韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.1.93
2014. 02. 제 53권, 제 1호, 93-110.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2014, Vol. 53, No. 1, 93-110.

대수 증명에서 종속적 일반성의 인식 및 특정수 전이에 관한 연구

강정기(창원남산중학교)†
장혜원(서울교육대학교)

Ⅰ. 서론

수학적 정리와 그 증명은 일반성을 전제로 한다. Mason(2002)은 정리를 의미하는 영어 theorem의 어원인 그리스어 theorein의 뜻이 '보다'임을 언급하면서 정리를 '보여지는 무언가'로, 그에 대한 증명을 '네가 보는 것을 다른 사람이 볼 수 있도록 하는 것'으로 설명할 수 있다고 하였다. 그렇다면 정리를 창안한 수학자가 본 '무언가'는 무엇인가? 그 무언가는 다른 사람에게는 잘 보이지 않을 수 있기 때문에 볼 수 있도록 이끌어야 할 정도의 것이다. 어떤 성질이 특수한 경우에 성립됨을 인식하기는 쉽더라도 그것이 모든 대상에 대해 성립한다는 일반성을 지닌다는 사실을 찾아내고 설명하는 것은 그리 쉬운 일이 아닐 것이다. 그렇다면 위에서 말한 무언가는 일반성이고, 그 일반성을 다른 사람이 알 수 있도록 설명하는 것을 증명이라 할 수 있다.

일반성은 수학의 핵심이다. 특수한 상황이나 질문을 다루기도 하지만, 그때조차도 함의된 일반성을 전제해야 의미 있는 경우가 많다(Mason, 1996). 예를 들어, 초등수학에서 다루어지는 수 배열에서의 규칙 찾기를 보자. 삼각수 1, 3, 6, 10, …의 앞의 서너 개를 점 배열 그림과 함께 열거하고 열 번째 수를 찾는 문제는 제시된 수열로부터 규칙을 찾아 열 번째 나오는 특정수를 찾을 것을 요구하는 활동이다. 그러나 이 활동은 열 번째인 특정수에 초점이 있는 것이 아니라, 규칙을 일반화된 식으로 나타내지는 않을지라도 발견한 규칙을 적용함으로써 어떠한 n에 대해서도 n번째 수를 찾을 수 있기를 기대하는 일반성이 함의되어 있다.

실제로 모든 학문은 일반성을 표현하는 것과 관련되며, 차이가 있다면 그 일반성이 무엇에 관한 것인지, 그리고 일반성이 정당화되는 방법에만 있다(Mason, 1996) 고 했듯이, 일반성에 대한 인식은 수학 영역에 따라 다소 차이가 주목되기도 한다. 주어진 $\triangle ABC$에서 $\angle A$와 임의의 $\triangle ABC$에서 $\angle A$처럼 도형의 특정 대상과 개념이 동일하게 표현된다는 이중성 때문에 전자의 특수성과 후자의 일반성을 인식하고 구분하는 것이 어려운 기하에 비해, 대수 영역에서는 문자 변수 덕분에 정리 및 그에 대한 증명의 일반성 인식이 상대적으로 쉬운 것으로 간주된다(장혜원, 강정기, 2013). 또한 대수는 일반화된 산술이라 여겨질 정도로 수 체계의 일반적인 성질에 대한 인식, 사용, 조작, 증명 등을 주요 활동으로 삼기 때문에 일반성이 특히 강조되는 영역이라 할 수 있다.

그러나 실제 수업에서 드러나는 학생 활동을 관찰해 보면 대수에서의 정리 증명 역시 그 일반성을 인식하는 것이 그리 쉬운 일은 아님을 발견할 수 있다. 대수적 기호가 일반화의 최우선 목표는 아니지만 일반화에서 확고한 역할을 하며(Radford, 1996) 학교 수학에서 대수 정리를 증명할 때 다가이름으로서의 변수가 큰 역할을 담당하고 있지만, 학생들이 그 의미와 역할을 잘 인식하고 적용하기란 쉬운 일이 아니다.

Mason & Pimm(1984)에서의 예를 보자. '임의의 두 짝수의 합은 짝수'라는 정리에 대한 증명이 요구될 때 대수적 표현을 처음 다루는 학생들은 종종 '$2n$을 임의의 짝수라 할 때 $2n+2n=4n$으로 짝수이다'와 같은 오류를 범한다. 임의의 짝수는 $2n$이라고 표현되며 따라서 임의의 두 짝수의 합을 $2n+2n$이라고 하는 것은 합

* 접수일(2013년 10월 21일), 수정일(2013년 11월 10일), 게재확정일(2014년 02월 12일)
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 대수 증명, 일반성(종속/독립), 변수, 일반적 증명의 특정수 전이
† 교신저자

리적인 것처럼 보이지만, 임의의 두 짝수를 나타내야 하는데 동일한 문자를 사용함으로써 특정 짝수를 두 번 사용하고 있다는 것이 문제이다. 이것은 문자를 사용하여 임의의 수를 나타내는 요인과 더불어 대수 변수의 임의성을 이해하는 것이 학생의 관점에서 인지적 요구도가 높은 과제임을 보여준다.

임의의 두 짝수의 합이 짝수라는 정리를 증명하는 과정에서 요구되는 올바른 표현인 $2m+2n=2(m+n)$과 이 증명 과정에서 학생들이 흔히 범하는 오류인 $2n+2n=4n$의 두 식을 수학적 관점에서 보면, 전자는 임의의 '두' 짝수를 다루지만 후자는 '동일한' 짝수를 두 번 더한다는 차이가 있다. 양자에서 사용된 변수 m과 n, 그리고 n은 자연수 범위에서 변함으로써 변수로 표현된 짝수의 임의성을 보장하며, 나아가 정리의 일반성을 확인시켜준다. 다만 전자의 m과 n은 서로 독립적인 변수이므로 두 개의 짝수 $2m$과 $2n$이 독립적으로 변하지만, 후자에서 한 개의 변수 n의 영향을 받는 두 개의 $2n$은 n으로 인해 상호 관련되는 종속적 변화를 허용한다. 이와 같은 특징을 본 연구에서는 '독립적 일반성'과 '종속적 일반성'이라 칭할 것이다. 이는 정리 및 증명에 포함된 특정 변인의 독립성 여부에 따른 분류로, 각각 서로 독립적인 변수를 이용한 증명이 함의하는 일반성과 상호 관련된 변수를 이용한 증명이 함의하는 일반성을 의미한다.

한편 임의의 짝수를 $2n$으로 표현하는 어려움의 역방향으로, $2n$으로 주어진 문자식에 대해 수행한 증명의 의미를 학생 스스로 충분히 내면화함으로써 증명 결과를 동일한 구조를 지니되 특정수를 포함하는 문제 상황으로 전이할 수 있는가는 또 다른 차원의 인지적 요구를 필요로 한다. 증명에서 인식된 일반성의 특정 문제 상황에서의 적용가능성에 대한 논의이다.

이에 본 연구에서는 대수 정리의 증명 과정에 포함된 문자 변수의 일반성에 대한 학생들의 인식을 조사하고, 문자 변수를 포함한 증명이 갖는 일반성을 특정수로 구성된 문제 상황으로 전이할 수 있는지를 조사함으로써, 다수의 학생들이 어려움을 경험하는 대수 정리 증명의 일반성에 대한 이해를 돕기 위한 교수학적 논의의 기초를 마련하고자 한다.

이를 위해 다음의 연구 문제를 설정하였다.

연구문제 1. 중학생들은 상호 관련된 변수를 이용한 대수 증명이 갖는 종속적 일반성을 이해하는가?

연구문제 2. 중학생들은 변수를 이용한 증명이 갖는 일반성[1])을 특정 문제 상황으로 전이할 수 있는가?

이와 같은 연구문제에 대한 실마리를 찾기 위해 중학생을 대상으로 대수 정리의 증명에 포함된 문자식의 이해 및 특정수를 포함한 문제 해결에 대해 조사할 것이며, 그 결과를 바탕으로 하여 대수 정리 증명의 일반성 이해에 대한 교수학적 시사점을 도출할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 교과서에 나타나는 대수 증명의 일반성

대수 증명의 일반성에 대한 중학생들의 인식 조사에 앞서, 대수 증명에 대한 교수-학습 상황을 2종의 중학교 수학 교과서 및 익힘책의 분석을 통해 가늠해본다. 학교 수학에서 문자식의 전조는 초등수학의 □를 이용한 식으로 나타나지만, 본격적으로 문자 x, y, z 등을 이용한 식의 등장은 중학교에서이다. 중학교 1학년의 '문자와 식'은 문자 사용의 본격적인 시작을 알리는 단원이다. 이때 문자는 두 가지 맥락으로서 소개되는데, 하나는 구체적인 값이 주어지지 않은 수량으로서의 자리지기[2])이고, 다른 하나는 일반적인 수를 의미하는 다가이름[3])이다. 이준열 외(2009a)에서는 이와 같은 두 가지 맥락을 명확히 하며([그림 1]), 후자로 인해 학생들은 대수 영역에서의 여러 가지 성질의 일반성을 다루게 되고 곧 대수 정리 및 증명의 일반성에 대한 인식으로 이끌린다.

---

1) 본 연구에서 일반성은 특별한 언급이 없는 한 독립적 일반성과 종속적 일반성을 구분하지 않는 일반적 개념으로 사용된다. 물론 연구 문제2의 일반성은 엄밀하게 말해 독립적 일반성이지만, 종속적으로 파악하던 일반성을 연구자의 지도에 의해 독립적 일반성으로 전환하였다는 점에서, 두 가지 맥락을 확연히 구분짓기는 어렵다고 판단하였으며, 일반성이라는 용어를 사용한 것이다.

2) 'place holder'에 대한 번역 용어로 학교 수학에서 특정수를 대신하는 변수 개념이며, 변수를 명시적으로 다루기 훨씬 이전인 초등학교 시절부터 자주 접하게 되는 개념이다.

3) 'polyvalent name'의 번역 용어로 수학에서 주어진 조건을 만족하는 임의의 대상을 대신하여 사용되는 문자를 다가이름이라고 한다.

복사용 종이 한 묶음에는 종이가 250장 들어 있다. 따라서 복사용 종이 묶음의 수가 오른쪽 표와 같다면 1묶음, 2묶음, 3묶음, …일 때, 종이의 수는 각각

$250\times1=250$

$250\times2=500$

$250\times3=750$

$\vdots$

임을 알 수 있다.

묶음의 수 (묶음)	종이의 수 (장)
1	250×1
2	250×2
3	250×3
$\vdots$	$\vdots$
x	$250\times x$

이때, 복사용 종이 묶음의 수를 x묶음이라고 하면 종이의 수는

$250\times x$

라고 말할 수 있다.

이와 같이 구체적인 값이 주어지지 않은 수량이나 일반적인 수를 나타낼 때, 문자를 사용하면 편리하다.

[그림 1] 문자 사용의 두 맥락(이준열 외, 2009a)

[Fig. 1] Two context in the using of letters(Lee, J.Y. et al, 2009a)

Usiskin(1988)은 대수에 대한 관념과 그에 따른 변수의 사용을 4가지 유형으로 분류하였다. 그 중 본 연구에서 관심을 두는 대수 정리 및 증명의 일반성은 문제해결을 위한 방정식이나 함수와 같은 양 사이의 관계가 아닌 패턴 일반화나 구조 탐구로서의 관념 및 변수와 관련된다. 교과서에서 패턴 일반화나 구조 탐구로서 사용된 내용 중 대표적인 것이 다가이름으로서의 변수이다. 활용 맥락으로 우선 문제 해결 과정에서의 패턴 일반화를 볼 수 있다. 예컨대 이준열 외(2009b)에 제시된 해법([그림 2])은 다가이름으로서의 변수를 이용함으로써 풀이 및 그 결과가 일반성을 갖도록 한다는 사실을 보여준다.

이때 변수 x는 정삼각형의 수 각각을 지칭하는 다가이름의 역할을 한다. 또한 이 변수를 이용하여 정삼각형의 수가 x일 경우, 성냥개비의 수는 $2x+1$개라는 일반적 표현을 얻는다. 이 과정에서 대수적 조작 $3+2(x-1)=2x+1$이 나타나며, 이는 일반적 조작으로서 이해될 수 있다. 다시 말해, 결과뿐만 아니라 과정에서 얻은 문자식의 문자 역시 1, 2, 3,… 등 여러 값을 함의한 것으로 이해되어야 한다.

13 아래 그림과 같이 성냥개비를 사용하여 정삼각형의 개수를 하나씩 계속 늘려 나가려고 한다. 다음을 구하여라.

(1) 정삼각형을 x개 만들 때, 사용한 성냥개비의 수

(2) 정삼각형을 15개 만들 때, 사용한 성냥개비의 수

13 (1) 정삼각형이 1개씩 만들어질 때마다 성냥개비의 수는 다음과 같이 늘어난다.

정삼각형의 수(개)	성냥개비의 수(개)
1	3
2	3+2
3	3+2+2
$\vdots$	$\vdots$
x	$3+\underbrace{2+\cdots+2}_{(x-1)\text{개}}$

따라서 정삼각형이 x개일 때, 성냥개비의 수는

$3+2(x-1)=2x+1$(개)

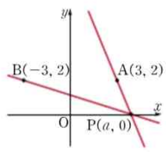
[그림 2] 다가이름으로서의 변수(이준열 외, 2009b)

[Fig. 2] The variable in the context of polyvalent name(Lee, J.Y. et al, 2009b)

또한 변수의 일반성이 증명에 사용된 경우도 찾아볼 수 있다. 이준열 외(2009c)에 나오는 문제의 증명은 문자 a를 통해 일반성을 함의하고 있다([그림 3]).

의사소통

20 오른쪽 그림에서 두 점 A(3, 2), B(−3, 2)와 x축 위의 점 P(a, 0)에 대하여 직선 PA와 PB의 기울기를 각각 m, n이라고 하자. 이때, $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$의 값은 a의 값에 관계없이 일정함을 설명하여라. (단, $a\neq3$, $a\neq-3$)



20 $m=\frac{2-0}{3-a}=\frac{2}{3-a}$

$n=\frac{2-0}{-3-a}=-\frac{2}{a+3}$

$\therefore \frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{3-a}{2}+\frac{a+3}{2}$

$=\frac{6}{2}=3$ (일정)

[그림 3] 일반성을 함의한 대수 증명(이준열 외, 2009c)

[Fig. 3] Algebraic proof implying the generality(Lee, J.Y. et al, 2009c)

이 증명에서 a는 임의의 실수를 지칭하는 문자 변수이며, $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$의 값은 $-a$와 a가 상쇄됨으로써 a의

값에 관계없이 일정한 값을 갖는 구조적 특성을 잘 보여준다. 이 증명 속에는 a가 특정수 5라면, $m=\dfrac{2}{3-5}$, $n=\dfrac{2}{5+3}$이므로 $\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{3-5}{2}+\dfrac{5+3}{2}=3$이 된다는 것을 내포하고 있다.

이준열 외(2009d)에 있는 [그림 4]의 증명 역시 변수가 지닌 일반성을 적극적으로 이용한 사례에 해당한다. '연속한 두 자연수의 제곱의 차는 항상 홀수임을 인수분해를 이용하여 설명'하는 이 증명은 임의의 연속한 두 자연수를 n, $n+1$로 표현함으로써 임의 대상을 증명의 대상으로 취급할 수 있게 하며, 이를 통해 나타난 결과 $2n+1$을 임의의 홀수로 해석하는 일반성에 대한 해석을 포함하는 증명이다.

15 연속한 두 자연수를 n, $n+1$이라고 하자.
두 자연수의 제곱의 차를 식으로 나타내면

$$(n+1)^2-n^2$$

이고, 이 식을 인수분해하면

$$\begin{aligned}(n+1)^2-n^2&=\{(n+1)+n\}\{(n+1)-n\}\\&=2n+1\end{aligned}$$

따라서 연속한 두 자연수의 제곱의 차는 항상 홀수이다.

[그림 4] 증명에서 변수 사용 및 해석(이준열 외, 2009d)
[Fig 4] Using and interpreting the variables in the proof(Lee, J.Y. et al, 2009d)

이상의 교과서 분석에서 보듯이, 대수에서 다가이름으로서의 변수 사용은 일반성 표현을 위해 빈번하게 이용될 뿐만 아니라 필수적인 요소이다. 문제의 풀이 및 증명에 이용된 문자는 그 풀이와 증명에 일반성을 부여한다. 그러나 이와 같은 문자 활용의 대수적 유용성에 비해, 학생들은 풀이와 증명에 함의된 일반성 인식에 어려움을 드러내는 것으로 보인다.

2. 대수에서의 일반성 및 문자 변수 관련 연구

Radford(1996)는 일반화가 일반화되는 수학적 대상에 따라 좌우되는 맥락과 관련된 활동이라 하였다. 이에 일반화 대상을 기하적인 동시에 수치적인 패턴에 국한시키고 그 특성으로 두 가지 요소를 논하였다. 타당성의 문제와 기호 표현의 문제이다. 먼저, 패턴 일반화의 목적은 새로운 결과를 얻는 것이고, 이때 가장 중요한 일반화의 특성은 논리적 본성이다. 즉 얻은 결과의 타당성을 확인하기 위해 몇 개의 경우, 또는 특별한 사례로서 100번째 수를 요구하기도 한다는 의미에서 일반화의 기저 논리는 학생에 따라 다를 수 있다. 따라서 대수 수업에서 일반화를 다루기 위해서는 타당화에 대한 논의가 불가피함을 지적하고 있다. 한편 일반화를 위해 이용하는 문자 표현은 산술에서의 숫자 표현과 불연속적인 대상이다. [그림 3]을 예로 설명하면, 1, 2, 3, … 각각의 결과는 산술 맥락에서 답할 수 있지만, 산술에서는 x번째 도형을 참조할 수 없기 때문에 x의 결과는 대수 맥락의 문제인 것이다.

Mason(1996)은 대수의 일반성과 관련하여 학생들이 경험하는 어려움을 5가지 예를 들어 설명하였다: 단어로부터 단일 문자 기호로의 성급한 이행, 찾은 패턴의 자명함, 식 만들기, 수 다각형(arithmagons)에 대한 일반적 접근의 어려움, 정사각형 n행 m열로 이루어진 직사각 배열에 필요한 성냥개비 수. 각 과제는 학생들이 어려워하는 요인으로서 일반화 없이 특정 사례를 다루려는 경향이나 일반성에 대한 그릇된 이해 등을 포함한다.

사실 학생들은 패턴 찾기 활동에서 추측을 하고나면 그것을 식으로 표현하고, 그것이 항상 성립한다는 것, 즉 일반성을 증명해야 한다. 그러나 학생들은 일반성을 제대로 이해하지 못하는 것으로 나타나며, Mason(1996)은 그 이유를 교사가 특수한 경우에 성립되는 기법에 초점을 맞추도록 지도하고 있기 때문으로 본다. 일반성 인식의 어려움을 교수학적 이유로 설명하고 있는 것이다.

Lee(1996) 또한 대수에 대한 일반화 접근에 대한 실험을 통해 일반화 활동의 유형이 쉽지 않음을 보여주었다. 이 연구에 포함된 일반화 활동이 지각적 수준(의도된 패턴 인식), 언어화 수준(패턴을 분명하게 표현), 기호화 수준(점의 수 등을 문자를 써서 표현)에서의 장애를 지닌 것으로 설명하였다.

이외에도 대수 학습의 어려움을 문자 및 변수의 이해에서 찾는 연구가 다수 있다(김남희, 1997a, 1997b; 반혜진, 2005; 유혜민, 2013 등).

예컨대 김남희(1997b)는 학교수학에서 다양한 맥락에서 사용되는 변수의 의미가 상이함에도 불구하고 간략한

예를 통한 설명을 주고 학생들의 사고에 그 개념이 이미 내면화되어 있다고 가정함으로써 변수를 즉각적으로 도입하여 다룸으로써 변수에 대한 형식적 조작을 조장하는 방향에 대해 비판하고 있다. 반혜진(2005)은 중학생 대상으로 문자 및 변수 학습시 발생하는 오개념을 조사하는 연구에서, 대부분의 학생들이 변수 개념을 제대로 이해하지 못하고 있었다고 하였다. 특히 변수의 여러 유형 중 방정식에서 자리지기로 역할한 문자를 변수로 인식한 학생들에 비해 임의의 대상을 나타내는 문자를 변수로 인식하는 경우는 상대적으로 적었다. 유혜민(2013)은 변수 개념과 관련된 인지적 장애로서 '수를 대신하는 문자'를 비롯하여 유형별로 분류하고 그에 따른 지도방안을 제시하기도 하였다.

이 밖에도 학생들의 문자 및 변수 이해에 대한 다수의 연구가 있지만, 본 연구에서 주목하는 종속적 일반성에 관한 학생들의 인식을 조사하는 연구나 대수 정리에서 인식한 일반성을 특정수로 전이하는 것과 관련한 연구는 미흡한 것으로 나타난다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

연구 참여자는 경남 창원의 N중학교 3학년 학생들 중에서 선정되었다. N중학교 3학년 수학 수업은 수준별 상·중·하로 운영되며, 그 중 상 수준의 1개 반 22명을 선정하였다. 수준의 선정은 증명 이해의 어려움을 고려한 것이다. 증명 수행의 어려움은 여러 연구에서 익히 보고되고 있는 만큼, 증명의 이해 역시 어려움이 예상되므로 본 연구의 취지를 고려하여 증명 이해가 보다 수월할 것으로 기대되기 때문이다. 이들에게 1차 검사 문항을 적용한 결과, 전체 22명 중 종속적 일반성 인식의 결여를 보인 학생은 16명이며, 그들의 반응은 기타를 제외한 3가지로 범주화할 수 있었다: 종속적 일반성에 대한 이해 부족, 대수식의 성립 여부에 기반한 판단, 증명의 논리성이 아닌 경험에 기반한 판단. 각 그룹에서 개별 면담의 대상으로 각각 1명의 학생을 임의 추출하여 3명의 학생 S1, S2, S3를 최종 선정하였다. S1은 종속적 일반성에 대한 이해 부족, S2는 대수식의 성립 여부에 기반한 판단, S3는 증명의 논리성이 아닌 경험에 기반한 판단으로 분류된 사례이다. S1과 S2는 수학 학업성취도가 중상위권인 학생이며, S3는 수학 학업성취도가 중위권인 학생으로, 자신의 생각을 타인에게 전달할 수 있는 학생들이다.

2. 연구 방법

1) 검사문항

서로 독립적인 변수를 이용한 증명이 함의하는 일반성과 상호 관련된 변수를 이용한 증명이 함의하는 일반성을 각각 독립적 일반성과 종속적 일반성으로 지칭하였으며, 본 연구의 목적인 증명이 갖는 종속적 일반성에 대한 학생들의 인식 조사를 위해 [표 1]의 검사 문항을 선정하였다.

[표 1] 검사문항
[Table 1] Test item

1. 다음은 '모든 3의 배수와 3의 배수의 합은 3의 배수임'을 증명하는 과정이다. (증명) 3의 배수를 $3n$(단, n은 자연수)이라고 두자. 그러면 $3n+3n=6n=3\times 2n$이므로 3의 배수와 3의 배수의 합 역시도 3의 배수임을 알 수 있다. 따라서 위의 정리는 성립한다. (1) 이 증명이 옳다고 생각합니까? 아니면 잘못된 증명이라고 생각합니까? (2) 옳다고 생각하면 그 이유를 뭐라고 생각합니까? 잘못되었다고 생각하면 어디가 잘못 되었는지 적고 그 부분을 바르게 고치시오.

이 문항의 의도는 독립적 일반성을 이용한 증명을 요구하는 정리에 대해 종속적 일반성을 이용한 잘못된 증명을 제시함으로써 증명에 내재된 종속적 일반성을 인식할 수 있는지, 그리고 구체적으로 어떻게 인식하고 있는지를 파악하는 것이다.

이러한 검사 문항은 임의의 짝수의 합은 짝수라는 정리의 증명에서 학생들이 종종 $2n+2n=4n$과 같은 오류를 범한다는 Mason & Pimm(1984)의 연구를 참조한 것이다. 특히 2가 아닌 3을 택한 것은 연구 문제 2를 위

한 정리 증명의 일반성 적용 조사에서 2인 경우 일의 자리 수만 확인하면 2의 배수를 찾아내는 간편한 전략의 사용을 방지하기 위함이다.

대수에서 임의의 3의 배수의 합은 3의 배수임을 보이기 위해서는 독립적인 두 변수로 구성된 3의 배수 표현인 $3m$과 $3n$이 이용되어야 한다. 그러나 연구자의 수업 경험상, Mason & Pimm(1984)의 지적대로 $3n+3n=6n$으로 증명하는 학생들을 관찰한 바 있다. 이에 역으로 본 연구에서는 오히려 종속적 일반성을 보이는 $3n+3n=6n$을 제시하여 그에 대한 이해를 조사하고자 하는 것이다.

연구 초기에 고려한 검사 문항은 '두 3의 배수 합은 3의 배수이다'인데, 이는 동일한 두 3의 배수라고 오해할 소지가 있다고 판단하여, '두 3의 배수'라는 표현 대신 '3의 배수와 3의 배수'라고 풀어서 표현하였다.

Ⅱ장의 교과서 분석에 근거할 때, 중학교 3학년 학생들은 문자를 이용한 풀이와 증명을 이미 다루었으며, 따라서 연구 참여자들이 이 검사 문항에 대해 어려움을 겪는다면 그것은 학습 경험의 부재에 해당하지 않는다.

한편 개별 면담 과정에서 일반성의 특정수로의 전이를 조사하기 위한 문항은 '$3\times4+3\times5$는 3의 배수인가? 그 이유는?', '$3\times21+3\times61$은 3의 배수인가? 그 이유는?', '$3\times246845+3\times56219$는 3의 배수인가? 그 이유는?'의 세 가지이다. 앞선 증명의 일반성을 구체적인 수치 상황에 이용할 수 있는지를 알아보는 문항이다. 같은 유형을 수의 크기에 따라 세 가지로 제시한 것은 연구자가 활용할 수 있는 교수학적 변인으로서, 연구 참여자가 작은 수와 중간 수의 경우 앞서 증명한 정리를 적용하지 않고 답할지 모르지만, 큰 수의 경우에는 증명 결과를 적용할 가능성이 커진다는 기대를 반영한 것이다.

2) 연구 방법 및 절차

본 연구를 위해 지필검사 및 개별면담의 두 가지 방법을 이용하였다. 연구 문제 1, 2를 위해 두 가지 검사문항이 지필검사로 적용되었고, 그 반응에 따라 종속적 일반성에 대한 인식을 범주화하고 각 그룹별 개별 면담을 실시하였다.

구체적으로, 우선 [표 1]의 검사문항을 2013년 7월 18일 22명의 연구 참여자에게 적용하여 학생들의 일반성 인식에 관한 기초 자료를 수집하였다. 이때 나타난 반응을 특징에 따라 유형을 범주화 하고 종속적 일반성 인식에 어려움을 보인 사례에 대한 보다 근본적 이유를 탐색하기 위해 그룹별로 학생을 임의 추출하여 개별 면담을 실시하였다. 이 면담의 주요 목적은 인식 어려움에 대한 근본적 이유를 탐색하는 것이며 아울러 연구 문제 2의 검사문항을 제공함으로써 이들이 특정수로의 전이에서 보이는 반응을 확인하고 분석하였다.

개별 면담은 여름 방학을 이용하여 2013년 7월 19일, 22일, 23일에 3명의 연구 참여자에게 개별적으로 실시되었다. 면담 과정은 다음의 세 절차로 전개하였다. 먼저, 대상자들의 검사문항에 대한 기록지를 보여주며 반응에 대한 이유를 확인하였다. 이는 학생의 반응에 대한 이유를 연구자 임의대로 해석하는 오류를 방지함으로써 연구 결과의 타당성을 제고하기 위함이다. 다음, 증명의 내용을 설명하게 함으로써 학생이 이 증명을 어떻게 이해하는지를 파악하였다. 한편, 종속적 일반성 인식의 성공을 돕기 위해 정리와 증명이 각각 $3+6=9$라는 사례를 포함하는 것인지를 질문하였다. 이를 통해 증명의 오류를 인식하고 개선하는 과정을 관찰할 것이며, 어떻게 증명을 정교화하는지 관찰하였다. 마지막으로 증명 과정에서 나타나는 대수식과 구조적으로 일치하는 구체적인 수식을 제시하고 그것이 3의 배수인지와 그 이유를 질문함으로써, 대수 증명의 일반성의 전이에 대한 사례를 관찰하였다.

면담 시간의 제한은 없었으며, 세 차례의 면담을 위해 매회 약 1시간 정도가 할애되었다. 연구 참여자의 언행은 연구자에 의해 주의 깊게 관찰되었으며, 그 과정에서 이해하기 어려운 반응에 대해서는 관찰 도중 질문을 하였으며, 학생의 반응은 필드노트에 기록하였다. 관찰 기록은 대수 증명의 일반성 인식과 적용에서 나타나는 특징을 파악하기 위한 분석 자료로 이용되었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 종속적 일반성 인식에 대한 결과 및 분석

검사 문항 (1)에 대한 학생들의 반응을 정리하면 [표 2]와 같다.

[표 2] 검사 문항 (1)에 대한 결과

[Table 2] The result for test item (1)

반응	학생 수(명)	비율(%)
옳다	16	72.73
잘못되었다	6	27.27

이 결과는 대수 증명에서 종속적 일반성에 대한 학생들의 인식이 약 72.73%로 저조함을 보여주며, 이로부터 다수의 학생들이 종속적 일반성 인식에 어려움을 겪는 것을 알 수 있다. 한편, 검사문항 (2)에 대해 옳다고 답한 이유는 [표 3]과 같이 정리할 수 있다.

[표 3] 옳다고 답한 학생들의 이유

[Table 3] The reason that students responding "correct" propose

반응 범주	옳은 이유	학생 수(명)	비율(%)
증명의 논리성이 아닌 경험에 근거한 판단	3의 배수와 3의 배수의 합은 3으로 나누면 3의 배수가 나온다.	3	25
	위의 증명을 다른 방법으로 해도 맞는 것 같다	1	
대수식의 성립 여부에 근거한 판단	$3n+3n=6n=3\times 2n$ → $6n=6n=6n$ 결국 같은 수이므로	1	31.25
	n에 수를 넣어도 성립하므로	4	
종속적 일반성 이해 부족	$6n$이 3의 배수이므로	1	37.5
	$3\times 2n$에 3이 곱해져 있으므로 항상 3으로 나눠지기 때문에	1	
	잘못된 부분이 없으므로	1	
	3의 배수 더하기 3의 배수는 3의 배수라서, $3n$이 3의 배수라 두면 n에 아무수를 넣어도 $3n+3n=3n$이 된다.	1	
	n에 어떤 수를 넣어도 3을 곱하니까 3의 배수	1	
	$6n+6n=12n=3\times 4n$도 성립하니까 옳다	1	
기타	자연수의 곱과 곱의 합은 맞고 정수를 곱하면 틀린다	1	6.25

반응은 4가지로 분류되었으며, 모든 경우는 포괄적으로 종속적 일반성 인식의 결여에 해당하지만, 특히 종속적 일반성 이해 부족으로 범주화된 반응은 다른 범주에 비해 종속적 일반성에 대한 인식 부족을 뚜렷이 드러낸다. 이를테면, '3의 배수 더하기 3의 배수는 3의 배수라서 $3n$이 3의 배수라 두면 n에 아무수를 넣어도 $3n+3n=3n$'이라는 반응은 대수 변수의 종속적 일반성 이해 부족을 명백하게 보여준다.

한편, 증명의 판단 준거가 논리가 아닌 경험에 근거한 경우인 '3의 배수와 3의 배수의 합은 3으로 나누면 3의 배수가 나온다', '위의 증명을 다른 방법으로 해도 맞는 것 같다'는 반응은 증명 자체에 대한 이해의 결여를 보여주며, 논리적 견지에서 증명의 옳고 그름을 판단한 것이 아니라 3의 배수의 예가 될 수 있는 수를 통한 경험적 확인이 증명의 진위 여부에 대한 판단 준거가 되고 있다. 또한 증명에 나타난 대수식에 주목하여 대수식의 성립 여부를 곧 증명의 진위 여부로 인식한 경우가 31.25%로 적지 않은 것으로 나타났다.

검사문항 (2)에 대해 잘못되었다고 답한 이유 역시 다양하였으며, [표 4]와 같다.

잘못되었다는 반응은 총 6명으로 전체의 30%에도 미치지 못하는 적은 인원이었다. 그들이 보인 이유를 3가지로 범주화하였는데, 그 중 3명은 종속적 일반성에 대한 인식과 더불어 독립적 일반성의 표현까지 성공적으로 제안한 사례들이다. 한편 종속적 일반성 인식에는 성공하였지만, 독립적 일반성을 제안하지 못한 사례가 하나 있었다.

또한 잘못된 이유를 제시하는 과정에서 종속적 일반성 인식과 거리가 있는 두 가지 사례가 있었다. 하나는 'n의 값이 다를 때는 $3n+3n=6n=3\times 2n$이 성립하지 않으므로 잘못되었다'는 반응에서 의미와 표현의 괴리를 나타내었다. n의 값이 다른 경우에는 $3n+3n$이라 표현될 수 없음에도 불구하고, 이 표현은 가능하지만 이 표현이 독립적인 두 3의 배수의 합을 함의하지 못한다는 지적이다. 이는 두 가지로 해석 가능한데, 첫째는 한 개의 문자 n이 독립적으로 변할 수 있다고 잘못 생각하고 이를 표현한 것으로 볼 수 있다. 곧 증명이 잘못되었음을 알지만, 그 표현이 갖는 종속성의 한계를 명확하게 인식하지 못한 경우이다. 둘째는 주어진 식 자체에서 동일한 n으로 인해 문자의 독립성을 담보하지 못하므로,

식이 성립하지 않는다는 지적으로도 해석 가능하며, 이는 올바른 해석이다. 그러나 어느 것으로 해석하더라도, 이 사례는 이유 제시에 있어 표현상의 한계를 드러낸 것은 틀림없다.

[표 4] 잘못되었다고 답한 학생들의 이유
[Table 3] The reason that students responding "wrong" propose

반응 범주	잘못된 이유	학생 수(명)	비율(%)
독립적 일반성 표현 제안	3의 배수와 3의 배수의 합을 식으로 $3n+3n$이라고 했는데 한 3의 배수와 다른 3의 배수가 다른 수일수도 있기 때문에 예를 들어 $3n+3m$ 이런 식을 세워야 한다고 생각합니다.	1	50
	n을 자연수로 두면 $3n$과 $3n$은 같은 수가 되므로 다른 예를 설명하기 위해 $3n$과 $3(n+x)$로 두는 등 바꾸어야 할 것 같아요. n과 다른 미지수 (x등)은 둘 다 자연수이고 $3n+3(n+x)=3(2n+x)$이므로 3의 배수의 합은 역시 3의 배수이다.	1	
	3의 배수를 $3n$, $3m$(단, n, m은 자연수)라고 두자. 그러면 $3n+3m=3(n+m)$이므로 3의 배수와 3의 배수의 합 역시도 3의 배수이다. 따라서 위의 정리는 성립한다. (서로 다른 3의 배수의 합일수도 있다)	1	
독립적 일반성 표현을 제안하지 못한 사례	아무 3의 배수 3, 6을 잡고 $3+6=9$이면 위 식에서 $6n=3\times 2n$ 여기서 $6n=9$이면 n은 자연수가 될 수 없다. 3의 배수와 3의 배수의 합은 3의 배수이지만, $3n+3n=6n=3\times 2n$의 정리가 틀렸다. 그런데 식을 어떻게 고치지?	1	16.67
오류를 보인 반응	이 증명은 모든 3의 배수와 3의 배수의 합이 3의 배수임을 증명하는 것이다. n의 값이 같을 때는 성립하지만, n의 값이 다를 때는 $3n+3n=6n=3\times 2n$이 성립하지 않으므로 잘못되었다.	1	33.33
	$6n=\sqrt{18}\times\sqrt{2}\,n$도 가능하므로 (즉, $6n=3\times 2n$만 되는 것은 아니니까)	1	

다른 하나는 '$6n=\sqrt{18}\times\sqrt{2}\,n$도 가능하므로'라는 반응으로 이는 배수 개념상의 문제점을 드러내고 있다. $6n$은 $3\times 2n$이라는 표현 외에도 다른 형태의 곱의 표현이 가능하므로 3의 배수라고만 할 수 없다는 것이다. 양자 모두 종속적 일반성 인식에 실패한 경우에 해당한다.

이상의 결과 및 분석에 근거할 때, 학교 수학에서 대수 증명의 일반성, 특히 그것이 종속적인 경우 다수의 학생들은 일반성 인식에 어려움을 겪고 있을 것으로 생각된다. 이에 본 연구에서는 어려움의 원인을 보다 자세히 살펴봄으로써 대수 증명의 일반성 이해를 돕기 위한 교수 학습의 기초를 마련하고자 한다.

2. 개별 면담 결과 및 분석

증명의 일반성을 인식하지 못하였다고 판단된 결과인 '옳다'는 이유를 범주화하여 기타를 제외한 나머지 세 개의 범주에서 각각 1명씩을 임의추출하여 개별 면담을 가졌다. '옳다'는 반응은 개별 면담 대상자 모두가 종속적 일반성에 대한 인식이 결여되었음을 나타낸다. 특히 S1은 종속적 일반성 이해의 부족으로, S2는 대수식의 성립 여부에 근거한 판단으로, S3는 증명의 논리성이 아닌 경험에 근거한 판단으로 분류된 사례이다.

개별 면담을 통해 학생들의 사고를 면밀히 파악하고, 아울러 증명의 일반성을 구체적 수치 사례에 적용하는 과정을 관찰하고자 하였다. 증명의 오류를 제대로 발견한 학생들은 증명의 일반성을 구체적 사례에 적용하는 데 어려움을 덜 경험할 것으로 가정되어, 증명의 일반성을 옳게 인식하지 못한 학생들로 하여금 개별 면담을 통해 사고과정에 대한 고찰과 함께 일반성 인식으로 나아갈 수 있을 것을 기대하였고, 그 결과를 일반성의 적용을 통해 확인할 수 있다고 생각하였다.

개별 면담 사례의 주요 초점은 종속적 일반성의 인식과 증명의 일반성의 특정수로의 전이로 요약된다. 따라서 각 사례는 종속적 일반성 인식에 관한 전반부와 일반성의 전이에 관한 후반부로 구분하여 정리하였으며, 사례를 대표하는 특징을 제목으로 하여 이해를 돕고자 하였다.

1) S1의 사례

(1) 종속적 일반성 인식과 표현의 괴리

면담은 검사반응에 대한 설명의 요청으로 시작하였다. S1은 모든 3의 배수는 3×1, 3×2, 3×3처럼 3에 곱해진 것으로 표현되므로 증명이 성립하는 것이라고 설명하였다. 그리고 임의의 자연수 n에 3을 곱하면 3의 배수가 되니까 이들을 더하면 3의 배수가 되며, $3n+3n=6n$에서 $6=3\times2$이므로 $6n$은 3의 배수라고 설명하였다. 이러한 S1의 설명은 3의 배수 표현이 3n인 것과 $3n+3n$의 결과 역시 3의 배수라는 것을 잘 알고 있음을 보여준다. 그러나 이들이 종속적 경우에 대한 것임을 인식하지는 못하였다.

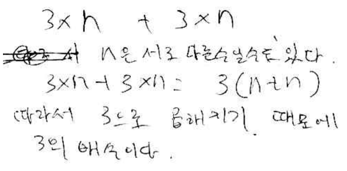
이에 연구자는 주어진 정리와 증명이 $3+6=9$까지 포함하는 것인지를 물어봄으로써 종속성 인식을 위한 단초를 제공하였다.

RS: 위 증명은 3+6까지 포함한 것이니?
S1: (이상함을 느끼고) 음........그러니까 n이 2개 있는데, 이게 같은거예요?
RS: 너는 어떻게 생각하니?
S1: 이 증명에서는 이렇게 n이 같은 수여야 되죠.
RS: 왜 그렇게 생각하니?
S1: n으로 묶어 놓잖아요.
RS: 그럼 이 증명은 $3+6=9$의 경우도 증명한 것이니?
S1: 증명했다고 볼 수 없어요.
RS: 왜 그렇게 생각하지?
S1: 3과 6에서 n이 같은 수 일수는 없잖아요.
RS: 그럼 이것은 무엇에 대한 증명이니?
S1: n이 같은 수일 때 만 성립되는 거죠.

S1은 3+6의 사례를 통해 증명에서 종속적 일반성을 인식할 수 있었다. 이에 연구자는 그 이전에 무엇이 문제였는지를 파악하고자 질문을 이어나갔다.

RS: 처음에는 이 사실을 알았니?
S1: 질문 받고 대답하다 보니까 생각한 거예요.
RS: 왜 처음에 그런 생각을 못했을까?
S1: 생각이 안 나서 그렇죠.
RS: 그럼 처음에 이 명제는 3+6을 포함한다고 생각했니?
S1: 처음에 그렇게 생각했죠.
RS: 명제는 다른 것까지 포함하는 것인데 증명도 다른 것까지 포함해야 된다고 왜 생각 못한거니?
S1: 처음에는 증명이 3+6을 포함한다고 생각했는데, 선생님과 이야기 도중에 안 된다고 생각했어요.

이상의 대화로부터 S1은 면담 이전에는 주어진 식의 종속성을 전혀 인식하지 못하였음을 알 수 있다. 그리고 '증명이 3+6까지 포함한 것이니?'라는 연구자의 질문을 통해 종속성을 인식하고 증명의 한계를 인식할 수 있었다. 이후 연구자는 S1이 종속성 인식을 통해 이 증명을 어떻게 개선할 수 있을지를 알아보기 위해 증명을 바르게 고쳐 볼 것을 요구하였다. 그러자 학생은 [그림 5]와 같이 증명을 수정하였다.



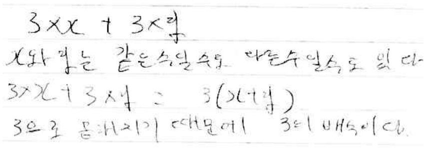
[그림 5] S1의 1차 증명 개선
[Fig. 5] The first proof improvement of S1

RS: 너의 증명에서 n은 같은 수 아니니?
S1: 같을 수도 있고 다를 수도 있어요.

이상의 사실로부터 S1은 동일한 문자가 다른 수를 가질 수 있다고 생각함을 알 수 있다. 종속성의 인식이 동일 문자 사용에 기초한다는 사실과 달리, S1의 증명 개선에 계속 동일 문자가 사용되고 있다는 사실은 놀랍다. 다만, 'n은 서로 다른 수 일수도 있다'는 설명은 독립적 일반성을 인식하고는 있지만, 그것을 제대로 표현하지 못하는 한계를 보여준다. 이에 연구자는 S1의 증명을 타인이 이해할 수 있도록 전환할 것을 요구하였다.

RS: 증명은 내가 이해하는 것도 중요하지만, 다른 사람이 보고도 이해할 수 있어야 한다. 다른 사람이 n을 같은 수라고 생각하면 어쩌지?
S1: 음.......그러면 문자를 바꿔 적어야지요.

결국 S1은 서로 다른 문자를 사용하여 [그림 6]과 같이 증명을 개선할 수 있었다.



[그림 6] S1의 2차 증명 개선

[Fig. 6] The second proof improvement of S1

(2) 오개념에 의한 특정수로의 비전이

연구자는 대수 증명의 일반성을 특정수로 전이할 수 있는지를 확인하고자 작은 수, 중간 수, 큰 수로 대별되는 특정수가 3의 배수인지와 그 이유를 물었다.

RS: $3\times4+3\times5$는 3의 배수이니?
S1: 3의 배수에요.
RS: 왜 3의 배수지?
S1: 더해보면 그렇게 나와요.
RS: 어떻게 더했는데?
S1: 4, 5를 더하면 9가 나오잖아요. 9가 3의 배수에요.
RS: $3\times21+3\times61$은 3의 배수니?
S1: 음........
RS: 무엇을 생각하니?
S1: 계산해서 더해보고 있어요.
RS: 무엇을 계산했지?
S1: 3×21과 3×61을 계산하고 있었어요.
RS: $3\times4+3\times5$은 계산 안했잖아! 그런데$3\times21+3\times61$은 왜 계산하니?
S1: 21과 61을 더하면 3의 배수가 아니에요. 그래서 계산해서 더해보고 있었어요.

이상에서 S1은 대수 증명의 일반성을 특정수로 전이하지 못하고 있음을 알 수 있다. 첫 질문에 대한 답이 $4+5$의 결과가 3의 배수이기 때문이라는 것은 대수 증명에서 나타난 대수 조작과 일치하지 않는다. 특히 그는 특정수에서 $4+5$의 결과와 $21+61$의 결과를 확인함으로써 3의 배수를 판단하는 오개념을 갖고 있었다. 이에 연구자는 S1의 대수 증명을 특정수로 전이하는 것을 돕고자 더해서 3의 배수가 나오지 않는 2와 5를 제공하였다.

RS: $3\times2+3\times5$는 3의 배수이니?
S1: 3의 배수예요.
RS: 왜 3의 배수라고 생각하니?
S1: 생각해 보니까 이 두 개(2와 5)를 더하면, 3이 묶여서 3을 곱하게 되니까 3의 배수예요.
RS: 그럼 $3\times21+3\times61$은 3의 배수니?
S1: (즉각적으로) 예
RS: 왜?
S1: 앞에서처럼 3을 묶으면 3을 곱하게 되니까요.
RS: 처음에는 이렇게 안 했잖니? 무엇이 생각을 바뀌게 한 거지?
S1: ($3\times2+3\times5$을 가리키며) 이것이 바뀌게 만들었어요.
RS: 어떻게?
S1: 2랑 5랑 더해도 3의 배수가 아닌데 계산을 해보니 3의 배수가 나와서요.

마침내 S1은 대수 변수의 일반성을 특정수에 적용할 수 있었고, 이는 특정수에서의 계산에 기인한 결과이다.

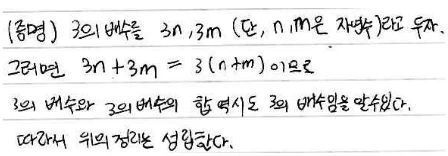
2) S2의 사례

(1) 대수 증명의 특정수 함의 질문을 통한 종속적 일반성 인식

자신의 반응을 설명하면서 S2는 n에 1을 대입하면 식이 성립하고, 2를 대입해도 성립하고, 어떤 수를 대입해도 성립하므로 대수 증명이 옳다고 답함으로써 증명을 대수식의 성립에 근거하여 이해하였다. S2는 대수 증명의 진위 여부를 대수식의 성립 여부와 동일시하였음을 알 수 있다. 이후, 대수식의 종속성에 주목하도록 다음과 같은 질문하였다.

RS: 3과 6을 더하면 3의 배수니?
S2: 예. 3의 배수예요.
RS: 이 증명은 이런 것까지 포함하는 거니?
S2: (고심하더니) 식은 아닌 것 같은데, 그 밑의 말은 포함하는 것 같아요.
RS: 식은 왜 아닌 것 같니?
S2: 식은 하나는 3이고 하나는 6이 될 수 없어요.
RS: 이 명제는 $3+6$까지 포함하는 거니?
S2: 예.

대수식과 명제가 일치하지 않음을 인식한 S2에게 증명을 개선할 것을 요구하였고, S2는 [그림 7]과 같이 증명을 개선할 수 있었다.


(증명) 3의 배수를 $3n, 3m$ (단, n, m은 자연수)라고 두자.
그러면 $3n+3m = 3(n+m)$이므로
3의 배수와 3의 배수의 합 역시도 3의 배수임을 알수있다.
따라서 위의 정리는 성립한다.

[그림 7] S2의 증명 개선
[Fig. 7] The proof improvement of S2

RS: 명제는 $3+6$을 포함하는데, 증명은 이것을 포함하지 않는다는 것을 처음에는 왜 발견 못했을까?
S2: 깊이 생각을 안 해서 그랬던 것 같아요.
RS: 무엇을 깊이 생각 안했다는 거니?
S2: 명제랑 증명의 관계를 잘 생각 안했던 것 같아요.
RS: 그럼 어떻게 틀린 것을 알게 되었지?
S2: 선생님이 $3+6$을 가지고 했던 그 질문 때문에 알게 되었어요.

이상으로부터 S2 역시 S1과 마찬가지로 대수식의 종속적 일반성에 대해 의식하지 못하고 있었으나, $3+6$과 같이 종속적 일반성을 벗어난 특정수가 증명에 함의된 것인가를 묻는 질문이 기존 증명의 종속성 인식에 도움이 됨을 알 수 있다.

(2) 계산 중심 사고에 기인한 일반성 비전이

이어 대수 증명의 일반성을 특정수로 전이할 수 있는지를 살펴보고자 하였다.

RS: $3\times4+3\times5$은 3의 배수이니?
S2: (생각해 보더니) 예.
RS: 왜 3의 배수이니?
S2: 27이니까요.
RS: 왜 27인데?
S2: $12+15$니까요.
RS: 그럼 $3\times21+3\times61$은 3의 배수니?
S2: (혼잣말로) 63 플러스......이것 좀 더해 봐도 되요?
RS: 응
S2: (계산해 보더니) 예.
RS: 왜 3의 배수이니?
S2: $63+183$이니까 246이 되는데, 246은 3의 배수니까요.
RS: $3\times246845+3\times56219$는 3의 배수니?
S2: (이번에도 계산해 봄)

세 경우에서 모두 계산에 의존한 S2는 대수 증명의 일반성을 특정수로 전혀 전이하지 못하고 있음을 알 수 있다. 특히, 계산의 번거로움으로 인해 큰 수에 대해서는 증명의 일반성이 특정수로 전이되는 것을 도울 것이라는 기대도 빗나갔다.

RS: 3의 배수인지를 계산 안하고는 알 수 없니?
S2: 계산 안 하고는 알 수 없을 것 같아요.
RS: (검사지의 증명을 가리키며) 이 증명에서는 모든 3의 배수의 합을 하는데 계산도 안 해보고 어떻게 알아?
S2: 두, 세 개 넣어보면 규칙적으로 되는게 있어요.
RS: 무엇이 규칙적으로 된다는 거니?
S2: 음.....예를 들면, $3n$으로 두면 1을 넣으면 3이고, 2를 넣으면 6이고, 3을 넣으면 9고 이렇게 어차피 계속 반복되니까 딱히 할 필요가 없어요.
RS: 무엇을 할 필요가 없다는 거니?
S2: 모든 3의 배수의 합을 할 필요가 없어요.
RS: 왜?
S2: 어차피 그것도 반복될 거니까요.

S2는 특정수에서 3의 배수인가를 밝히는 작업에는 반드시 계산이 필요하며, 모든 수에 대한 대수 증명은 몇 가지 경우를 통한 규칙성 확인을 통해 가능하다고 생각하였다. 연구자는 이를 대수 증명 인식에서 빗어진 문제로 보고, 질문을 이어갔다.

RS: 무엇이 반복된다는 거니?
S2: 엄청 큰 수를 넣어도 어차피 3의 배수가 되니까요. 10만을 넣든 100만을 넣든 3의 배수가 되는게 반복 되요. 그러니까 그 앞에 있는 거랑 뒤에 있는 것이 3의 배수가 되는게 반복 되요.
RS: 그럼 모든 3의 배수의 합이 3의 배수인가를 증명할 수 없는 것 아니니?
S2: 음.....앞에 3이 붙어 있으면 3의 배수가 되니까 3이 붙어있으면 계산 안 해보고도 3의 배수인가를 알 수 있을 것 같아요.

연구자는 S2가 대수 증명을 특정수로 전이하지 못하는 원인이 대수 증명 인식에 있다고 보고, 이를 확인해 보고자 재차 동일한 질문을 하였다.

RS: ('모든'을 강조하며) 모든 3의 배수에 대해 3의 배수와

3의 배수의 합이 3의 배수가 된다는 것을 어떻게 증명하지?

S2: ('모든'을 강조하며) 모든 수까지 할 필요는 없어요.

RS: 왜?

S2: 작은 수 몇 개로도 증명이 되니까요.

RS: 그게 무슨 말이니?

S2: 1, 2, 3, 4, 5까지만 해도 그 안에서 반복이 되는데 큰 수 까지 할 필요가 없잖아요.

RS: 그럼 모든 경우에 대한 증명은 못하는 것 아니니?

S2: 시간이 무한정 있으면 할 수 있어요. (혼잣말로) 아!...할 수 없나? 할 수 있는지 없는지 모르죠.

RS: (검사지의 증명을 가리키며) 그럼 이 증명은 뭔데?

S2: 잘못된 증명이에요.

RS: 왜?

S2: 모든 수를 아직 증명을 안했으니까요.

RS: (검사지의 증명을 가리키며) 저것은 무슨 수를 증명한 거니?

S2: 아무 수도 증명 안 한 거예요.

RS: 그럼 저것은 무엇을 한 거야?

S2: 알아서 증명하라고 문자로 해서 맡겨 놓은 것 같아요.

이로부터 S2는 증명과 특정수에 대한 그 적용을 동일하다고 인식하고 있지 않음을 알 수 있으며, 이는 대수 증명에서 문자로 인한 계산 불가능함에 기인한 것으로 보인다. 이런 이유에서 증명에서 나타나는 대수 조작을 '알아서 증명하라고 문자로 해서 맡겨 놓은 것'이라고 진술한 것이다. S2의 설명에서 증명은 계산해서 확인하는 것을 의미한다. 즉, S2는 대수 증명에서 특정수 대입 후 계산이 요구되는데, 이를 증명을 읽는 독자에게 전가한 것이라고 생각하고 있었다. S2는 증명에서 주어진 대수식에 근거하여 몇 개의 사례에서 성립한 사실이 모든 수로 전이되며, 대수 증명 그 자체는 계산을 남겨놓은 것이라고 생각하였다. 이것이 대수 증명을 특정수의 사례로 전이하지 못한 근본 원인이라 할 수 있다.

3) S3의 사례

(1) 종속적 일반성 인식과 표현의 괴리

S3는 '3의 배수 더하기 3의 배수는 항상 3의 배수가 되기 때문에'라는 자신의 검사 반응과 다르게, n에 어떠한 수를 넣어도 모두 3의 배수가 되기 때문에 증명이 참이라고 하였다. 이는 S3가 표면적으로 경험에 근거하여 증명을 판단한 것으로 보이지만, 사실상 대수식의 성립 여부에 근거하여 증명의 진위 여부를 판단하였음을 보여준다. 한편, S3는 면담 과정에서 증명을 자세히 살펴봄으로써 n이 같은 수여야 한다는 사실을 스스로 인식하게 되었다.

S3: n이 똑같이 들어있잖아요. 그러면 다 똑같은거 아니에요?

RS: 너는 어떻게 생각하니?

S3: 다 같은 것 같아요.

RS: 왜?

S3: (식 $3n+3n=6n$을 가리키며) 여기 n에 1을 넣으면 $3+3=6$이 되는데 이건 맞는 식이 되는데, 만약에 첫 번째 n에 1을 넣고 두 번째 n에 2를 넣는다고 하면 $6n$이 안 되요.

RS: 그 전에는 어떻게 생각했지?

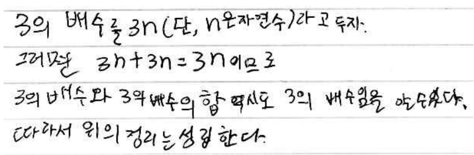
S3: 다르다고 생각했어요.

RS: 왜 그렇게 생각했지?

S3: 자연스럽게 다르다고 생각했던 것 같아요.

이상의 대화에서 S3는 동일한 n에 대한 의식 없이 다른 수를 대입해 왔으며, 이는 종속적 일반성에 대한 인식이 결여되어 있음을 보여준다. 또한 자연스럽게 다르게 생각했다는 설명으로부터 그 만큼 종속적 일반성에 대한 반성적 사고가 어려움을 알 수 있다. 그러나 표현상으로 지켜져야 할 종속성과 달리 동일 문자에 다른 수를 대입해봄으로써 증명의 문제점을 인식할 수 있었다.

이후 증명에 대한 S3의 설명은 여전히 대수식의 성립 여부에 집중되었으며, 곧 증명의 진위 여부에 대한 판단 준거가 대수식의 성립 여부임을 보여준다. 연구자는 증명이 $3+6$까지 포함하는 것인지 물음으로써 증명의 개선을 격려하였다.

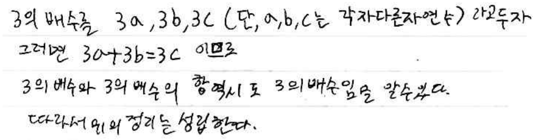


[그림 8] S3의 1차 증명 개선

[Fig. 8] The first proof improvement of S3

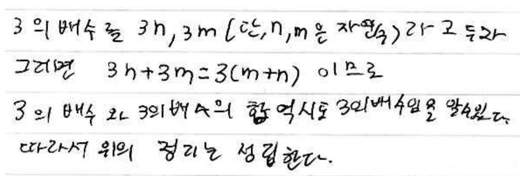
S3 자신의 사고와 연구자의 발문을 통해 사례 3+6을

포함하도록 종속적 일반성을 벗어나야 함을 인식했음에도 불구하고 [그림 8]과 같이 종속적 표현을 유지하고 있다는 것은 그만큼 변수의 종속성을 인식하는 것이 어려움을 보여준다고 할 수 있다. 이에 대한 수정을 위해 연구자는 같은 n이라는 사실을 환기시킴으로써 [그림 9]와 같은 개선을 촉진하였다.


3의 배수를 $3a, 3b, 3c$ (단, a, b, c는 각자다른자연수) 라고두자
그러면 $3a+3b=3c$ 이므로
3의 배수와 3의 배수의 합역시도 3의배수임을 알수있다.
따라서 위의 정리는 성립한다.

[그림 9] S3의 2차 증명 개선
[Fig. 9] The second proof improvement of S3

이것은 물론 증명이 될 수 없다. S3는 그것을 인식하지 못하였고, 다음 개선 과정에서 $3n+3m$의 계산이 증명을 진전시키지 못하는 원인이 되었다. 문자식의 계산력 부족이 증명을 불가능하게 만들었고, 교사의 도움을 전제로 하여 [그림 10]과 같은 증명을 유도할 수 있었다.


3의 배수를 $3n, 3m$ (단, n, m은 자연수) 라고 두자
그러면 $3n+3m=3(m+n)$ 이므로
3의 배수와 3의배수의 합역시도 3의배수임을 알수있다.
따라서 위의 정리는 성립한다.

[그림 10] S3의 3차 증명 개선
[Fig. 10] The third proof improvement of S3

이와 같이 S3는 세 번에 걸쳐 점진적으로 증명을 개선할 수 있었다.

(2) 대수 조작과 특정수 조작에 대한 개별 인식

이후 연구자는 대수 증명을 특정수로 전이할 수 있는지를 알아보았다.

RS: $3\times4+3\times5$은 3의 배수이니?
S3: (생각해 보더니) 예.
RS: 왜 3의 배수이니?
S3: $12+15=27$이고 27은 3의 배수니까요.
RS: $3\times21+3\times61$은 3의 배수이니?
S3: 잠시만요. 암산이 안 되요. (계산 후) 3의 배수가 되요.
RS: 왜?
S3: $3\times21=63$이고 $3\times61=183$인데 이것을 더한 다음 3으로 나누어보면 82가 돼서 3의 배수가 되요.
RS: $3\times246845+3\times56219$는 3의 배수이니?
S3: (즉각적으로) 3의 배수가 되는 것 같아요.
RS: 왜?
S3: 둘 다 3을 곱했으니까요.
RS: 3을 곱했다고 왜 3의 배수이니?
S3: 3의 배수는 원래 자연수에 3을 곱해서 만들어진 거니까요.

S3는 작은 수와 중간 수에서는 계산 위주의 확인을 하였지만, 큰 수에서는 즉각적으로 답하였다. 이것이 대수 증명에서 기인한 것인지를 파악할 필요가 있었다.

RS: $3\times246845+3\times56219$는 3의 배수이니?
S3: 이미 했던 거잖아요. 모두 3을 곱했으니까요.
RS: 모두 3을 곱하면 왜 3의 배수니?
S3: 3의 배수는 원래 3을 곱한거니까요.
RS: 한 개 한 개는 3의 배수인데 더한 것은 왜 3의 배수가 되니?
S3: 3의 배수 더하기 3의 배수는 3의 배수니까요.
RS: 왜?
S3: $3+6=9$가 되듯 3의 배수 더하기 3의 배수는 3의 배수가 되요.
RS: 모든 두 3의 배수의 합은 왜 3의 배수이니?
S3: $3n+3m$이 3의 배수라서요.
RS: 왜 이게 3의 배수니?
S3: 3을 곱했으니까요.
RS: 무슨 말인지 좀 더 자세히 이야기해 줄 수 있겠니?
S3: $3m+3n$은 앞에 3을 곱한거라서 3의 배수예요.

S3는 이미 증명을 하였음에도 불구하고 특정수가 왜 3의 배수인지를 묻는 과정에서는 '단지 앞에 3을 곱한 것이니까 3의 배수'라는 말을 되풀이 할 뿐, 증명처럼 3을 묶어내는 조작을 하지 않았다. 이는 3을 묶어내는 조작이 두 3의 배수의 합이 3의 배수라는 이유가 될 수 있음을 제대로 이해하지 못하였음을 보여준다.

RS: $3m$은 앞에 3이 있으니까 3의 배수가 맞아. $3n$도 마찬가지고. 그런데 $3m+3n$은 앞에 3이 없잖아! 그런데

이것이 왜 3의 배수이니?

S2: 음...이것은 3 괄호 한 다음 $m+n$하면 $m+n$에 3을 곱한거랑 마찬가지라서요.

RS: $3\times246845+3\times56219$는 3의 배수이니?

S2: 3 괄호 치고 346845 더하기 56219하면 이 두 개 더한거에 3을 곱한거니까 3의 배수가 되요.

RS: 앞에서는 왜 이렇게 대답하지 않은거야?

S2: 앞에서는 3 괄호하고 $m+n$을 생각 못했어요.

RS: 왜?

S2: 음... 다 주어져 있어서 별 심각하게 생각을 안 해도 되니까 그냥 간단하게 생각했어요.

RS: 무슨 소리니?

S2: 처음에 주어진 증명이 식이 이미 나와 있었기 때문에 새로 생각을 못했던 것 같아요.

RS: 그러면 앞에서 수를 주었을 때 왜 계산을 하였니?

S2: 음...제가 쉽게 계산할 수 있는 범위에서는 계산하는게 편했으니까요.

RS: 그럼 큰 수를 줬을 때는 왜 계산을 안 했니?

S2: 어... 둘 다 3이 있는게 갑자기 생각났어요.

S3는 대수 증명의 조작을 특정수에 적용할 생각을 갖지 못했음을 밝히고 있으며, 이는 대수 증명의 조작과 특정수의 조작을 별개의 것으로 생각했기 때문인 것으로 보인다. 예컨대 S3가 작은 수에서 즉각적으로 계산에 의존한 것은 특정수의 경우에는 대수와 달리 계산이 가능하다는 특성을 지녔기 때문이다.

V. 결론 및 제언

연구 결과에서 보듯이, 다수의 연구 참여자들은 대수 증명에 내재된 종속적 일반성에 대한 인식의 결여를 보여주었다. 연구 참여자들은 이미 일반성을 함의한 대수 표현을 이용한 풀이와 증명을 학습하였음에도 불구하고 일반성에 대한 인식 결여가 두드러진다는 사실은 그에 대한 인식이 학생들에게 얼마나 어려운 것인가를 보여준다. 따라서 일반성을 함의한 대수 표현을 본격적으로 학습하기 시작하는 1학년에서의 문자 도입 단원부터 세심하고 점진적인 교수 방법이 요구된다.

대수 증명의 종속적 일반성 인식에 어려움을 보인 3명의 학생과의 개별 면담을 통해 파악한 인지적 특성을 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 대수 변수의 종속성과 독립성을 의식 없이 사용한다. 3명의 학생 모두 대수 증명의 종속적 일반성을 의식하지 못하고, 동일 문자를 독립적으로 이해하였다. 이에 대해 S1은 '생각이 안 나서', S2는 '깊이 생각을 안 해서', S3는 '자연스럽게 다르다고 생각했던 것 같다'고 설명하였으며, 이는 3명의 학생들이 그만큼 변수의 종속성에 대해 이해하지 못하고 있음을 보여준다.

둘째, 대수 증명의 종속적 일반성에 대한 인식이 적절한 표현의 사용을 보장하지는 않는다. 학생들은 종속적 일반성을 인식한 이후에도 그를 뒷받침하는 증명 표현은 오류를 보였고 점진적 과정을 거쳐 표현이 개선되어 감을 확인할 수 있었다. S2 외의 학생 S1과 S3은 기존 대수 증명의 종속적인 특성을 인식한 이후, 곧바로 독립 변수를 도입하여 증명을 개선하지는 못하였다. S1의 경우 'n은 다를 수도 있음'을 명시하였지만 독립성을 함의하는 표현을 사용하지는 못하였고, S3의 경우는 '$3n+3n=3n$'이라고 표현하였는데 이는 두 3의 배수의 합은 3의 배수라는 것의 동의어 반복적인 표현에 불과한 것이었다. 이는 종속적 일반성에 대한 인식과 그 표현 사이에 존재하는 인지적 차이가 크다는 것을 시사한다.

셋째, 대수식의 조작적 측면에 주목하지 못하고 대수식의 성립 여부에 초점을 둔다. 이는 S2와 S3에게 보인 특징으로, 대수 증명의 옳고 그름을 제시된 대수식의 성립 여부에 초점을 두고 판단한 사례에 해당한다. 이들에게 대수식의 등호는 대칭적인 항등 개념으로 이해되어, 대수식의 항등성이 곧 대수 증명의 판단 기준이 되었다. 그러나 본 연구에서 제시된 $3m+3n=3(m+n)$에서의 등호는 대칭적인 항등 개념보다, 변형의 조작적 맥락을 지닌 것이다. 즉, 3의 배수와 3의 배수의 합은 언제든지 3이라는 인수로 묶여질 수 있다는 변형 및 조작의 맥락에서 이해되어야 증명의 의미를 적절하게 이해할 수 있는 것이다. S2, S3는 조작적 측면을 배제한 대수식의 성립 여부에만 초점을 둠으로써 증명을 올바르게 이해하지 못한 것으로 보인다.

넷째, 문자식을 포함한 대수 증명을 계산이 끝나지 않은 미완된 경우로 생각한다. 이는 S2에게 나타난 대표적 특징으로, 그는 증명에서 계산이 필요하지만 이를 증명을 읽는 독자에게 전가하고 있다고 보았다. 대수 증명에 제시된 $3m+3n=3(m+n)$에서 $m+n$의 계산이

필요하다고 본 것이다. 그러나 사실 $m+n$의 계산은 더 이상 불가할 뿐만 아니라 두 3의 배수의 합이 3의 배수가 된다는 사실에 전혀 영향을 미치지 못하며, $m+n$ 앞에 곱해진 3이야말로 3의 배수라는 사실에 결정적 영향을 미치는 것이다. 그러나 S2는 m, n에 수를 대입하면서 수가 계산되는 속성과 혼동하여 증명에서 요구되는 계산을 독자에게 전가한 것으로 인식하였다. 대수의 특성은 수가 갖는 구조적 특성에 기반하여 조작하게 하는 반면, 특정수에 의한 산술적 계산은 계산 결과에 의존하여 3의 배수임을 확인할 수 있게 된다. 따라서 후자의 특성에 몰입하여 대수 증명에서의 $3m+3n=3(m+n)$은 아직 계산의 여지가 남아있다고 생각한 것이다.

다섯째, 대수 증명의 일반성이 특정수를 갖는 구체적인 사례에 적용되지 못하였다. 이는 S1, S2, S3 모두에서 관찰된 특성이다. 세 명의 연구 참여자가 자신의 증명을 개선할 수 있도록 안내한 다음, 특정수로의 전이를 파악하기 위한 면담을 실시하였지만, 모두 특정수의 계산 가능성에 집중하여 계산을 통해 문제에 제시된 합이 3의 배수임을 확인하였다. 특히, S2는 계산이 번거로운 큰 수에서도 대수적 구조에 집중하지 못하였다. S3는 큰 수에서 대수적 구조에 집중하였지만, 이 큰 수가 왜 3의 배수인가를 묻는 질문에 대해서는 3을 묶어 내는 대수 조작을 이유로 제시하지 못하였다. 이 경우, 큰 수가 계산을 번거롭게 하여 구조를 보게 하는 데 유용하게 역할한 것은 사실이지만, 증명의 일반성을 특정수에 적용하는 데는 한계가 있었다. 결과적으로, 대수 증명에 함의된 일반성이 특정수로 전이되기가 쉽지 않음을 보여준다.

여섯째, 특정수를 이용한 구체적 사례가 학생의 인지적 변화를 유도할 수 있다. 연구자는 학생들에게 종속적 일반성의 인식을 돕기 위한 예로 $3+6$을 이용하였다. 이 특정 사례가 증명에 함의된 것인가를 질문함으로써, 문자 n이 동일하게 변한다는 대수식의 종속적 일반성 인식에 도움이 됨을 세 명의 사례를 통해 확인할 수 있었다. 즉, 특정수를 통해 대수식의 종속적 일반성 인식에 기여할 수 있었다.

이상에서 살펴본 연구 참여자들의 인지적 특성을 바탕으로 대수 증명의 일반성 이해와 적용과 관련한 다음과 같은 교수학적 시사점을 도출할 수 있다.

첫째, 대수 증명의 종속적 일반성을 의식하지 못했던 측면을 고려할 때, 학생들에게 그에 대한 인식의 경험이 제공되어야 할 것이다. 본 연구의 검사 문항은 실제로는 독립적 일반성을 요구하지만 동일 문자에 의해 종속적 일반성의 오류를 함의하는 경우이므로, 양자의 차이에 대한 인식 및 증명 맥락에서의 적절한 사용을 독려하기 위한 도구로 사용될 만하다.

둘째, 종속성의 인식 이후에도 표현상의 오류가 지속되었던 만큼, 인식과 표현 사이의 간격을 줄이기 위한 노력이 요구된다. 이를 위해 증명의 맥락에 적합한 독립적 일반성을 표현하기 위해 학생 스스로 서로 다른 문자 변수를 사용할 수 있도록 점진적인 개선을 필요로 한다.

셋째, 증명에 제시된 대수식의 등호를 정적인 항등 개념으로 인식하는 외에, 동적인 조작적 측면에서 다루는 경험이 필요하다. 수를 이용한 등식의 조작적 측면에 대한 지나친 의존이 수학적 오류를 야기시키는 문제와 반대로, 문자를 사용한 대수식은 등호가 항등 개념에 국한되어 이해되기 쉽다. 따라서 대수 증명에서 등호의 조작적 맥락에 대한 이해를 돕기 위해 대수적 조작의 기회를 제공하고 특히 수 연산과 연계하여 제시하는 것은 도움이 될 수 있을 것으로 생각한다. 이를테면, $3m+3n=3(m+n)$이라는 대수식에 대해 '$3\times21+3\times51$은 $3(21+51)$으로 변형될 수 있으므로 3의 배수이다'를 연계하는 지도가 필요할 것이다.

넷째, 대수식을 계산이 끝나지 않은 미완의 것으로 이해할 수 있는 만큼, 대수 증명의 구조적 특성이 특정수에서도 같은 방법으로 다루어져야 한다. 문자를 이용한 대수적 증명은 구조의 통찰을 용이하게 하는 특성을 지니는 것으로 파악되지만 학생들은 특정수의 계산 가능성에 초점을 맞춤으로써 대수식을 미완의 것으로 이해할 수 있는 것이다. 따라서 $3m+3n=3(m+n)$라는 조작을 특정수에 적용하더라도 m, n에 해당하는 특정수의 계산은 불필요한 작업임을 이해하도록 하는 지도가 요구된다. 본 연구에서 대수적 조작이 특정수로 전이되지 못한 것은 대수 조작의 의미가 기호 맥락에서 취급되었기 때문으로 간주된다. 대수 조작의 진정한 의미를 수용할 수 있도록 돕기 위해서는, 대수 조작이 갖는 의미가 특정수 전체를 함의한 것임을 이해시키는 연계 지도가 요구된다. 예컨대, '특정한 3의 배수의 곱 63×18이 왜 3

의 배수인가?'에 대해 $3\times(21+6)$이므로 3의 배수이며, 여기서 $21+6$은 계산할 필요가 없는 것임을 인식시키는 것이다. 이와 같은 연계 지도가 결여될 경우 학생들은 문자를 이용한 대수적 상황과 특정수의 상황을 별개로 취급할 위험이 있는 것이다. 대수 증명에서 특정수로 전이가 자동적이지 않다는 연구 결과는 그 연결을 위한 의도적인 교수학적 노력의 필요성을 보여주며, 대수 증명을 문자의 조작 이상으로 특정수의 조작과 연결할 것을 요구한다.

참 고 문 헌

김남희 (1997a). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습지도 방향 탐색. 서울대학교대학원 박사학위논문.

Kim, N.H. (1997a). *Didactical analysis of variable concept and search for the direction of its learning-teaching.* Doctoral dissertation, SNU.

김남희 (1997b). 변수(문자)의 의미 이해를 위한 고찰. 대한수학교육학회 논문집, 7(1). 345-356.

Kim, N.H. (1997b). A study for the understanding of the meaning of variables(letters). *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 345-356.

반혜진 (2005). 문자 및 변수지도시 발생하는 오개념의 분석. 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

Ban, H.J. (2005). *The analysis of misconception arising at the time of teaching letters and variables.* Master's thesis, DKU.

유혜민 (2013). 변수개념에 관련된 대수적 인지장애의 예와 지도방안 -중학교 2학년, 중학교 3학년을 중심으로-. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

Yoo, H.M. (2013). *Examples and solutions of algebraic consideration disorder related to variable: focusing on 2nd and 3rd grade in middle school. Master's thesis,* KHU.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미, 임유원 (2009a). 중학교 수학 1. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009a). *Middle school mathematics 1.* Seoul: Chunjae education.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미, 임유원 (2009b). 중학교 수학 익힘책 1. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009b). *Middle school mathematics studying book 1.* Seoul: Chunjae education.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009c). 중학교 수학 익힘책 2. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009c). *Middle school mathematics studying book 2.* Seoul: Chunjae education.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미 (2009d) 중학교 수학 익힘책 3. 서울: 천재교육.

Lee, J.Y., Choi, B.R., Kim, D.J., Song, Y.J., Yoon, S.H., & Hwang, S.M. (2009d). *Middle school mathematics studying book 3.* Seoul: Chunjae education.

장혜원, 강정기 (2013). 정리의 일반성 인식을 위한 동적 기하환경의 활용. 수학교육학연구, 23(4), 585-604.

Chang, H.W. & Kang, J.G. (2013). Using DGE for recognizing the generality of geometrical theorems. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 23*(4), 585-604.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L.(Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, 87-106, Kluwer academic publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra, In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L.(Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, 65-86, Kluwer academic publishers.

Mason, J. (2002), Questions about mathematical reasoning and proof in schools, in Abramsky, J.(Ed.) *Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum:* proceedings of the QCA international seminar, October 2002, QCA, London.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 227-289.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L.(Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, 107-111, Kluwer academic publishers.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In Sulte, A.P. & Coxford, A.F.(Eds.), *The ideas of algebra, K-12.* 1988 NCTM yearbook. 8-19.

Study on recognition of the dependent generality in algebraic proofs and its transition to numerical cases

Kang, Jeong Gi†
Namsan Middle School, Chang-Won 642-110, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

Chang, Hyewon
Department of Mathematics Education, Seoul National University of Education, Seoul 132-742, Korea
E-mail : hwchang@snue.ac.kr

Algebra deals with so general properties about number system that it is called as 'generalized arithmetic'. Observing students' activities in algebra classes, however, we can discover that recognition of the generality in algebraic proofs is not so easy. One of these difficulties seems to be caused by variables which play an important role in algebraic proofs. Many studies show that students have experienced some difficulties in recognizing the meaning and the role of variables in algebraic proofs. For example, the confusion between 2m+2n=2(m+n) and 2n+2n=4n means that students misunderstand independent/dependent variation of variables. This misunderstanding naturally has effects on understanding of the meaning of proofs. Furthermore, students also have a difficulty in making a transition from algebraic proof to numerical cases which have the same structure as the proof. This study investigates whether middle school students can recognize dependent generality and make a transition from proofs to numerical cases. The result shows that the participants of this study have a difficulty in both of them. Based on the result, this study also includes didactical implications for teaching the generality of algebraic proofs.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : algebraic proof, generality(independent/dependent), variables, transition from general proofs to numerical cases
† Corresponding author