omega_{JU}$ 만큼 급격히 상승하고 반대로  $V_N$ 이 점점 감소하여  $V_{JD}$ 에 도달하면 모터 회전수는  $\Delta\Omega_{JD}$ 만큼 급격히 하강한다.

## 3. Sommerfeld 현상의 특성 분석

### 3.1 개요

앞에서 살펴본 바와 같이 Sommerfeld 현상은 회전계의 여러 파라미터의 영향을 받는다. 본 연구에서는 Table 1에 정리한 바와 같은 시스템 상수를 갖는 회전계에 대해 회전축의 비대칭성  $\alpha$ , 외부감쇠  $\zeta_e$  및 내부감쇠  $\zeta_i$ 가 Sommerfeld 현상에 미치는 영향을 분석하였다.

### 3.2 Sommerfeld 현상의 발생에 미치는 영향

Fig. 3은  $\alpha$ 값을 변화시키면서 모터 속도( $\Omega_N$ )과 root선도를 도시한 것이다.  $\alpha$ 값에 따라 실수해의 개수가 달라지며 root선도 상에서 분기가 발생하는 지점에서 모터 속도가 점프하는 Sommerfeld 현상이 나타나며 그 형태에 있어서도 안정적인 점프가 발생하는 Type I과 불안정한 점프가 발생하는 Type II로 나뉜다.

축의 비대칭성뿐 아니라 감쇠도 Sommerfeld 현상에 영향을 미치는데 Fig. 4는 감쇠와 비대칭성의 복합적 영향을 분석한 것이다. Fig. 4(a)를 보면 외부감쇠  $\zeta_e$ 는 Sommerfeld 현상을 억제하는 역

Table 1 System constants of an asymmetric rotor

Constants (symbol)	Value
Rotor mass ( $m$ )	1 kg
Mass eccentricity ( $e$ )	0.002 m
Rotor inertia ( $J_m$ )	0.001 kg-m <sup>2</sup>
Shaft stiffness ( $k$ )	2.25x10 <sup>4</sup> N/m <sup>2</sup>
Motor constant ( $\kappa_m$ )	0.3 Nm/A
Motor back-emf ( $\kappa_b$ )	0.3 Nm/A
Motor resistance ( $R_m$ )	200 ohm
Motor damping ( $C_m$ )	2x10 <sup>-5</sup> Nm-s/rad

할을 하는 반면 축비대칭성  $\alpha$ 는 0.3보다 작은 경우에는 Sommerfeld 현상을 억제하는 경향이 있으나 0.3보다 큰 경우에는 반대로 촉진하는 경향이 있다. 또한 Sommerfeld 현상이 발생하는 경우  $\alpha$ 가 클수록 Type II가 되며 대략  $\zeta_e$ 과  $\alpha$ 의 증가율에 의해 Type I과의 경계가 결정된다. 반면 내부감쇠  $\zeta_i$ 는 외부감쇠에 비해 Sommerfeld 현상의 발생이나 유형에 미치는 영향이 크지 않다. Fig. 4(b)를 보면  $\zeta_i$ 가 작은 경우에는  $\alpha$ 와 복합적으로 Sommerfeld 현상의 발생에 영향을 미치지만  $\zeta_i$ 가 커지면 거의 영향이 없다.

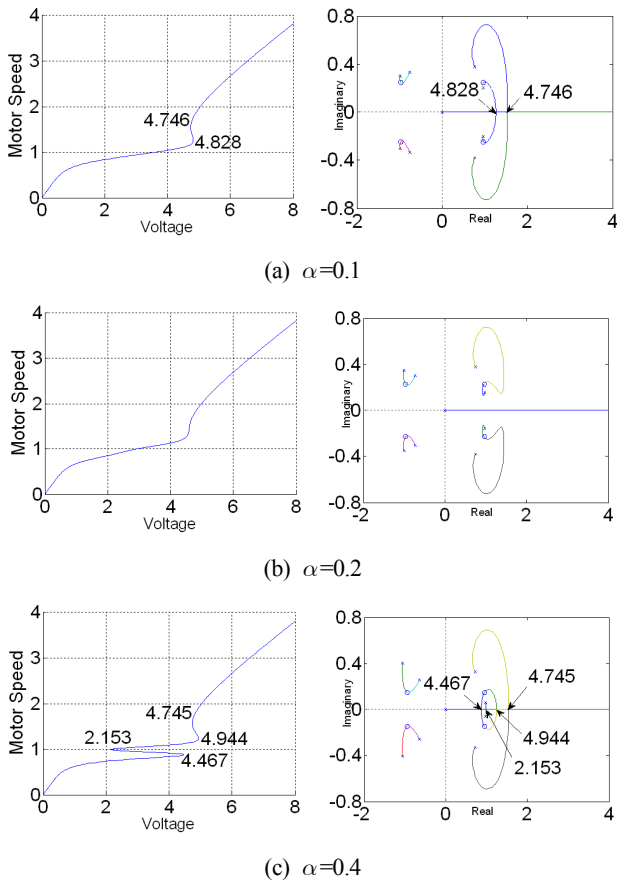


Fig. 3 Effects of asymmetry on the outbreak of sommerfeld phenomena ( $\zeta_e = 0.25, \zeta_i = 0.1$ )

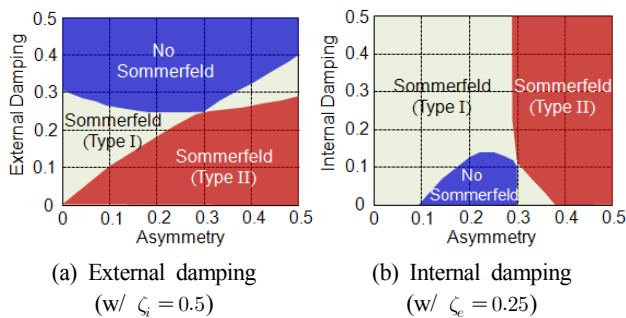


Fig. 4 Combined effects of the asymmetry and damping on sommerfeld phenomena

### 3.3 Sommerfeld 현상의 특성에 미치는 영향

축의 비대칭성은 Sommerfeld 현상이 발생할 때의 모터 전압, 모터 속도의 변화폭, 계의 응답 크기에 영향을 준다. Fig. 5는 모터 전압  $V_{JU}$ , 속도 상승폭  $\Delta\Omega_{JU}$ 와 비대칭성  $\alpha$ 의 관계를 보여주는 것으로서 Fig. 5(a)는  $\zeta_e$ 를 0.12, 0.16, 0.24로 변화시킨 경우이고 Fig. 5(b)는  $\zeta_i$ 를 0.08, 0.16, 0.32로 변화시킨 경우이다. Fig. 5(a)를 보면 모든  $\zeta_e$ 에 대해  $\alpha$ 가 크지 않은 범위에서는  $\alpha$ 가 증가할수록  $V_{JU}$ 와  $\Delta\Omega_{JU}$ 가 감소함을 알 수 있는데 이는 적은 구동 에너지로 임계 영역을 벗어날 수 있으며 모터 속도의 상승폭도 줄어들므로 보다 부드럽게 초임계 영역으로 진입할 수 있음을 의미한다. 반면에  $\alpha$ 가 어느 수준 이상의 큰 영역에서는  $\alpha$ 가 증가할수록  $V_{JU}$ 와  $\Delta\Omega_{JU}$ 도 증가하며 따라서 임계 영역을 벗어나기 위해서 더 많은 구동 에너지가 필요하다. 또한 Fig. 5(a)로부터  $\zeta_e$ 의 변화에 대해  $V_{JU}$  및  $\Delta\Omega_{JU}$ 가 큰 폭으로 바뀌는 것을 알 수 있으며 이는  $\zeta_e$ 가 임계 거동에 미치는 영향도 매우 크다는 것을 의미한다.

$\alpha$ 와  $\zeta_i$ 의 복합적인 영향을 나타낸 Fig. 5(b)도 Fig. 5(a)와 유사한 패턴을 보이는데  $\zeta_i$ 가 작을수록 적은 구동 에너지로 임계 영역을 벗어날 수 있다. 다만  $\zeta_i$ 가  $\Delta\Omega_{JU}$ 에 미치는 영향은  $\zeta_e$ 에 비해 매우 작다.

Fig. 6은  $\alpha, \zeta_e, \zeta_i$ 를 변화시키면서 무차원화된 계의 응답  $A_N$  ( $\equiv A/e$ )를 Sommerfeld 현상의 발생 직전과 직후에 구한 결과이다. 우선  $\alpha$ 와  $\zeta_e$ 의 복합적 영향을 나타낸 Fig. 6(a)를 보면 Sommerfeld 현상이 발생하기 전에는 Fig. 5(a)와 유사한 패턴을 보이지만 모터 속도가  $\Delta\Omega_{JU}$ 만큼 점프한 직후에는 상반되는 패턴을 보이는 것을 알 수 있다. 한편,  $\alpha$ 와  $\zeta_i$ 의 영향을 복합적으로

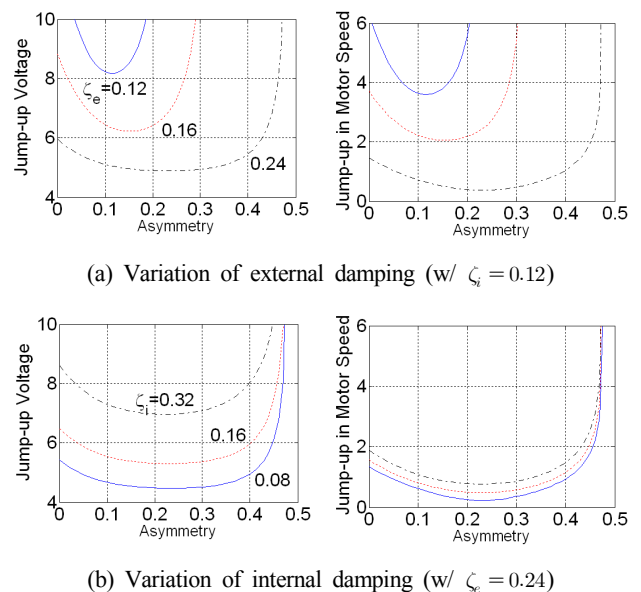
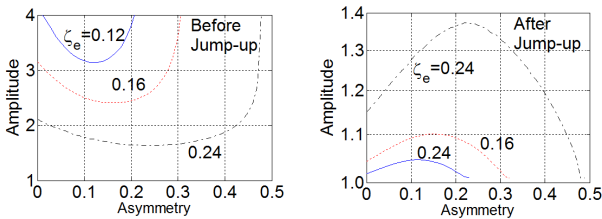


Fig. 5 Effects of asymmetry on Jump-up characteristics

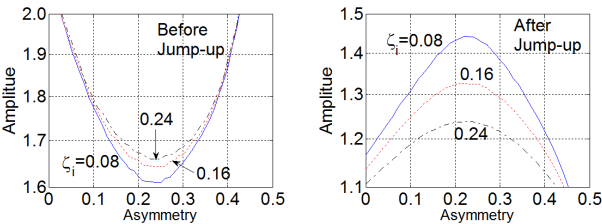
고려한 Fig. 6(b)를 보면  $\alpha$ 가 미치는 영향은 Fig. 6(a)의 경우와 유사하지만  $\zeta_i$ 의 영향은 상대적으로 미미하다.

한편 Fig. 7은  $\zeta_e$  및  $\zeta_i$ 가 Sommerfeld 현상에 미치는 영향을  $\alpha$ 가 0.08, 0.16, 0.32인 경우에 대해 나타낸 것으로 모든  $\alpha$ 에 대해  $\zeta_e$ 가 증가하면  $V_{JD}$ 는 감소하다가 “O”로 표시된 영역에서 Sommerfeld 현상이 사라지게 된다. 여기서의 모터 전압은 Fig. 3(b)와 같이 모터 속도의 불연속적인 점프는 아니지만 상승 비율이 크게 증가하기 시작하는 모터 전압을 나타낸 것이다. 따라서  $\zeta_e$ 의 영향을 종합해보면 모든  $\alpha$ 에 대해  $\zeta_e \approx 0.25$ 에 도달할 때까지는  $\zeta_e$ 가 증가할수록 적은 구동 에너지로 공진 대역을 통과할 수 있지만  $\zeta_e$ 가 0.25보다 더 큰 경우에는  $\zeta_e$ 의 증가가 오히려 공진 대역의 통과를 어렵게 만든다. 반면  $\zeta_i$ 의 경우는 Fig. 7(b)에 보이는 바와 같이 모든  $\alpha$ 에 대해  $\zeta_i$ 가 작을수록 임계 거동을 개선할 수 있다.

Fig. 8은 모터 전압  $V_{JD}$ 와 속도 하강폭  $\Delta\Omega_{JD}$ 를 비대칭성  $\alpha$ 의 변화에 대해 도시한 것이다. Fig. 5의 경우와 달리  $\alpha$ 와  $\zeta_e$ 가  $V_{JD}$ 와  $\Delta\Omega_{JD}$ 에 미치는 영향은 거의 없으며  $\zeta_i$ 의 경우도  $\Delta\Omega_{JD}$ 에는 거의 영향이 없지만  $V_{JD}$ 에는 적지않은 영향을 미친다.

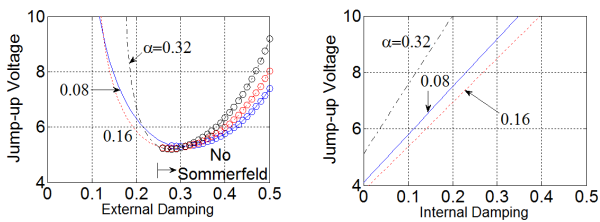


(a) Variation of external damping (w/  $\zeta_i = 0.12$ )



(b) Variation of internal damping (w/  $\zeta_e = 0.24$ )

Fig. 6 Effects of asymmetry on the response amplitude



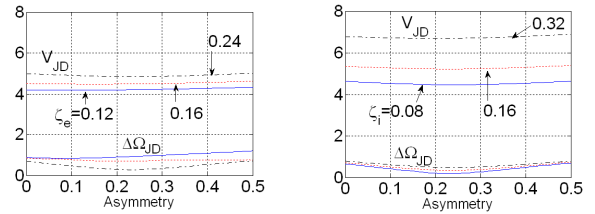
(a) External damping (w/  $\zeta_i = 0.16$ )

(b) Internal damping (w/  $\zeta_e = 0.18$ )

Fig. 7 Effects of damping on Jump-up characteristics

### 3.4 결과 고찰

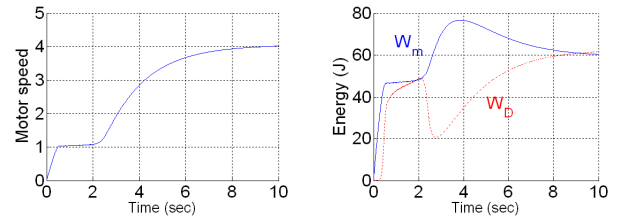
앞절에서 살펴본 Sommerfel 현상의 특성을 검증하기 위해 식 (3), (4), (8)의 지배방정식에 대해 수치 적분을 수행하고 그 결과를 비교하였다. Fig. 9는 수치 적분으로 구한 모터 속도  $\Omega_N$ 과 회전계의 입출력 에너지  $W_m$  및  $W_D$ 를 시간에 대해 도시한 예로서 Fig.



(a) Variation of external damping (w/  $\zeta_i = 0.12$ )

(b) Variation of internal damping (w/  $\zeta_e = 0.24$ )

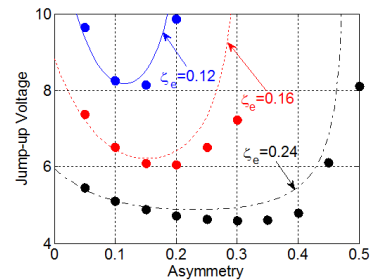
Fig. 8 Effects of asymmetry on Jump-down characteristics



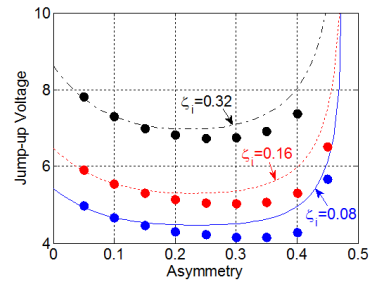
(a) Motor speed

(b) Energy balance

Fig. 9 Time histories of a sommerfeld phenomenon (typical example)



(a) Variation of external damping (w/  $\zeta_i = 0.12$ )



(b) Variation of internal damping (w/  $\zeta_e = 0.24$ )

Fig. 10 Comparison of the Jump-up voltage between the analytical and numerical methods

9(a)와 같이 모터 속도의 점프가 일어나는 모터 전압  $V_{JV}$ 를 찾을 수 있다. Fig. 10은 해석적으로 구한 Fig. 5의  $V_{JV}$ 를 수치 적분으로 찾은  $V_{JV}$ (“●”로 표시)와 비교하여 나타낸 것이다. 그 결과를 보면 모든  $\zeta_e$ 와  $\zeta_i$ 에 대해 대체적으로 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 다만 비대칭성  $\alpha$ 에 대해서 보면  $\alpha$ 가 증가할수록 차이가 발생하는데 그 이유를 살펴보면 식 (15)로부터 구한 해석적인  $V_{JV}$ 는 정상 상태에서의 강제진동 응답만을 고려하였기 때문에  $\alpha$ 가 커지면서 자유진동 상태에서 발생하는 선회 운동의 크기가 증가하는 영역에서는 이를 고려하여 구한 수치 적분의 결과와 차이가 발생하는 것으로 보인다.

### 4. 임계거동의 특성 분석

#### 4.1 축비대칭 회전계의 안정성

식 (3), (4)의 운동방정식으로 정의되는 축비대칭 회전계의 안정성은 아래의 특성방정식으로부터 결정할 수 있다<sup>[7,8]</sup>.

$$s^4_R + 4s^3_R(\zeta_e + \zeta_i) + 2s^2_R\{1 + \Omega_R^2 + 2(\zeta_e + \zeta_i)^2 - 2\beta\zeta_i^2\} + 4s_R\{\zeta_e(1 + \Omega_R^2) + \zeta_i(1 - \Omega_R^2 - \alpha\beta)\} + (1 - \Omega_R^2)^2 - \alpha^2 + 4\Omega_R^2\zeta_e^2 = 0 \tag{16}$$

Fig. 11은 식 (16)의 해의 실수부 부호에 따라 구한 계의 안정성을 비대칭성과 모터 속도에 대해서 도시한 결과이다. Fig. 11을 보면 모터 속도  $\Omega_N \approx 1$ 에 근접했을 때 주공진에 의해 발생하는 불안정 영역이 존재한다. 주공진에 의한 불안정은 회전축의 비대칭성  $\alpha$ 의 영향을 받지만 초임계 속도에서의 불안정 영역은  $\alpha$ 와는 거의 관련이 없으며  $\zeta_e$ 와  $\zeta_i$ 에 의해 결정된다<sup>[7]</sup>. 비이상 회전계에서 나타나는 Sommerfeld 현상은 공진 대역의 부근에서 발생하는 임계 거동으로서 그 특성이 계의 안정성과 밀접한 관련이 있다. 여기서는 수치 적분을 적용하여 그 특성을 분석하였다.

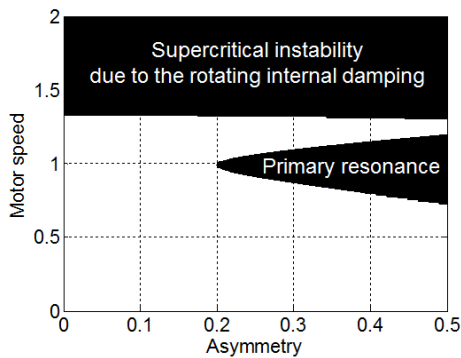


Fig. 11 Stability diagram (w/  $\zeta_e = 0.1, \zeta_i = 0.3$ )

#### 4.2 비이상 구동특성이 임계 거동에 미치는 영향

Fig. 12는 식 (3),(4),(8)로부터 외부감쇠( $\zeta_e=0.24$ )와 내부감쇠( $\zeta_i=0.04$ )가 주어진 상태에서 모터 전압  $V_N$ 과 비대칭성  $\alpha$ 를 변화시키면서 임계 영역에서 나타나는 현상을 4개의 유형으로 구분하여 나타낸 것이고 Table 2는 각 유형의 특성을 요약하여 정리한 것이다. 유형 I은 구동 에너지가 너무 낮아서 모터 속도가 임계 속도에 도달하지 못하며 회전계의 기계적인 응답이 안정한 수준 이내에서 유지되는 영역이다. 유형 II는 모터 속도는 공진 대역에 도달했으나 구동 에너지가 공진 대역을 벗어나기에는 충분하지 않기 때문에 회전 속도의 증가는 없이 계의 기계적인 응답만이 증가하여 불안정해지는 영역이다. 유형 III은 구동 에너지가 충분히 공급되어 모터 속도가 임계 영역을 벗어나서 안정적으로 초임계 상태에 도달하는 영역이며 유형 IV는 초임계 상태에 도달한 이후에 추가적인 구동 에너지가 공급되어 모터 속도가 계속적으로 증가하다가 회전하는 내부 감쇠에 의해 계의 응답이 불안정해지는 영역이다.

Fig. 13은 Fig. 12에서 비대칭성  $\alpha$ 가 0.48일 때 모터 전압  $V_N$ 을 변화시키면서 구한 모터 속도  $\Omega_N$ 과 응답  $A_N$ 의 궤적을 나타낸 것이다.  $V_N=2$ 인 Fig. 13(a)는  $\Omega_N \approx 0.72 < 1$ 로 임계 속도 이하이고 응답의 궤적이 증가하지 않는 유형 I에 속한다.  $V_N=6$ 인 Fig. 13(b)는  $\Omega_N \approx 1$  부근에서 공진 대역을 통과하지 못하고 계의 응답만 크게 증가하는 불안정 유형 II에 해당한다. 구동 전압이 더 증가하여  $V_N=6.3$ 인 Fig. 13(c)에서는 Sommerfeld 현상이 발생하여 모터속도가  $\Omega_N \approx 1 \rightarrow 3.5$ 로 점프하고 계의 응답 크기는  $A \approx 0.01 \rightarrow 0.0025$ 로 급격하게 감소한다. Fig. 13(d)는 구동 에너지

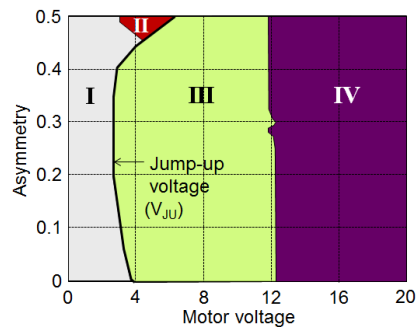


Fig. 12 Critical behavior around resonance (w/  $\zeta_e = 0.24, \zeta_i = 0.04$ )

Table 2 Classification of critical behavior

Type	Stability	Passage through resonance
I	Yes	No
II	No	No
III	Yes	Yes
IV	No	Yes

지가 충분하여 부드럽게 임계 영역을 통과하여 초임계 영역으로 진입하는 예로서 유형 III에 해당한다.

모터 속도가 임계 속도를 통과한 상태에서도 추가적으로 구동 에너지가 공급되면 Fig. 13(e)에 보이는 바와 같이 유형 IV에 해당

하는데  $\Omega_N$ 은 식 (15)에 의해 주어지는  $\Omega_N^A$ 에 순간적으로 도달하지만 불안정하기 때문에 큰 폭으로 변동하다가 최종적으로는  $1 + \zeta_e / \zeta_i \approx 7$ 인 안정 경계선에 도달하게 된다<sup>[7]</sup>. 이 경우 응답의 궤적을 보면 크기와 형태에 있어 유형 I, II, III의 경우와 비교하여 뚜렷한 차이를 보인다.

### 5. 결론

본 연구에서는 회전축의 비대칭성을 갖는 비이상 회전계에서 발생하는 Sommerfeld 현상과 임계 거동을 분석하였다. 무차원화된 운동방정식과 에너지 평형에 근거한 해석적인 방법을 적용하여 축의 비대칭성과 내부 및 외부 감쇠, 구동원의 공급전압이 계의 특성에 미치는 영향을 분석하였다.

비대칭성이 크지 않은 경우에 비대칭성은 Sommerfeld 현상의 발생을 억제하는 경향이 있으며 공진대역의 효과적 통과를 촉진하는 역할이 있으나 반면에 비대칭성이 큰 경우에는 반대의 영향을 미친다. 외부 감쇠는 Sommerfeld 현상의 발생을 억제하는 역할이 있는 반면에 임계 거동에 관해서는 외부 감쇠가 크지 않으면 공진대역의 통과를 촉진하지만 큰 경우에는 오히려 억제하는 경향이 있다. 한편 내부 감쇠의 경우 클수록 Sommerfeld 현상의 발생을 촉진하고 임계 거동을 불안정하게 하는 경향이 있으나 외부 감쇠 및 축의 비대칭성에 비해 크지 않으며 미치는 영향은 작다.

해석적인 방법으로 분석한 Sommerfeld 현상과 임계 거동의 특성은 운동방정식을 수치 적분하여 구한 결과와 잘 일치하였다. 다만 축의 비대칭성이 큰 경우, 정상상태에서의 에너지 평형에 근거한 해석적인 방법에서는 과도적인 자유 선회운동의 영향을 고려하지 않았기 때문에 수치 적분에 의한 검증 결과, 특성 분석에 차이가 있음을 확인하였다.

### 부 록

식 (15)의 계수는 아래와 같이 주어진다.

$$a_0 = \kappa_m (1 - \alpha^2) V$$

$$a_1 = -(1 - \alpha^2) (\kappa_m \kappa_b + R_m c_m) \omega_o$$

$$a_2 = -4 \kappa_m (1 - 2 \zeta_e^2) (1 - \alpha^2) V$$

$$a_3 = 4 (1 - 2 \zeta_e^2) (1 - \alpha^2) (\kappa_m \kappa_b + R_m c_m) \omega_o$$

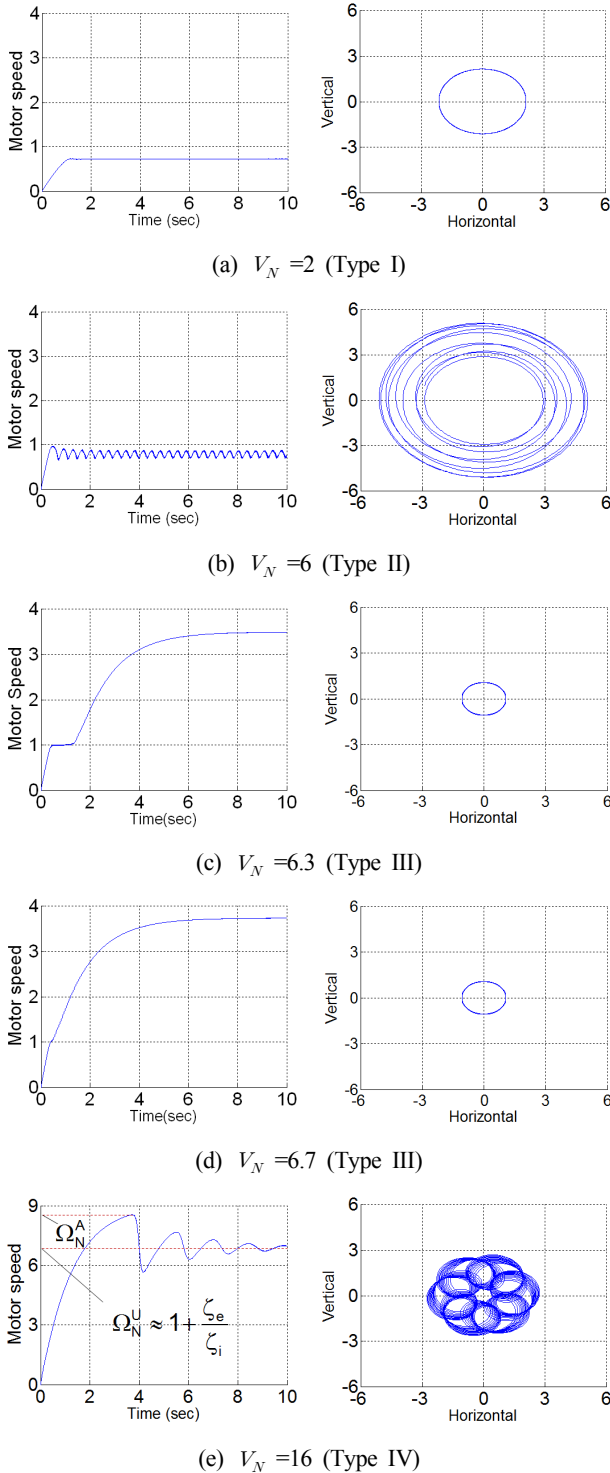


Fig. 13 Motor speeds and trajectories vs. motor voltage (w/  $\zeta_e = 0.24, \zeta_i = 0.04, \alpha = 0.48$ )

$$a_4 = \kappa_m V \{4(1-2\zeta_e^2) + 2(1-\alpha^2)\}$$

$$a_5 = -\omega_o (\kappa_m \kappa_b + R_m c_m) \{4(1-2\zeta_e^2) + 2(1-\alpha^2)\} \\ - 2m\omega_o^2 R_m e^2 \zeta_{ei\phi} (\alpha^2 - 2\alpha \cos 2\lambda + 1)$$

$$a_6 = 8m\omega_o^2 R_m e^2 \alpha \zeta_e \zeta_{ei\phi} \sin 2\lambda - 4\kappa_m V (1-2\zeta_e^2)$$

$$a_7 = 4m\omega_o^2 R_m e^2 \zeta_{ei\phi} (1-2\zeta_e^2 - \alpha \cos 2\lambda) \\ + 4\omega_o (\kappa_m \kappa_b + R_m c_m) (1-2\zeta_e^2)$$

$$a_8 = \kappa_m V$$

$$a_9 = -2m\omega_o^2 R_m e^2 \zeta_{ei\phi} - \omega_o (\kappa_m \kappa_b + R_m c_m)$$

여기서,

$$\zeta_{ei\phi} = \zeta_e + \zeta_i (1 - \beta \cos 2\phi)$$

## References

- [1] Cveticanin, L., 2010, Dynamics of the non-ideal mechanical systems: A review, J. of the Serbian Society for Computational Mechanics 4:2 75-86.
- [2] Samantaray, A. K., Dasgupta S. S., Bhattachayya, R., 2010, Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems, Int. J. of Engineering Sci. 48 21-36.
- [3] Tsuchida, M., Guilherme, K. L., Balthazar, J. M., 2005, On chaotic vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom: 1:2 resonance and Sommerfeld effect, J. of Sound and Vib. 282 1201-1207.
- [4] Verichev, N. N., 2012, Chaotic torsional vibration of imbalanced shaft driven by a limited power supply, J. of Sound and Vib. 331 384-393.
- [5] Balthazar, J. M., Cheshankov, B. I., Ruschev, D. T., Barbanti, L., Weber, H. I., 2001, Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degrees of freedom, J. of Sound and Vib. 239:5 1075-1085.
- [6] Fradkov, A., Tomchina, O., Tomchin, D., 2011, Controlled passage through resonance in mechanical systems, J. of Sound and Vib. 330 1065-1073.
- [7] Genta, G., 2005, Dynamics of rotating systems, Springer, New York.
- [8] Shin, E. S., 2013, Stability Analysis of an Asymmetric Shaft with Internal Damping, J. of KSMTE 22:1 8-14.