韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/mathedu.2014.53.1.75
2014. 02. 제 53권, 제 1호, 75-92.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2014, Vol. 53, No. 1, 75-92.

수학 문제해결 과정에서 학습행위 형성 수준에 대한 연구

한인기(경상대학교)
강나경(월산중학교)

Ⅰ. 서론

수학 교수-학습 과정에서 학생들의 인지적 영역과 정의적 영역의 성취, 발달의 내용과 수준을 분석하고 진단하는 것은 수학교육의 목표를 달성하는데 중요한 기초가 된다. 수학과 교육과정(2011)은 '수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고'(p.36)와 같이 기술하면서, 성공적인 수학과 교육과정의 구현을 위해 학생들에 대한 다양한 측면의 정보를 수집, 분석하고 진단하여, 이를 수학교육의 실제에 반영하는 것이 중요함을 주장하고 있다. 특히 NCTM(2007)의 '학생이 배운 것에 대해 유용한 정보를 가지고 있다면 교사는 학생이 중요한 수학적 목표를 향하여 나아갈 수 있도록 뒷받침할 수 있다'(p.28)는 주장도 이와 같은 맥락에서 이해될 수 있을 것이다.

실제로, 국내외의 다양한 연구들(이인제 외, 2004; 서혜애 외, 2010; NCTM, 2007 등)을 살펴보면, 수학교실에서 학생들의 수학적 성취, 발달에 대한 체계적인 정보를 수집하여 학생들의 수준을 이해하고, 이를 기반으로 수학수업을 개선하는 것은 수학교사가 갖추어야 할 중요한 전문성이라는 것을 알 수 있다.

학생들의 수학적 성취와 발달을 이해하기 위한 다양한 시도들이 심리학, 수학교육학 연구에서 이루어졌다. 수학교육학 영역에서 학습 수준 이론을 발전시킨 대표적인 학자가 Freudenthal과 van Hieles이다. Freudenthal (2008)은 학습 과정에 불연속적인 여러 학습 수준이 있다고 주장하면서, '학습 과정의 여러 수준이 뚜렷하게 드러난다. 가장 낮은 수준에서는 완전 귀납법을 직접 실행하고, 다음 수준에서는 완전 귀납법 자체를 조직 원리로 의식하며 반성의 내용이 될 수 있다. 같은 수준 또는 더 높은 수준에서는 언어적 형태로 표현하게 되고, 이로부터 페아노 공리 체계에 이르기까지 전반적인 발전이 이루어진다'(p.133)고 하였다. 그리고 우정호(2004)에 의하면, Freudenthal은 실수의 학습 수준도 '수를 조작하는 수준-수의 조작법칙에 주목하고 그것을 문자를 사용하여 정식화하는 수준-논리적 관련성에 따라 그러한 법칙을 국소적으로 조직하는 수준-연역적 체계로의 대역적 조직화 수준'(p.407)으로 나누었다. 그리고 van Hieles는 기하 학습 수준을 제0수준에서 제4수준까지, 시각화 수준(사물들이 연구 대상이며 도형이 정리의 수단인 수준), 분석 수준(도형이 연구 대상이며, 도형의 성질이 정리의 수단인 수준), 비형식적인 연역 수준(도형의 성질이 연구 대상이며 명제가 정리의 수단인 수준), 연역 수준(명제가 연구 대상이며 논리가 정리의 수단인 수준), 엄밀성 수준(기하학 체계가 연구 대상인 수준)으로 나누고, 각 수준의 특징들을 체계적으로 연구하였다.

Freudenthal과 van Hieles의 수학 학습 수준 이론을 통해 학생들의 수학 학습 수준을 학술적 수준에서 나눌 수 있음이 확인되었으며, 이를 바탕으로 수학교육학 연구자들이 수학 학습 수준의 구분을 위한 다양한 징표들을 밝혀내려 시도했다는 점에서 이들의 연구에 커다란 가치를 둘 수 있다.

Freudenthal과 van Hieles의 수학 학습 수준 이론의 공통점은 수학 탐구의 대상과 정리의 수단을 중심으로 수학 학습 수준을 나누었다는 것이다. 즉 학생들이 수학 학습에서 '무엇'을 했는가(what-수학 탐구의 대상)에 초점을 맞추어 학습 수준을 나누었다. 그런데 수학 학습에서 탐구 대상에 대한 측면도 중요하지만, '어떻게'에 대

* 접수일(2013년 12월 19일), 수정일(2014년 01월 16일), 게재확정일(2014년 02월 12일)
* ZDM분류 : C33
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 학습행위, 수준, 자립성, 문제해결

한 것(how-수학 학습행위의 방법)도 간과할 수 없다. 즉 수학교실에서 학생들이 같은 무엇을 할 수 있지만, 어떻게 하느냐에 따라 다양한 개인차가 드러나기 때문이다.

본 연구에서는 학생들이 학습활동을 어떻게 수행하느냐를 중심으로 학생들의 수학적 수준을 분석할 수 있는 방법을 모색하였다. 이때 심리학적, 교수학적 바탕으로 활동이론(activity theory)을 이용하였다. 심리학에서 활동이론은 Vygotsky의 이론을 중심으로 시작하여 Leont'ev에 의해 그 개념들이 정립되었으며, El'konin, Davydov 등의 학자들에 '발달교육'이라는 교육학 이론으로 체계화, 발전되었다.

본 연구에서는 발달교육 이론에서 연구되고 있는 학습활동, 학습행위의 개념을 고찰하고, 학습행위 형성 수준에 대한 Repkina & Zaika의 이론을 분석하며, 이를 바탕으로 수학 문제해결 과정에서 학생들의 학습행위 형성 수준을 분석할 것이다. 본 연구의 결과는 수학교실에서 학생들의 수학 학습행위의 수준을 분석하는 도구로 활용될 수 있을 것이며, 수준별 수학교육에서 학생들의 개인차를 이해하는 자료로도 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 이론적 배경

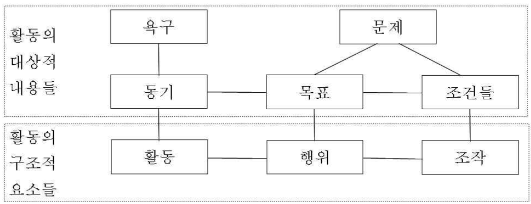
1. 활동, 학습활동, 학습행위

심리학과 철학에서 연구대상으로 삼는 활동을 심리학 사전(Zinchenko & Mecheryakov, 1996)에서는 '주변 세계와의 능동적인 상호작용으로, 이 과정에서 생명체는 목표지향적으로 객체에 작용하며 자신의 욕구를 충족시키는 주체로서 나아가게 된다'(p.95)고 정의하고 있다. 그리고 Petrovskii et al.(1986)은 활동을 '인식된 목표에 의해 조절되는 인간의 내적인(심리적인) 그리고 외적인(물리적인) 능동성'(p.99)으로 정의하였다. 즉 활동은 목표에 의해 조절되는 능동성 또는 목표를 지향하는 능동적인 상호작용으로 정의될 수 있으며, 활동은 주체, 객체, 욕구, 능동적인 상호작용, 목표지향 등의 개념과 관련된다는 것을 알 수 있다.

한편 Leont'ev(2004)는 '인간의 삶이란 무엇인가? 이것은 서로 교대하는 활동들의 체계이다. 활동에서 객체가 주관적인 형상으로 옮겨지며, 그리고 활동을 통해 활동은 활동의 객관적인 결과로, 활동의 산출물로 옮겨진다. 이러한 측면에서 보면, 활동은 과정이라고 할 수 있으며, 이 과정에서 [주체-객체] 사이의 상호 전환이 이루어진다'(p.64)고 하였다. 즉 인간의 삶은 활동들로 구성되며, 주체로서의 인간은 활동을 통해 주변 세계를 추상적으로 인식하며, 자신의 존재를 위한 산출물을 생성하게 된다. 이러한 관점은 '인간은 활동을 통해 자연, 사물, 다른 사람들에게 영향을 미치며 작용한다'고 주장한 Petrovskii et al.(1986, p.100)과도 일맥상통한다.

한편, Leont'ev(2004)는 '활동은 자신의 구조, 내적인 옮김, 전환, 발달을 가지는 체계'(p.65)라고 하였다. 활동은 고유한 구성 요소들을 가지고 있으며, 이 요소들은 유기체처럼 발달, 진화하면서 상호 전환되기도 하면서 활동은 고유의 구조를 가진다. Aimontas(2002)는 활동의 대상적 내용들로 욕구, 동기, 문제, 목표, 조건들을 추출하고, 구조적 요소들로 행위, 조작을 추출하여, 활동의 심리학적 구조를 [표 1]과 같이 제시하였다(한인기, 2013, p.140).

[표 1] 활동의 심리학적 구조(한인기, 2013, p.140)
[Table 1] Psychological structure of activity(Han, 2013, p.140)



한편, 학습활동은 활동의 한 유형이다. 일반적으로 활동은 놀이활동, 학습활동, 노동활동으로 나뉘는데, 학령기 학생들의 주된 활동은 학습활동이다(Leont'ev, 2004; Petrovskii et al., 1986; 한인기, 2013). 단편적으로 생각하면, 학습활동은 학습에 관련된 활동이며, 앞에서 기술한 주체, 객체, 욕구, 능동적인 상호작용, 목표지향 등의 개념이 학습활동과 관련된다. 그리고 학습활동의 구성요소는 [표 1]에서 살펴본 것과 같이, 학습활동의 내용적 구성 요소로 학습욕구, 학습동기, 학습문제(목표, 조건들)를 들 수 있으며, 학습활동의 구조적 구성 요소로 학습행위, 학습조작을 들 수 있다.

학습활동과 다른 유형의 활동들(놀이활동, 노동활동)의 차이와 관련하여, Repkin(1997)은 'El'konin이 1960년대에 학습활동을 묘사하면서, 학습활동의 특수성은, 학습활동의 목표와 결과는 사람의 작용이 미치는 대상의 변화가 아니라, 활동의 주체 자신의 변화라는 것에 있다. 이것이 학습활동과 다른 활동의 근본적인 차이이다'(p.16)라고 했다. 즉 학습활동은 주체인 자기 자신을 변화시키는 활동이지만, 놀이활동이나 노동활동은 물질적인 또는 정신적인 산출물의 생산에 그 목표가 있다.

한편, Leont'ev(2004)는 '개별적인 인간 활동들의 중요한 구성 요소는 활동을 구현하는 행위들이다. 도달해야 할 결과에 대한 표상에 종속된 과정, 즉 인식된 목표에 종속된 과정을 행위라고 부른다. 동기의 개념이 활동과 상호 관련된 것과 같이, 목표 개념은 행위 개념과 상호 관련된다'(p.81)고 하였다. 즉 행위는 활동의 목표를 달성하는 구체적인 과정이라 할 수 있다. 이와 관련하여, Petrovskii et al.(1986)은 '일반적으로 활동에서 도달해야 하는 목표는 활동 주체로부터 떨어져있다. 그러므로 활동 목표의 도달은, 이 목표로 향하는 이동에서 발생하는 부분적인 문제들의 순차적인 해결로 구성된다. 발생된 당면한 문제의 수행을 지향하는 활동의 구성 요소를 행위라고 부른다'(p.101)고 하였다. 결국 학습활동에서 학습목표의 도달은 학습행위들의 수행을 통해 이루어진다.

Leont'ev(2004)는 '활동은 동기가 되는 어떤 대상을 지향하며, 활동에서 동기, 대상, 목표는 항상 일치한다. ...행위의 목표, 즉 행위가 객관적으로 지향하는 기대된 결과는 행위를 불러일으키는 동기와 일치하지 않는다. 이것이 활동과 동기의 차이'(p.209)라고 하였다. 예를 들어, 인수분해를 이용한 이차방정식의 해법을 학습하는 학습활동을 생각해 보자. 이 학습활동을 불러일으키는 동기는 학생이 알고 싶어하는 '인수분해를 이용한 이차방정식의 해법'이며, 학습활동의 목표도 '인수분해를 이용한 이차방정식의 해법'이며, 학습활동의 대상도 '인수분해를 이용한 이차방정식의 해법'이다. 활동의 목표를 달성하기 위해, $x^2-7x+12=0$과 같은 문제를 해결하는 것이 포함되는데, 이러한 문제해결을 학습행위라 할 수 있다. 이때 인수분해 문제는 학습목표인 '인수분해를 이용한 이차방정식의 해법'과 조건들(이차항의 계수가 1, 일차항의 계수가 -7, 상수항의 계수가 12 등)이 결합하여 얻어진 것이다. 이 이차방정식 문제해결(행위)의 기대된 결과(목표)는 방정식의 해인 $x=3$, $x=4$인데, 이것이 문제해결의 동기(행위의 동기)는 아니다. 실제로 이 이차방정식 문제해결의 동기는 활동의 동기인 '인수분해를 이용한 이차방정식의 해법'인 것이다.

한편 이차방정식 $x^2-7x+12=0$를 해결하는 것(행위)은 첫째, 이차식 $x^2-7x+12$를 $(x-3)(x-4)$로 인수분해하고, 둘째 인수분해 결과를 이용하여 $(x-3)(x-4)=0$에서 $x-3=0$ 또는 $x-4=0$을 유도하고, 셋째 얻어진 일차방정식의 해로 $x=3$, $x=4$를 구하는 것으로 구성된다. 이렇게 행위를 구성하는 부분들이 활동의 구성 요소인 조작에 해당한다. Leont'ev(2004, p.210)는 '조작은 행위의 조건들에 의해 결정되는 행위의 내용'이라고 하였다. 결국 이차식 $x^2-7x+12$를 $(x-3)(x-4)$로 인수분해하고, 이로부터 $x-3=0$ 또는 $x-4=0$을 유도하고, 얻어진 일차방정식의 해로 $x=3$, $x=4$를 구하는 것은 조작에 해당한다.

2. 학습행위 형성의 수준

Repkina & Zaika는 학생들이 다양한 수준에서 학습행위를 수행한다고 가정하고, 학습행위의 형성 수준을 '활동의 온전한 단위로써의 학습행위의 부재', '교사와의 협력을 통한 학습행위 수행', '학습행위의 부적절한 옮김', '학습행위의 적절한 옮김', '학습행위의 자립적인 구성', '학습행위의 일반화'의 수준으로 나누었으며, 각 수준의 특징들, 진단적 징표들을 연구하였다. 그리고 이와 관련하여 다음과 같이 주장하였다.

> 학습행위의 특징을 기술한다는 것은 목표를 달성하기 위해 학생이 무엇을 어떻게 하는가에 대해 묘사하는 것을 의미한다. 학습행위는 학습과제의 수행 과정에서 학습 자료 변형의 구체적인 방법들을 포함한다. ...학습행위의 형성을 평가할 때에, 가능하면 학습문제를 해결하는 학습행위의 구체적인 구성요소로부터 벗어나 문제해결 과정에서 자립성의 정도, 수행된 학습행위 방법들의 인식, 변화된 조건들에서 학습행위 수행의 가능성 등을 주로 고려해야 한다. (Repkina & Zaika, 1993, pp.9-10)

즉 Repkina & Zaika는 인지된 목표를 달성하기 위해, 학생들이 무엇을 어떻게 수행하는가를 중심으로 학습행위의 특징, 수준을 분석하고 있다. 그리고 학습행위의 형성에 대해 수준을 구분하는 과정에서 문제해결 과정의 자립성, 수행된 학습행위 방법의 인식, 변화된 조건에서 학습행위 수행의 가능성이 중요한 변인이 된다는 것을 알 수 있다. Repkina & Zaika의 관점을 중심으로, 학습행위 형성의 수준을 살펴보자.

1) 제1수준-활동의 온전한 단위로써 학습행위의 부재

이 수준에서 학습행위는 활동의 한 구성요소로서, 하나의 온전한 단위로서 존재하지는 못하지만, 이 수준에 속하는 학생들은 학습행위의 구성요소인 조작들을 단편적으로 수행할 수는 있다. 이때 '단편적'이라는 표현의 의미는 이 조작들이 온전한 단위로서의 학습행위를 구성하는 것이 아니라, 서로 연결되지 못하는 개별적인 수준에서 조작이 수행된다는 것이다. 특히 Repkina & Zaika(1993)는 기능들의 습득 과정에서 '교사가 여러 번에 걸쳐 습득할 기능들을 보여주고 학생이 많은 횟수를 반복한 후에야 기능들을 어렵게 습득한다. 그러나 이와 같이 습득한 기능들도 지극히 견고하지는 않다'(p.24)고 했다. 결국 이 수준의 학생들은 학습행위를 구성하는 조작들을 반복을 통해 습득할 수는 있지만, 이 조작들은 의미있게 연결되어 특정한 목표를 달성하게 되는 그러한 학습행위로는 조직되지 못한다.

한편, 이 수준의 학생들은 문제를 조건들(주어진 것들)과 목표(구하는 것)로 구성된 전체성을 띤 대상으로 보지 못하며, 문제의 구성 요소들 사이의 상호관련성도 파악하지 못한다. Polya(2005)는 문제해결의 계획 작성과 관련하여, '자료와 미지인 것 사이의 관계를 찾아라'(p.xiv)고 권고하면서, 성공적인 문제해결을 위해 이에 관련된 많은 발견술을 제시하였다. 즉 문제해결에서 자료들(주어진 것들)과 미지인 것(구하는 것) 사이의 관계를 인식하고, 이들 사이의 구체적인 기능적인 종속성을 찾는 것은 문제해결의 성공적인 탐색 수행의 바탕이 된다. 그러므로 Repkina & Zaika(1993)는 '이 수준의 학생들은 자립적으로 학습문제들을 해결할 수 없다'(p.23)고 지적하였다. 즉 이 수준의 학생들은 교사의 설명과 시범에도 불구하고 정형적인 수학 문제(특히 풀이과정이 몇 개의 조작으로 구성된)조차 자립적으로는 해결할 가능성이 거의 없다.

Repkina & Zaika(1993)에 의하면, 이 수준의 학생들은 '교사의 학습행위나 다른 학생의 학습행위에 대해, 각 학습행위의 방향성, 조작들의 상호연결성은 아주 불충분하게 인식하지만, 이러한 학습행위 자체를 비교적 성공적으로 모방할 수 있다. ...그러나 과제의 유사한 실행 후에도, 학생들은 어떤 순서로 자신이 학습행위를 수행했는지 말할 수 없으며, 게다가 자신에 의해 수행된 학습행위를 자립적으로 재생하지 못한다'(p.23)고 하였다. 결국 이 수준의 학생들은 다른 사람의 학습행위를 모방은 할 수 있지만, 학습행위 자체에 대해 분석적이고 반성적으로 사고하지는 못한다. 그리하여 자신이 수행한 학습행위에 대한 질문에 엉뚱하게 대답하거나, 대답하지 못할 수도 있다. 그리고 문제의 주어진 것들과 구하는 것을 약간 바꾸거나 변형시키면, 자립적으로 문제를 해결하지 못하게 된다.

2) 제2수준-교사와의 협력을 통한 학습행위 수행

이 수준 학생의 가장 큰 특징으로, Repkina & Zaika(1993)는 '활동의 온전한 단위로써 학습행위를 추출할 수 있으며, 문제를 해결할 때에 이 학습행위를 수행할 수 있다. 그러나 학습행위의 수행을 자립적으로 하지는 못하며 오직 교사와 협력하여서만 할 수 있다'(p.24)고 하였다. 즉 학생은 '학습행위' 자체를 온전한 단위로써 인식할 수 있으며, 학습행위의 내용, 학습행위의 구성요소들을 분리할 수 있다. 이로써 학생은 학습행위를 수행할 수 있는 가능성을 가지게 된다. 이것이 제1수준과 제2수준의 큰 차이라고 할 수 있다.

그러나 Repkina & Zaika가 앞에서 지적했듯이, 이 수준의 학생은 학습행위의 실제적인 수행에서 어려움이 발생할 수 있다. 결국 어떤 학습행위를 자립적으로 수행하지는 못하며, 다른 사람의 도움을 통해서 학습행위를 성공적으로 수행하게 된다. 이와 관련하여, Repkina & Zaika(1993)는 교사의 지금 무엇을 해야 하지요?, 이제 무엇을 해야 하지요?, 이것을 어떻게 해야 하지요? 등과 같은 질문이 학생의 학습행위 수행에 도움을 줄 수 있다고 하였다. 결국 이 수준의 학생들이 성공적으로 학습행위를 수행하기 위해선, 학습행위 수행의 방법과 문제의

조건들 사이의 관련성, 학습행위를 구성하는 조작들의 체계적 조직, 조작들의 성공적 수행 등에 관련된 질문들, 조언들이 필요하다는 것을 알 수 있다.

이 수준의 학생들은 학습행위의 실제적인 수행에서 어려움을 가지기 때문에, 수학 문제의 해결에서도 어려움을 가지게 된다. 그러나 교사나 동료의 적절한 도움을 통해, 성공적으로 문제를 해결할 수 있다. 특히 이 수준의 학생들에게 Polya(2005)가 제시한 문제해결 과정(이해, 계획수립, 실행, 반성)의 다양한 발문들, 조언들은 큰 도움이 될 수 있다.

3) 제3수준-학습행위의 부적절한 옮김

제2수준과 제3수준의 큰 차이는, 제3수준의 학생은 터득한 학습행위 방법을 새로운 문제들의 해결에 사용하려고 자립적으로 시도한다는 것이다. 즉 제2수준에서는 독립적인 학습행위 수행이 어려웠다면, 제3수준에서는 학습행위를 터득하고, 이를 자립적으로 다른 문제해결에 적용하려 시도한다는 것이다. 그러나 이러한 학습행위의 적용은 합리적이며 근거있는 적용이라기보다는 무턱대고 시도하는 성격이 강하다.

변형된 문제 상황에서 이러한 자립적인 시도는 대부분 성공적이지 못하다. 이러한 실패의 원인과 관련하여, Repkina & Zaika(1993)는 '획득한 학습행위 방법을 새로운 문제의 해결로 옮기면서, 이 수준의 학생은 학습행위의 방법을 문제의 구체적인 특성들에 맞추지 못하고, 이러한 불일치를 자립적으로 조정하지 못하기 때문에, 결국 새로운 문제의 해결은 실패하게 된다'(p.25)고 하였다. 즉 제3수준의 학생들은 조건들이 변형되지 않은 문제 상황에서는 터득한 학습행위 방법을 성공적으로 사용할 수 있지만, 변형된 문제 상황에 따라 학습행위의 방법을 자립적으로 재구성하지는 못한다.

실제로 문제 상황의 변화에 따른 학습행위 방법의 재구성은 모든 학생들이 가지고 있는 수학적 능력은 아니다. Krutetskii(1968)에 의하면, '수학 문제해결에서 재능이 있는 학생들은 사고과정의 유연성, 유동성에서 차이를 보인다. 유연성은 하나의 지적 조작에서 질적으로 다른 지적 조작으로의 쉽고 자유로운 전환을 통해 나타나며, 틀에 박힌 문제해결 방법의 속박적인 영향으로부터의 자유로움, 이미 형성된 사고의 틀과 조작 체계의 재구성의 용이함을 통해 나타난다'(p.312)고 하였다. 즉 학습행위의 재구성은 사고의 유연함과 관련되며, 이것과 관련하여 학생들은 많은 개인차를 보이게 된다.

Repkina & Zaika(1993)에 의하면, '학습행위의 오류에 대한 지적, 얻어진 결과의 부정확성에 대한 지적을 통해, 학생이 다시금 보다 면밀하게 이 학습행위를 수행하도록 할 수 있다. 오직 교사의 도움에 의해, 학생은 학습행위의 방법과 문제의 조건들 사이의 연결성을 분석하며, 이들 사이의 불일치를 확인할 수 있으며, 학습행위들을 재구성할 수 있다'(p.25)고 하였다. 즉 교사의 도움이 있는 경우에만, 학생은 터득한 학습행위와 변형된 문제 사이의 불일치를 확인할 수 있으며, 변형된 문제에 적합하도록 학습행위를 재구성하여, 문제를 성공적으로 해결하게 된다.

4) 제4수준-학습행위의 적절한 옮김

제3수준과 제4수준의 차이와 관련하여, Repkina & Zaika(1993)는 '이 수준의 학생은 새로운 변형된 문제와 만나면 터득한 학습행위의 방법을 무턱대고 사용하려 시도하지 않으며, 자립적으로 변형된 문제의 조건과 기존의 학습행위 방법 사이의 불일치를 발견하고, 이에 근거하여 학습행위 방법을 재구성하려 시도하며, 학습행위 방법을 수정한다. 그러나 이러한 학습행위 방법의 자립적인 변형은 성공적이지 못하며, 교사의 도움을 통해 올바르게 학습행위 방법을 변화시킨다'(p.25)고 하였다. 즉 이 수준의 학생은 변형된 문제의 조건들을 분석하며, 이 조건들을 터득한 학습행위 방법과 관련시키며, 이들 사이의 불일치를 인식할 수 있다. 그리고 자립적으로 자신의 학습행위 방법을 변화시키려 시도한다.

이 수준의 학생은 자신의 문제해결 방법을 변형된 수학 문제에 적용하려고 자립적으로 시도한다. 이때 변형된 문제의 조건들을 분석하며 변형된 문제 상황에 자신의 문제해결 방법이 적합한지를 판단한다. 그리고 자신의 문제해결 방법과 변형된 문제의 조건들 사이에 존재하는 불일치를 자립적으로 밝힐 수 있으며, 이에 상응하여 자신의 문제해결 방법을 변형시키려 시도하게 된다. 결국 교사의 도움으로, 자신의 문제해결 방법을 변형하여, 새로운 문제를 성공적으로 해결하게 된다. 물론 정형적인 문제에서는 자신의 문제해결 방법을 이용하여 성공

적으로 해결할 수 있다.

제4수준의 학생은 반성적인 사고의 측면을 특징적으로 드러낸다. Repkina & Zaika(1993)에 의하면, '이 수준의 학생은 교사의 도움으로 성공적으로 과제를 수행한 후에, 자신의 어려움의 원인, 자신이 범한 오류들을 정확히 설명할 수 있으며, 변형된 학습행위의 방법을 반복하거나 설명할 수 있다'(p.26)고 하였다. 특히 황혜정 외(2012)에 의하면, 'Freudenthal은 수학화 과정에서 근본적으로 수준의 상승을 가능하게 하는 중요한 정신적 활동이 바로 반성적 사고라고 보았다. ...반성적 사고를 통해 학습자로 하여금 자신의 사고와 행동에 대해 당연하다고 생각했던 부분에 대해 의문을 제기함으로써, 학습자 자신의 사고와 행동을 의식하고 확실성을 추구하는 수학적 태도를 길러주는 것이 중요하다'(pp.311-312)고 하였다. 즉 학생 자신의 학습행위에 대해 돌이켜 보고, 자신이 수행한 학습행위의 어려움, 불일치, 오류 등을 진단함으로써, 학생은 다음 수준으로 나아가는 원동력을 가지게 된다.

5) 제5수준-학습행위의 자립적인 구성

이 수준의 학생은 변형된 새로운 문제와 만나면, 필요한 학습행위를 자립적으로 구성할 수 있다. Repkina & Zaika(1993)에 의하면, '이러한 학습행위의 구성은 문제의 조건들과 이미 터득한 학습행위 방법의 면밀한 분석을 바탕으로 한다. 학생은 한발 한발 나아가며 이미 알려진 학습행위 방법들을 자립적으로 재구성하며, 정확하게 변형된 새로운 문제를 해결한다. 결국 학생은 개별적이며 부분적인 문제의 해결로부터 전체 부류의 문제해결로 자립적인 옮김을 수행하게 된다'(p.26)고 하였다. 즉 이 수준의 학생은 변형된 새로운 문제의 조건들을 이미 터득한 학습행위의 방법과 연결하여 분석할 수 있으며, 분석 결과에 따라 자신의 학습행위 방법을 재구성하여, 문제를 성공적으로 해결하게 된다. 결국 제5수준의 학생은 반성적 사고를 바탕으로 자립적으로 자신의 학습행위를 재구성할 수 있는데, 이것이 제4수준과의 중요한 차이가 된다. 그러나 새로운 학습행위 방법의 탐색, 재구성은 문제상황과 직면한 그 자리에서 곧바로 이루어지는 것은 아니며, 학생은 어려움을 극복하며 변형된 문제의 조건들을 반복적으로 분석하면서 불확실성을 제거해 나아가게 된다. 이때 중요한 것은 학습행위의 재구성 과정을 학생이 자립적으로 수행한다는 것이다.

한편 학생은 재구성한 학습행위의 방법의 특징, 내용을 잘 알고 있으며, 유사한 다른 문제들을 해결할 때에 재구성된 새로운 방법을 성공적으로 이용할 수 있다.

6) 제6수준-학습행위의 일반화

제 6수준과 제 5수준의 차이에 대해, Repkina & Zaika(1993)는 '이 수준의 학생은 새로운 학습행위 방법을 구성하면서 이것의 구성요소를 인식할 뿐만 아니라, 새로운 학습행위 구성의 공통 원리들(새로운 학습행위는 무엇에 근거하는가, 새로운 학습행위의 이면에는 어떤 원리가 깔려있는가, 어떤 원리가 새로운 학습행위를 생성하는가)을 밝혀낸다'(p.26)고 하였다. 즉 제5수준에서는 변형된 문제상황을 대상으로 삼아 학습행위를 재구성할 수 있었다면, 제6수준에서는 학습행위를 대상으로 삼아 학습행위 구성의 공통 원리를 규명할 수 있게 된다. 제5수준에서 학습행위의 구성은 문제상황에 따라 문제상황의 분석을 통해 얻어졌다면, 제6수준에서는 문제상황의 분석뿐만 아니라 학습행위 구성의 공통 원리에 근거하여 얻어진다. 이러한 학습행위의 구성 방법은 이론적 일반화의 특징을 잘 보여준다.

Davydov(1996)에 의하면, '일반화의 과정에서 전체공통인 것과 특수하며 개별적인 것의 실제적인 상호관계들을 연구하고 밝히는 일반화를 내용있는(이론적인) 일반화라 부른다(경험적인 일반화에서는 다양한 분류의 형식적인 종속의 관계만이 확인된다). ...내용있는 일반화는 어떤 전체의 분석을 통해서 수행되는데, 이 분석에서는 내적 통일성의 바탕으로써의 발생적으로 출발점인, 본질적인, 전체공통인 관계가 밝혀진다'(pp.66-67)고 하였다. 제6수준에서 학생은 학습행위 구성의 출발점인, 전체공통인 원리를 분석할 수 있으며, 이러한 이론적인 일반화를 통해 학습행위를 체계적으로 재구성할 수 있게 된다.

이러한 이론적 일반화의 한 특징을 Krutetskii의 연구에서 찾아볼 수 있다. Krutetskii(1968)는 다양한 학생들의 일반화 수행을 4개의 수준으로 나누면서 일반화의 제4수준에 대해 '학생들은 다른 사람의 어떤 도움도 받지 않고, 비슷한 유형의 문제해결에 대한 어떤 연습도 없이, 정확하게 그리고 그 자리에서 어떤 어려움도 느끼지 않

[표 2] 학습행위 형성 수준의 특징(Repkina & Zaika, 1993, pp.27-28)
[Table 2] Characters of formation levels of learning action(Repkina & Zaika, 1993, pp.27-28)

수준	수준의 명칭	기본적인 진단적 징표	추가적인 진단적 징표들
1	활동의 온전한 단위로써의 학습행위의 부재	통상적인 학습행위를 수행하지 못하며, 단지 내적인 연결성 없는 개별적인 조작들을 수행하거나 학습행위의 외적인 형태를 모방할 수 있다.	학습행위의 내용을 인식하지 못하며, 학습행위에 대한 설명을 자립적으로도 교사의 도움을 받아서도 제시하지 못한다. 학습행위를 수행하지 못하며, 기능들은 어렵게 습득하지만 견고하지는 않다.
2	교사와의 협력을 통한 학습행위 수행	학습행위의 내용과 이들의 조작적 구성요소를 인식하며, 학습행위의 수행에 착수한다. 그러나 외적인 도움 없이는 자신의 학습행위를 조직하지 못하며, 이를 끝까지 완수하지 못한다. 교사와 함께하면 비교적 성공적으로 작업한다.	자신의 학습행위에 대해 설명할 수 있지만, 학습행위의 실제적인 구현에서는 어려움을 겪는다. 교사의 도움을 비교적 쉽게 받아들이며, 통제 하에서는 효과적으로 작업한다. 실질적으로 자립적인 학습행위는 부재하다.
3	학습행위의 부적절한 옮김	터득한 학습행위의 방법을 자립적으로 새로운 문제에 적용한다. 그러나 이 방법을 구체적인 문제의 조건들에 적합하도록 하기 위해 방법에 크지 않은 변화를 만드는 것조차 하지 못한다.	터득한 방법을 문제의 조건들과 연결짓지 않고 무턱대고 사용한다. 학습행위의 그러한 연결, 재구성은 오직 교사의 도움을 통해서만 가능하며, 자립적으로는 수행하지 못한다. 문제의 조건이 변하지 않으면, 자립적으로 학습행위를 성공적으로 수행한다.
4	학습행위의 적절한 옮김	새로운 문제와 터득한 학습행위 방법의 불일치를 찾아낼 수 있으며, 자립적으로 이 방법을 재구성하려 시도한다. 그러나 이 재구성은 오직 교사의 도움을 통해서만 올바르게 이루어질 수 있다.	문제의 조건들을 충분히 분석하고, 이 조건들을 알려진 방법과 정확하게 관련짓는다. 교사의 간접적인 도움을 쉽게 수용하며, 자신의 어려움의 원인들을 기술할 수 있으며, 새로운 학습행위 방법의 특징을 기술할 수 있다.
5	학습행위의 자립적인 구성	새로운 문제를 풀면서, 자립적으로 학습행위의 새로운 방법을 구성하거나 알려진 방법을 수정할 수 있다. 이러한 것을 점진적으로 할 수 있으며, 결국엔 어떤 외부의 도움 없이도 정확하게 문제를 풀 수 있다.	비판적으로 자신의 학습행위를 평가하며, 문제해결의 모든 단계에서 문제해결에 대해 설명할 수 있다. 새로운 방법의 발견은 천천히, 확신없이, 문제 조건들의 반복적인 분석을 통해 수행되지만, 모든 단계가 완전히 자립적으로 이루어진다.
6	학습행위의 일반화	학습행위 방법의 구성 원리들에 근거하며, 이 원리들로부터 새로운 방법을 이끌어 내면서(알려진 부분적인 방법의 수정이 아닌) 새로운 문제를 그 자리에서 곧바로 해결한다.	새로운 방법을 획득하면서, 이 방법의 구성요소 뿐만 아니라 구성의 원리들(즉 방법이 무엇에 근거하였는지)까지 인식한다. 방법의 서로 다른 변형들 사이의 유사성, 이 변형들과 문제의 조건들 사이의 관계를 인식한다.

고 수학 자료를 일반화한다'(p.281)고 하였다. 그리고 이러한 현상과 관련하여, Krutetskii(1968)는 '본질적이고 공통인 것을 밝히기 위해, 재능있는 학생들에 있어서 어떤 특수성들이 반복되며, 어떤 특수성들이 변화되는지를 비교하는 것이 꼭 필요한 것은 아니다'(p.285)라고 하였다. 결국 이러한 일반화는 대상의 본질, 전체공통인 관계, 속성에 근거하며, 일반화를 위해 대상들의 반복적인 비교의 결과가 반드시 필요한 것은 아니며, 처음부터 곧바로 문제를 일반화하여 해결할 수 있다. 이것은 Repkina & Zaika(1993)가 주장한 '이 수준의 학생은 학습행위 방법들의 구성 원리를 바탕으로 새로운 문제를 곧바로 해결한다'(p.26)는 것과도 일맥상통한다.

그리고 이 수준의 학생들은 새로운 문제를 접하면, 학습행위 구성의 원리에 대한 지식을 바탕으로 주어진 문제의 해결에 필요한 구체적인 학습행위를 구성하여, 새로운 문제를 성공적으로 해결한다. 그렇기 때문에, 이 수준의 학생들은 자신이 가지고 있는 기존의 학습행위의 틀로부터 자유로울 수 있으며, 새로운 문제에 유연하게 자신의 학습행위를 구성하여 접근할 수 있게 된다. 특히 새로운 문제들을 자립적으로 해결하며, 이들을 일반화하려는 경향성을 띈다.

Repkina & Zaika의 관점을 중심으로 학습행위 형성의 각 수준별 특징들과 이에 관련된 심리학적, 교수학적 논의를 살펴보았다. Repkina & Zaika는 살펴본 학습행위 형성의 6수준을 [표 2]와 같이 학생의 학습행위 형성의 수준을 진단할 수 있는 징표들을 요약하여 제시하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 문헌연구와 실험연구를 병행하였다. 문헌연구에서는 활동, 학습활동, 학습행위에 대한 국내외 문헌들을 조사, 분석하여, 활동, 학습활동, 학습행위의 개념, 구조, 구성요소 등을 연구하였다. 이 개념들은 활동이론의 핵심 개념들로, 현재 러시아 등을 중심으로 활발하게 연구되고 있다. 특히 문헌연구를 통해, 학습행위 형성의 수준에 관련된 Repkina & Zaika의 이론을 체계적으로 분석하였으며, Polya, Freudenthal, Davydov, Krutetskii 등 수학교육학자, 심리학자들의 관점을 중심으로 Repkina & Zaika의 이론을 보완하여, 학생들의 학습행위 형성 수준이 효과적으로 이루어질 수 있는 이론적 바탕을 마련하였다.

실험연구에서는 수학 학습행위 형성 수준을 파악할 수 있는 문제들을 개발하고, 이를 실험 대상인 학생들에게 해결하도록 하였다. 그리고 학생들의 수학 문제해결 결과를 분석하였으며, 문헌연구를 통해 얻어진 학습행위 형성의 각 수준별 특징들, 징표들을 기준으로 학생들의 수학 학습행위 형성 수준의 이해 가능성을 확인하였다.

본 연구의 실험 대상자를 선정하기 위해, 2013년 3월부터 3개월 정도의 기간 동안 학생들의 문제해결 수준, 특징들을 면밀히 관찰하였는데, 이때 원활한 의사소통의 가능성, 과제 수행의 성실성 등의 특징들도 관찰하였다. 이를 바탕으로 학습행위 형성의 각 수준을 대표할 수 있는 학생들을 선정하려 하였다. 특히 수학 수업시간에 [표 2]와 유사한 특징을 전형적으로 나타내는 학생들을 반복적으로 관찰하였으며, 실험 대상으로 중학교 1학년 학생 A, 학생 B, 학생 C, 학생 D, 학생 E, 학생 F의 6명을 의도적으로 표집할 수 있었다.

실험 대상으로 선정된 학생들에게는 개발된 6개의 문제가 적힌 학습지를 제공하여 풀도록 하였다. 학생의 문제해결이 끝난 후에는 문제해결에 관련된 인터뷰가 있었다. 인터뷰에서는 주로 문제해결의 실패 이유, 문제해결 오류, 문제해결 방법, 학습행위 형성 수준의 징표 등에 대한 대화가 이루어졌다. 이러한 대화를 통해, 학생의 답안에 드러나지 않는 학습행위 형성 수준에 대한 다양한 정보들을 얻을 수 있었다. 본 연구에서는 학생이 작성한 답안, 인터뷰 내용 이외의 다른 자료는 분석 대상으로 삼지 않았다.

2. 학습행위 형성 수준의 진단을 위한 문항의 개발

학생들의 학습행위의 형성 수준을 진단하기 위해, 중학교 1학년 일차함수 단원에 관련된 문제들을 이용하였다. 제1수준, 제2수준은 학습행위를 인식하여 문제를 해결하는 것에 관련되므로, 제1수준, 제2수준의 진단을 위해서 정형적인 문제로 문제 1, 문제 2를 준비하였다.

문제 1. 함수 $y=2x$에 대하여 다음 표의 x의 각 값

에 대응하는 y의 값을 빈칸에 알맞게 써넣어라.

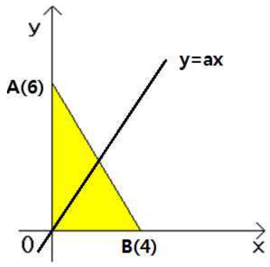
x	1	2	3	4	5
y					

문제 2. 정비례함수 $y=ax$의 x값에 대응되는 y값을 표로 나타내면 아래와 같다고 한다. 함수식을 찾아라.

x	…	-1	0	1	…
y	…	-2	0	2	…

한편, 제3수준, 제4수준은 터득한 학습행위의 방법을 새로운 문제에 옮기는 것에 관련된다. 문제 1과 문제 2에서는 표에서 주어진 함숫값을 $y=ax$에 그대로 대입하여 문제를 해결한다면, 문제 3에서는 함수의 기하학적 의미를 첨가하였다. 즉 함수 $y=ax$가 어떤 점 $A(x_1, y_1)$을 지나는 경우에, 점 A의 좌표 (x_1, y_1)을 함수 $y=ax$에 대입하여야 하는 문제 상황을 구성하였다. 문제 3을 해결하기 위해선, 문제 1, 문제 2의 해결에서 이용한 대입을 문제 3의 해결에 적용해야 한다. 그리고 문제 4는 넓이 개념을 첨가하여, 학생들의 문제해결 수행에 대한 다양한 정보를 얻을 수 있도록 하였다.

문제 3. 함수 $y=ax$가 (1, 2)를 지날 때, a의 값을 구하여라.



문제 4. 위 도형의 넓이를 반으로 나누는 정비례함수 $(y=ax)$의 식을 찾으시오.

한편, 제5수준과 제6수준은 학습행위의 자립적 구성, 일반화에 관련되므로, 이러한 학습행위는 비정형적인 문제의 해결에서 잘 관찰될 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 문제 4를 변형시켜, 비정형적인 문제 5와 문제 6을 구성하였다.

문제 5. 위 도형의 넓이를 2:1로 나누는 정비례함수 $(y=ax)$의 식을 찾으시오.

문제 6. 위 도형의 넓이를 $m:n$으로 나누는 정비례함수 $(y=ax)$의 식을 찾으시오.

본 연구에서 사용된 6개의 문제들은 주제, 문제해결 방법에서 서로 연결성을 띄도록 하였다. 만약 문제들 사이에 이러한 관련성이 없다면, 학생들의 학습행위 형성 수준을 비교하는데 어려움이 발생할 수 있을 것이다. 예를 들어, 특정한 주제 또는 특정한 문제해결 방법에 대한 문제를 학생이 경험해 보지 못했다면, 이 문제는 그 학생에게 비정형적인 문제가 될 것이며 이 문제의 해결만으로는 학생의 학습행위 형성의 수준을 정확하게 진단하는데 어려움이 발생할 것이다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 제1수준과 제2수준의 학습행위 형성의 진단

수학시간에 교과서 수준의 문제를 잘 풀지 못하는 학생들의 학습행위 형성 수준은 주로 제1수준과 제2수준에서 논의될 수 있다. 이 두 수준의 큰 차이는 교사(또는 다른 사람)의 도움을 받아서 자립적으로 문제를 해결할 수 있는가의 여부이다. 즉 제1수준에서 학생들은 모방은 가능하지만 자신의 학습행위를 온전한 전체로 인식하지 못하지만, 제2수준의 학생들은 이것이 가능하므로 도움을 받아서 문제를 해결할 수 있다.

학생 A의 문제해결을 살펴보자. 문제 1을 제시하자, 학생은 한참동안 문제해결을 시작하지 못하였다. 그래서 교사는 학생과 문제 1의 해결에 관련된 대화를 나누었다. 다음은 이 대화 내용의 일부이다.

학생 A: (한참을 문제해결을 위한 어떤 가시적인 시도 없이 가만히 앉아 있다.)
교사: 이 문제는 $y=2x$일 때, x값이 주어진 경우에 y값을 구하는 문제야. $y=2x$에서 x대신에 1을 대입하면, y값은 얼마가 되지?
학생 A: 2가 되요.

교사: 그럼 같은 방식으로 빈칸을 채워넣을 수 있겠니?

교사와의 대화 후에, 학생 A는 [그림 1]의 함수 $y=2x$의 값을 찾는 문제에서 2, 3, 6, 8, 10과 같이 답을 적었다. 위의 대화에서 보는 바와 같이, 학생 A는 문제의 의미를 전반적으로 파악하지는 못하였다. 그러나 교사의 도움을 통해 [그림 1]에 정답인 2, 4, 6, 8, 10을 적을 수 있었다. 다음은 학생 A가 [그림 1]의 답을 적은 후에, 교사와 학생이 나눈 대화의 일부이다.

문) 함수 $y=2x$에 대하여 다음 표의 x의 각 값에 대응하는 y의 값을 빈칸에 알맞게 써넣어라.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

[그림 1] 학생 A에 의한 문제 1의 해결
[Fig. 1] Solving problem 1 by student A

교사: 표에서 2, 4, 6, 8, 10의 값은 어떻게 얻었지?
학생 A: 그냥 x값에 2를 곱했어요. 구구단 2단 생각하니깐 되던데요?
교사: x의 값이 1, 2, 3, 4...로 커지면서 y값이 어떻게 변화되는지 느낄 수 있겠니?
학생 A: 구구단 2단처럼 변하는 거요?
교사: 맞아, 그런데 y값이 변하는 이유는 $y=2x$라는 함수에 의해서 변화가 생기는 거거든.
학생 A: 구구단 2단이랑,,,, $y=2x$랑... $2x$니까 구구단 2단인 건가?

이 대화의 내용을 살펴보면, 학생 A는 함숫값 개념에 대한 인식에 근거하기보다는 교사의 설명에서 $x=1$일 때 $y=2$이므로 2배를 하여 y값이 얻어진다는 생각에, 나머지의 값들도 그냥 2를 곱하여 얻어졌다는 것을 알 수 있다.

한편 학생 A의 수준을 정교하게 파악하기 위해 [그림 2]의 문제를 추가로 제시하였다. 이 문제에 대해서도 학생 A는 문제해결을 자립적으로 시작하지 못했다. 교사가 함수식 $y=ax$에 표에서 주어진 x, y값을 대입하도록 이야기를 하자, 간신히 x에는 -2를 y에는 -1을 대입하였고, 식 $-1=a\cdot(-2)$을 얻었다. 교사가 'a값을 구하려면 어떻게 해야 하지?' 등과 같은 발문을 제시했지만, 학생 A는 더 이상 문제해결을 진전시키지 못했다.

문) 정비례함수 $y=ax$의 x값에 대응되는 y값을 표로 나타내면 아래와 같다고 한다. 함수식을 찾아라.

x	…	-1	0	1	…
y	…	-2	0	2	…

$-1=a\cdot -2$

[그림 2] 학생 A에 의한 문제 2의 해결
[Fig. 2] Solving problem 2 by student A

[그림 1]과 [그림 2]의 문제해결에서 보듯이, 학생 A는 학습행위를 온전한 전체로 인식하지 못하며, 교사의 도움에도 불구하고 자립적으로 문제를 해결하지 못했다. 결국 학생 A의 학습행위 형성 수준은 제1수준이라고 결론지을 수 있다.

이제 학생 B의 문제해결을 살펴보자. 학생 B는 문제 1을 어려움 없이 성공적으로 해결하였다. [그림 3]은 학생 B의 문제해결을 보여준다.

문) 정비례함수 $y=ax$의 x값에 대응되는 y값을 표로 나타내면 아래와 같다고 한다. 함수식을 찾아라.

x	…	-1	0	1	…
y	…	-2	0	2	…

$0=a\times 0$. $y=0\cdot x$.
$a=0$.

[그림 3] 학생 B에 의한 문제 2의 해결
[Fig. 3] Solving problem 2 by student B

학생 B는 [그림 3]과 같이, 함수식 $y=ax$에서 a값을 구하는 문제를 빨리 해결하였다. 다음은 문제 2를 해결한 후에 이루어진 교사와 학생의 대화 내용의 일부이다.

교사: 문제풀이 과정을 다시 한번 살펴보아라.
학생 B: a값이 0이 아니예요?
교사: a값이 0이 된다는 것은 어떻게 구했는데?
학생 B: x대신에 0, y대신에 0을 대입하면, a값이 0이 되잖아요.
교사: 그러면 x, y대신에 표에 있는 다른 값을 넣어도 a값이 0이 되니?
학생 B: x에 1을 넣고, y에 2를 넣으면.... 어? a값이 2가 나오네요? 어떻게 된 거죠? (혼란스러워 함)
교사: $0=a\times 0$이라는 방정식은 a가 어떤 값을

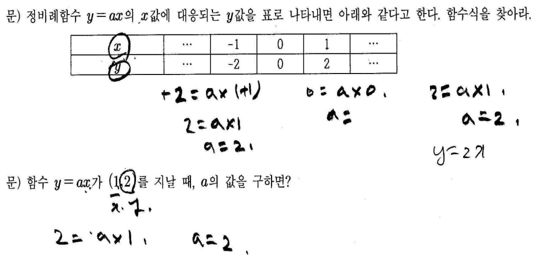
갖든 상관없이 항상 성립한단다. 항등식을 배웠지?

학생 B: 네. 그럼 a가 0이 아니라 2인가요?

교사: 그렇지.

학생 B: 그럼 처음부터 (0, 0)을 대입하면 안되는 거였구나!

처음에는 $y=ax$에서 a값으로 0을 구했지만, 교사의 도움을 통해 성공적으로 a값으로 2를 구하였다. 이 학생은 학습행위 방법인 '$y=ax$에서 a값을 구하기 위해선, 표에 제시된 x, y값을 $y=ax$에 대입하면 된다'는 것을 인식하고 있었다. 하지만, $(x, y)=(0,\ 0)$이외에 나머지 (x, y)값들도 모두 만족하도록 a값을 구해야 한다는 것을 제대로 확인하지 못했다. 이때 교사의 '그러면 x, y 대신에 표에 있는 다른 값을 넣어도 a값이 0이 되니?'와 같은 발문이 제시되었고, 교사의 도움을 바탕으로 발생된 오류를 바로잡을 수 있었다. 그러므로 학생 B는 학습행위 형성 수준에서 제2수준에 속한다고 할 수 있다.



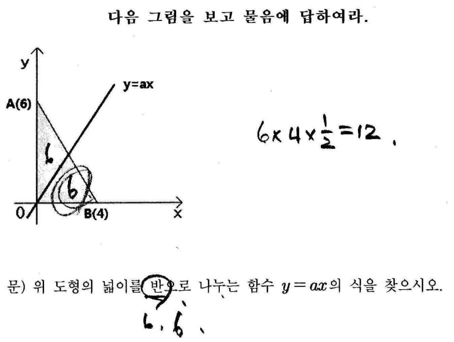
[그림 4] 학생 C에 의한 문제 2, 3의 해결
[Fig. 4] Solving problems 2, 3 by student C

2. 제3수준과 제4수준의 학습행위 형성의 진단

제3수준과 제4수준의 학생들은 정형적인 문제를 자립적으로 해결할 수 있다. 제3수준, 제4수준과 제2수준의 차이 중 하나는 제3수준과 제4수준의 학생들은 터득한 학습행위의 방법을 새로운 문제의 해결에 사용하려고 자립적으로 시도한다는 것이다. 만약 터득한 학습행위의 방법이 새로운 문제, 변형된 문제의 조건에 적합하지 않는 경우에는 학습행위 방법을 수정해야 하는데, 여기서 제3수준의 학생들과 제4수준의 학생들의 차이가 발생한다.

학생 C의 문제해결을 살펴보자. [그림 4]에서 보는 바와 같이, 학생 C는 자립적으로 정형적인 문제인 문제 2, 문제 3을 해결하였다.

이제, 학습행위 방법의 옮김에 관련된 학생 C의 문제해결을 살펴보자. 문제 3을 해결한 후에, 학생 C에게 문제 4를 제시하였다. 문제 3에서는 함수 $y=ax$와 이 함수의 그래프가 지나는 점 (1, 2)가 주어진 경우의 문제해결이었지만, 문제 4에서는 함수 $y=ax$와 다른 조건(도형의 넓이에 대한)이 주어진 경우에 a값을 구해야 한다. 즉 문제 4에서는 두 직선의 교점을 찾아서 문제 3과 같이 해결해야 한다.



[그림 5] 학생 C에 의한 문제 4의 해결
[Fig. 5] Solving problem 4 by student C

학생 C는 문제 4의 해결을 위한 시도는 하였지만, 변형된 문제상황에 적합하도록 자립적으로 자신의 문제해결 방법을 변형시키지는 못했다. 학생 C가 [그림 5]와 같이 문제해결을 제시한 후에 이루어진 교사와 학생의 대화 내용의 일부이다.

교사: 앞의 문제를 풀었던 방법으로 이 문제를 풀 수도 있지 않을까?

학생 C: 아마 그럴걸요.

교사: 그렇다면, 앞 문제를 풀었던 방법으로 이 문제를 풀어봐라.

학생 C: (문제만 바라만 보고 있다)

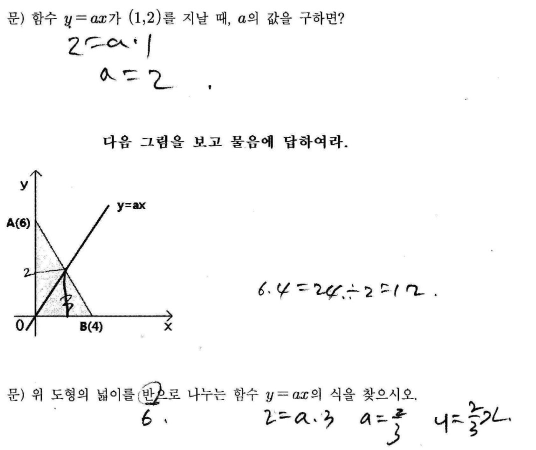
교사: (잠시 후) 앞 문제와 이 문제는 어떤 점이 같고, 어떤 점이 다르지?

학생 C: (잠시 아무 말 없이 시간이 흐른다)

교사: 두 문제 모두 $y=ax$에 대해 a값을 구하는 것은 같지? 앞 문제에서는 $y=ax$이 지

나는 점이 주어졌고, 지금 풀어야 하는 문제는 그 점이 없잖아.
학생 C: 네
교사: 문제의 조건에 맞도록 문제풀이 방법을 생각해 낼 수 있을까?
학생 C: (아무 말 없이 시간이 흐른다)
교사: (그림을 가리키며) 교점의 좌표를 한번 찾아볼래?
학생 C: 네

결국 교사의 발문을 바탕으로, [그림 5]에서 두 직선의 교점 (2, 3)을 찾아냈으며, [그림 5]의 변형된 문제상황에 맞는 문제해결 방법을 찾아낼 수 있었다. 즉 문제 3의 해결에 이용된 학습행위 방법을 [그림 5]에 제시된 새로운(변형된) 문제상황에 적합하도록 자립적으로 변형시키지는 못했다. 그렇지만 교사의 도움으로 [그림 5]의 변형된 문제를 성공적으로 해결할 수 있었다. 그러므로 학생 C는 학습행위 형성 수준에서 제3수준에 속한다고 할 수 있다.



[그림 6] 학생 D에 의한 문제 3, 4의 해결
[Fig. 6] Solving problems 3, 4 by student D

한편, 학습행위 방법의 옮김에 관련된 학생 D의 문제해결은 [그림 6]과 같다. 함수 $y=ax$가 점 (1, 2)를 지날 때, a값을 구하는 문제는 어떤 어려움도 없이 그 자리에서 쉽게 해결하였다. 그리고 문제 4의 해결에서도 자립적으로 그 해결 방법을 구성하였다. 그런데 학생 D는 [그림 6]에서 보는 바와 같이, 교점의 좌표를 구하여 식 $y=ax$에 대입할 때에 x좌표와 y좌표를 바꾸어서 $x=a\cdot 3$와 같이 대입하여 문제를 해결하였다.

문제해결 후에, 교사는 '풀이를 전반적으로 훑어보라'는 말을 하였다. 그러자, 학생 D는 '아! x와 y의 좌표를 바꾸어 넣었네요!'라고 하면서 자신이 범한 오류를 자립적으로 지적하고, 곧바로 수정하여 정답을 얻었다.

학생 D는 터득한 학습행위 방법을 변형된 문제의 해결로 적절하게 옮길 수 있었으며, 교사의 발문을 통해 자신이 범한 오류를 정확히 찾아서 정답을 찾았다. 그러나 문제 5, 6에 대해서는 타당한 접근을 제시하지 못했다. 그러므로 학생 D는 학습행위 형성 수준에서 제4수준에 속한다고 할 수 있다.

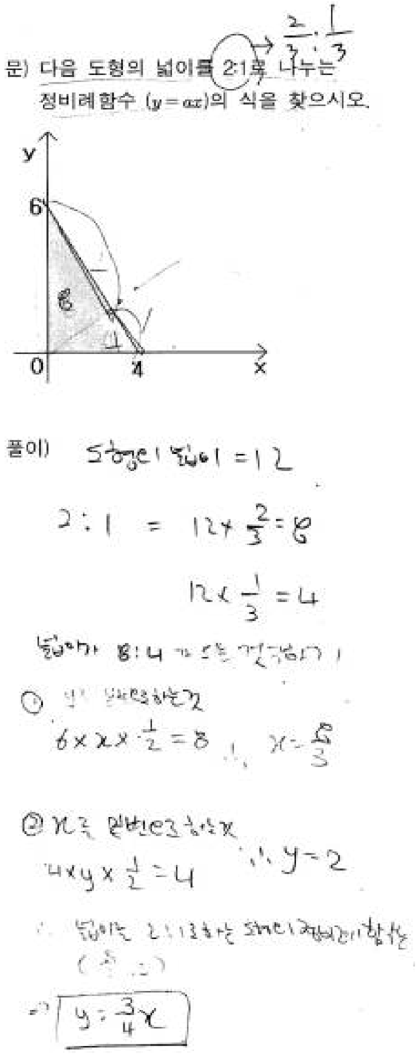
3. 제5수준과 제6수준의 학습행위 형성의 진단

학습행위 형성의 제3수준과 제4수준에서는 정형적인 문제의 해결, 터득한 학습행위 방법의 옮김을 전형적인 특징으로 들 수 있다면, 제5수준과 제6수준은 새로운 문제해결을 위한 학습행위의 자립적인 구성을 전형적인 특징으로 들 수 있다. 즉 제5수준과 제6수준은 학습행위 방법의 옮김을 넘어서, 필요한 학습행위 방법을 구성(또는 재구성)할 수 있는 수준에 해당한다. 그러므로 제5수준과 제6수준을 진단하기 위해선, 정형적인 문제로는 불충분하며 비정형적인 문제상황에서 학생들의 학습행위를 분석해야 한다.

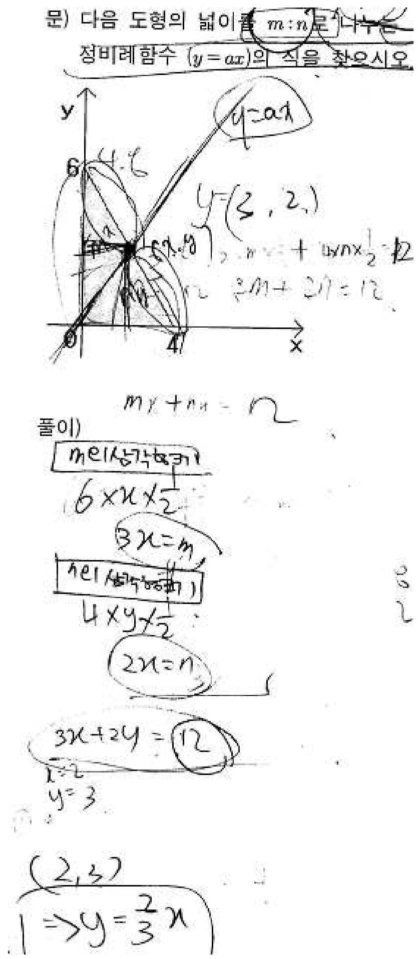
학생 E의 문제해결을 살펴보자. [그림 7]에서 보는 바와 같이, 학생 E는 자립적으로 비정형적인 문제의 해결을 시도하였다. 이때 문제 5는 두 개의 답을 가지지만, 하나만 구하였다. 즉 변형된 문제상황에서 필요한 학습행위를 자립적으로 구성하지 못했다.

학생 E가 [그림 7]과 같이 문제해결을 제시한 후에, 교사는 학생과 문제해결에 대해 대화를 나누었다. 다음은 교사와 학생의 대화 내용의 일부이다.

교사: 문제를 다 풀었니?
학생 E: 네
교사: 문제에서 도형의 넓이를 2:1로 나눈다는 것은 어떤 의미이지?
학생 E: 큰 삼각형의 넓이가 12잖아요. 그럼 하나는 8이 되고, 하나는 4가 되게 나누라는



[그림 7] 학생 E에 의한 문제 5의 해결
[Fig. 7] Solving problem 5 by student E



[그림 8] 학생 E에 의한 문제 6의 해결
[Fig. 8] Solving problem 6 by student E

거잖아요.
교사: 그럼 OO이는 어떤 것을 8로 했는데?
학생 E: 위에 있는 삼각형이요.
교사: 왜 위에 있는 삼각형만 넓이가 8이어야 하니?
학생 E: 다시 풀어볼게요.

교사와의 대화를 통해, 학생 E는 문제의 두 가지 해가 있다는 것을 깨달았다. 그런 다음에, 자립적으로 문제 5의 두 가지 해를 모두 구하였다. 즉 학생 E는 [그림 7]과 같이 처음에는 주어진 비정형적인 문제에 대해 적합한 학습행위 방법을 자립적으로는 구성하지 못했지만, 교사와의 대화를 통해 비정형적인 문제에 대한 학습행위

방법을 자립적으로 구성하였다. 이제 문제 6에 대한 학생 E의 풀이인 [그림 8]을 살펴보자.

[그림 8]에서는 $y=ax$와 주어진 직선의 교점을 (x, y)라 놓으면, 나누어 얻어진 두 삼각형의 넓이는 $3x$, $2y$가 된다. 학생 E는 $3x+2y=12$라 놓고, 이 부정방정식의 특수해 (2, 3)를 구했다. 이로부터 $y=ax$로 $y=\frac{2}{3}x$를 구했으나, 더 이상의 진척은 없었다. 즉 문제 6의 조건에 상응하는 학습행위 방법을 구성하지 못했다. 결국 학생 E는 학습행위 형성 수준에서 제5수준에 속한다고 할 수 있다.

이제 학생 F의 문제해결을 살펴보자. [그림 9]에서와 같이, 학생 F는 문제 5를 자립적으로 해결하였다. 한편 학생 F는 [그림 10]과 같이 문제 6도 자립적으로 해결하여 정답을 얻었다. 다음은 문제 5와 문제 6을 해결한 후에, 교사와 학생 F가 나눈 대화의 일부 내용이다.

교사: 문제를 다 잘 풀었네. 이 문제를 푸는 과정을 이야기해 줄 수 있겠니?

학생 F: 앞에 문제랑 다 같은 방식인데, 넓이를 $m:n$으로 나누는 것만 달라요. 위에 삼각형의 넓이가 $12\times\frac{m}{m+n}$이고 아래 삼각형의 넓이가 $12\times\frac{n}{m+n}$일 때랑, 반대로 했을 경우를 생각해주면 되요.

교사: 이 문제를 푸는데 핵심적인 것은 무엇이지?

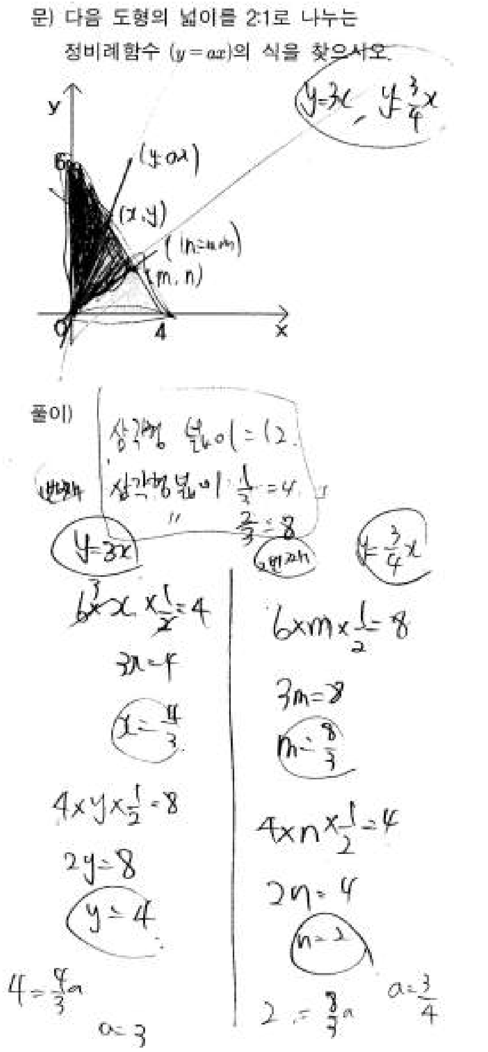
학생 F: 앞의 문제에서와 같이 어떤 넓이로 나누느냐와 상관없이, 정비례함수랑 삼각형의 교점이 $\left(\frac{2m}{m+n}, \frac{3n}{m+n}\right)$, $\left(\frac{2n}{m+n}, \frac{3m}{m+n}\right)$가 됨만 알면 문제는 바로 풀려요.

교사: 이 문제(문제 6)과 같은 방법으로 해결할 수 있는 유사한 문제는 뭐가 있을까?

학생 F: (잠시 고민) 음, 넓이를 $l:m:n$으로 나누는 함수를 구하라는 문제 같은 거요? 아, 어려워..
그런데 이건 안될 것 같아요. 아니, 안된다기보다 너무 복잡해요.

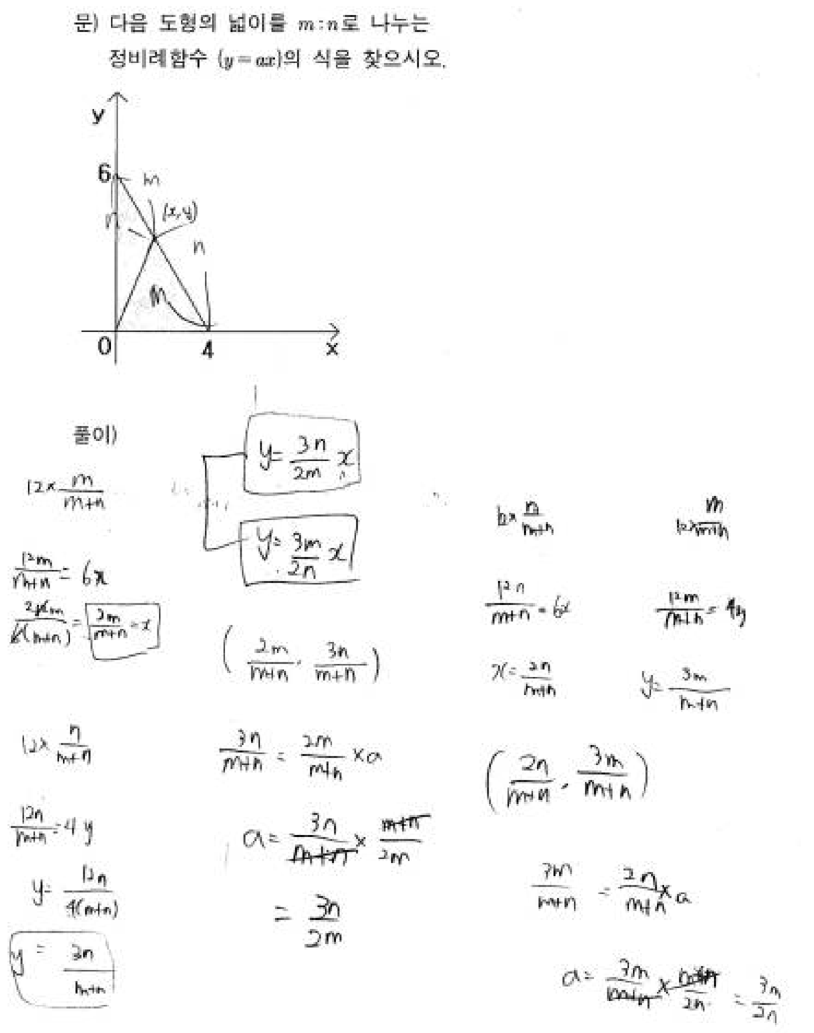
교사: 왜 그렇게 생각하지?

학생 F: 넓이를 3개로 나누면 어느 삼각형의 넓이가 l이고 m인지 모르니까 더 복잡해져요. 너무 많아요. 식도 복잡하고... 차라리 도형을 삼각형 말고 사각형으로 바꿔도 다른 문제가 될 것 같고..



[그림 9] 학생 F에 의한 문제 5의 해결
[Fig. 9] Solving problem 5 by student F

교사와 학생 F의 대화에서 보았듯이, 학생 F는 문제해결 방법을 정확하게 인식하고 있으며, 문제해결의 핵심적인 내용, 학습행위의 원리를 인식하고 있었다. 그리고 이 원리를 일반화하여 해결할 수 있는 문제도 제시하



[그림 10] 학생 F에 의한 문제 6의 해결
[Fig. 10] Solving problem 6 by student F

였다. 그러므로 학생 F는 학습행위 형성 수준에서 제6수준에 속한다고 할 수 있다.

V. 결론 및 제언

수학교육학에서 학생들의 성취, 발달의 내용과 수준을 이해하는 것은 중요한 문제이다. 학생의 수학 학습 수준에는 학생의 수학 탐구 대상뿐만 아니라 수학 학습 행위 방법도 중요한 영향을 미치게 된다. 본 연구에서는 학습활동, 학습행위의 개념을 고찰하고, 학습행위 형성 수준에 대한 Repkina & Zaika의 이론을 분석하였으며, 이를 바탕으로 수학 문제해결 과정에서 학생들의 수학 학습행위 형성 수준을 탐구하였다.

본 연구에서는 문헌연구를 통해 활동, 학습활동, 학습행위의 개념, 구조, 구성요소 등을 조사하였으며, 학습행위 형성 수준과 관련하여 Repkina & Zaika의 이론에 주목하였다. Repkina & Zaika는 문제해결 과정에서 자립성, 학습행위 방법의 인식, 변형된 조건에서 학습행위 수행을 중심으로, 학습행위의 형성 수준을 '활동의 온전한 단위로써의 학습행위의 부재', '교사와의 협력을 통한 학습행위 수행', '학습행위의 부적절한 옮김', '학습행위의 적절한 옮김', '학습행위의 자립적인 구성', '학습행위의 일반화'의 수준으로 나누었다. 본 연구에서는 Repkina & Zaika의 연구를 다른 학자들의 관점과 비교하면서, 각 수준의 특징들, 진단적 징표들을 분석하였다. 실험연구에서는 중학교 1학년 학생 6명을 의도적으로 표집하여, 개발된 수학 문제를 풀도록 하였으며, 학생의 문제해결 과정과 사고에 관련된 인터뷰를 하였다. 이를 바탕으로, 학생들의 학습행위 형성 수준을 탐구하였다.

제1수준과 제2수준의 학습행위 형성 수준의 진단을 위해서 교과서 수준의 정형적인 문제를 이용하였다. 일반적으로 정형적인 문제들을 잘 풀지 못하는 학생들이 제1수준, 제2수준에 관련된다. 제1수준과 제2수준의 차이는 교사(다른 사람)의 도움을 받아 자립적으로 문제를 해결할 수 있는가를 통해 확인할 수 있었다. 제1수준 학생은 문제해결 방법(학습행위)을 온전한 전체로 인식하지 못하기 때문에, 다른 사람의 도움에도 불구하고 자립적으로는 문제해결을 완성하지 못했다.

제3수준과 제4수준의 학생들은 정형적인 문제를 자립적으로 해결할 수 있었다. 제3수준과 제4수준의 학생들은 터득한 학습행위의 방법을 새로운 문제의 해결에 사용하려고 자립적으로 시도하였지만, 제2수준의 학생은 그렇지 못했다. 이때 제4수준의 학생은 터득한 학습행위의 방법이 변형된 문제에 적합하지 않으면 학습행위 방법을 자립적으로 수정했지만, 제3수준의 학생은 교사의 도움이 필요했다.

학습행위의 형성 수준을 정교하게 진단하기 위해서는 문제해결의 결과를 분석하는 것뿐만 아니라, 문제해결 과정, 사고 과정에 대한 인터뷰가 필요했다. 본 연구서는 인터뷰에서 성공적이지 못한 문제해결의 도움, 왜 그렇게 해결했는지, 해결 방법을 다른 문제로 옮길 수 있는지, 문제해결의 근거는 무엇인지 등의 주제를 다루었으며, 제1수준에서 제6수준의 모든 수준에서 학생들의 수준 진단을 위해 체계적으로 이루어졌다.

제5수준과 제6수준의 학생들은 새로운 문제해결을 위한 학습행위를 자립적으로 구성할 수 있었다. 그러므로 제5수준과 제6수준을 진단하기 위해, 본 연구에서는 비정형적인 문제를 이용하였다. 제5수준의 학생은 앞의 4개 수준의 문제들을 곧바로 해결하였지만, 새로운 문제에 대해 성공적으로 학습행위 방법을 구성하는데 어려움을 가졌으며, 교사의 도움을 통해 성공적으로 구성할 수 있었다. 반면에, 제6수준의 학생은 비정형적인 문제의 해결 방법을 자립적으로 구성할 뿐만 아니라, 문제해결의 핵심적인 내용, 학습행위의 원리를 인식하였다. 이 학생은 이론적 일반화를 자립적이고 성공적으로 수행하였다.

본 연구에서는 각 수준에 상응하는 문제들을 하나씩 개발하여 학생들의 문제해결, 인터뷰를 통해, 학생들의 학습행위 형성 수준을 조사하였다. 본 연구를 통해 학습행위 형성 수준의 진단 가능성이 확인되었으며, 후속 연구를 통해 이를 좀더 체계적으로 발전시킬 필요가 있을 것이다.

본 연구의 결과는 학생들의 수학 학습행위 수준을 진단하는 한 방법으로 활용될 수 있을 것이며, 수준별 수학교실 등에서 학생들의 개인차를 이해하는 이론적 자료로도 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호).

Ministry of Education, Science and Technology. (2011). *Mathematics Curriculum.*

서혜애 외 (2010). 과학·수학교사 생애주기 연수체제 구축을 위한 연구, 서울: 한국과학창의재단.

Seo, H. et al. (2010). Lifelong Professional Development System for Inservice Teachers of Science and Mathematics, Seoul: KFASC.

우정호 (2004). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대출판부.

Uoo, J. (2004). *Principles and Methods of Learning-Teaching in Mathematics*, Seoul: SNU press.

이인제 외 (2004). 수학과 교사의 학생 평가 전문성 신장

모형과 기준, 서울: 한국교육과정평가원. (연구보고 RRE 2004-5-6)

Lee, I. et al. (2004). An Exploratory Study of Professional Standards of Korean Secondary School Mathematics Teacher's Assessment of Students, Seoul: KICE.

한인기 (2013). Davydov의 활동이론에 기반한 초등학교 수학교과서의 내용 분석, East Asian Mathematical Journal 29(2), pp.137-168.

Han, I. (2013). An Analysis of Mathematics Textbook's Contents Based on Davydov's Activity Theory, *East Asian Mathematical Journal 29*(2), pp.137-168.

황혜정 외(2012). 수학교육학신론, 서울: 문음사.

Hwang H. et al. (2012). *New Theories of Mathematics Education*, Seoul: Mooneumsa.

Aismontas B. B. (2002). *Obshaya psihologiya*, Vlados press.

Davydov V. V. (1996). *Teoriya razvivayushego obucheniya*, Moscow: Intor.

Freudenthal H. (2008). 프로이덴탈의 수학교육론 (우정호 외 역), 서울: 경문사. (원저 1991년 출판)

Freudenthal H. (2008). *Theory of Mathematics Education of Freudenthal*, Seoul: Kyungmoonsa. (Translated by Uoo, J. et al.)

Krutetskii V.A. (1968). *Psihologiya matematicheskih sposobnoctei shkolnikov*, Moscow: Prosveshenie.

Leont'ev A. N. (2004). *Deyatelnocti, soznanie, lichinosti*, Moscow: Academia.

NCTM (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준 (류희찬 외 역), 서울: 경문사. (원저 2000년 출판)

NCTM (2007). *Principles and Standards for School Mathematics*, Seoul: Kyungmoonsa. (Translated by Lew, H. et al.)

Petrovskii A.V. et al. (1986). *Obshaya psihologiya*, Moscow: Prosveshenie.

Polya G. (2005). 어떻게 문제를 풀 것인가? (우정호 역), 서울: 교우사. (원저 1971년 출판)

Polya G. (2005). *How to Solve it*, Seoul: Kyowoosa. (Translated by Uoo, J.)

Repkin V.V. (1997). *Razvivayushee obuchenie i uchebnaya deyatelnocti*, Riga.

Repkina G.V. & Zaika E.V. (1993). *Otsenka urovnya sformirovannosti uchevnoi deyatelnosti*, Tomsk: Peleng.

Zinchenko V.P. & Mecheryakov B.G. (1996). *Psihologicheskii Slovari*, Moscow: Pedagogika-press.

A study on learning action formation levels in the process of mathematics problem solving

Han Inki
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University
E-mail : inkiski@gnu.ac.kr

Kang Nakyung
Weolsan Middle School, Kimhae, Gyeongsang-namdo
E-mail : aneve2@naver.com

In this paper, we summarize briefly some of the most salient features of Repkina & Zaika's theory of learning action formation levels. We concretize Repkina & Zaika's theory by comparing various points of view of Uoo, Polya, Krutetskii, and Davydov et al. In this study we are able to diagnose students' learning action formation levels in the process of mathematics problem solving. In addition we use interview method to collect various information about students' levels. As a result we suggest data related with each level of learning action formation, and characteristics of students who belong to each level of learning action formation.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : learning action levels, activity theory, problem solving