韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.1.97
제 28집 제 1호, 2014. 2. 97-130

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 1, Feb. 2014. 97-130

유추를 통한 조립제법 탐구활동 사례 연구

정 미 린 (고려대학교 대학원)
황 우 형 (고려대학교)†

본 연구의 목적은 조립제법 소재의 탐구활동에서 나타난 고등학생들의 사고 과정을 분석하여 유추의 양상을 조사하는 것이다. 인문계 고등학교 1학년 학생 2명을 대상으로 질적 사례연구로 수행되었다. 자료의 분석을 위하여 연구자가 제안한 유사성 분류 틀과 Gentner의 Structure-mapping Model(구조사상 모형, 줄여서 SMM)을 이용하였다. 두 학생 모두 유추를 도구로 사용하여 2차 이상의 조립제법을 발견하였으나, 유추적 사고의 능력에 따라 수학적 발견에 차이를 보였다. 탐구활동 과정에서 표면 유사성은 유추에서 중요한 역할을 수행하였다. 구조 유사성에 근거한 유추는 학생들도 수학자처럼 탐구하고 발견할 수 있도록 하였으며, 체계성의 원리에 의한 유추는 다른 영역에 대한 예측과 설명을 가능하게 하였고, 절차 유사성에 의한 유추는 내면화를 이끌어 냈다. 또한 유추의 성격이 도구적, 발견적이고 또한 반성적이라는 결론을 얻었다.

Ⅰ. 서론

‘인생은 여행이다’는 인생을 여행에 비추어 설명하고 이해하려는 비유적 표현이다. 즉, 인생이라는 설명하기 어려운 상황을 여행이라는 비교적 익숙한 경험에 대입하여 설명함으로써 인생에 관한 이해를 촉진하는 것이다. 이러한 비유적 사고에서 사용되는 기제가 유추이다. 유추를 활용하면 여행이라는 제한된 경험을 통하여 인생이라는 아직 다 경험하지 못한 새로운 영역을 추측할 수 있다. 이렇듯 유추란 낯설고 새로운 영역을 접하였을 때 유사하고 친숙한 영역에 기초하여 사고를 하도록 돕는 논리적 추론의 한 형태이다.

그러나 여행에 근거하여 인생을 유추하는 것은 분명히 수학적 유추 또는 과학적 유추와는 차이가 있다. Gentner(1982)는 문학에서 사용되는 유추와 수학 및 과학에서 사용되는 유추를 구별하였다. Gentner에 의하면 문학에서 사용되는 유추는 표현적 유추(expressive analogy)이고, 수학 및 과학에서 사용되는 유추는 설명적 유추(explanatory analogy)이다. 문학적 유추(literary analogy)라 할 수 있는 표현적 유추는 은유에 가까우며, 다양한 해석이 가능하고 따라서 어떤 내용을 기반으로 유추하였는지 파악하기 어려울 때가 있다. 한편, 수학적 유추(mathematical analogy) 또는 과학적 유추(scientific analogy)라 할 수 있는 설명적 유추는 어떤 대상에 근거하여 유추가 이루어졌는지 쉽게 알 수 있다. Gentner는 표현적 유추와 설명적 유추의 이러한 성질을 각각 다양성(richness) 및 명확성(clarity)이라고 하였으며, 명확성은 설명적 유추 즉, 수학적 유추의 가장 중요한 특징이라고 하였다(pp. 124-125).

Alexander, White & Daugherty(1997)는 수학적 사고에서 사용되는 수학적 유추를 더욱 구체적으로 다음과 같이 설명하였다. 어떤 수학 기호를 그 수학 기호가 의미하는 개념과 연결할 때 나타나는 사고 과정은 유추에

* 접수일(2014년 1월 10일), 심사(수정)일(1차: 2014년 2월 4일, 2차: 2014년 2월 11일), 게재 확정일(2014년 2월 14일)
* ZDM 분류 : C34
* MSC2000 분류 : 97C99
* 주제어 : 유추, 유사성, 구조사상, 구조사상 모형, 장제법, 조립제법
† 교신저자 : wwhang@korea.ac.kr

기초한 사고이다. 두 개의 서로 다른 수학 대상에서 미묘하지만 중요한 차이를 인식할 때 나타나는 사고 과정은 유추를 수반한다. 또한, 어떤 수학적 성질을 추상화된 대상과 연결할 때 나타나는 사고 과정 역시 유추를 동반한다(p. 119). 이렇듯 Alexander, White & Daugherty는 수학적 이해의 전반에 걸쳐서 유추가 나타난다고 보았다. 즉, 유추란 수학적 사고의 핵심이자 가장 중요한 요소 중 하나이다. 따라서 유추적 사고가 가능하다면 수학적 사고의 핵심적 부분이 가능하다고 볼 수 있다.

수학교육에서 유추적 사고에 관한 선행연구들을 살펴보면 유추의 기능을 다음 세 가지로 정리할 수 있다. 첫째, 유추는 개념의 이해를 촉진시키다(고상숙, 김규상, 2003; 김용태, 신봉숙, 최대욱, 이순희, 2005; 박미미, 이동환, 이경화, 고은성, 2012). 둘째, 유추는 문제해결의 발판을 제공한다(박현정, 이종희, 2006; 이종희, 김선희, 2002; English, 1997; Gholson, Smither, Buhrman, Duncan, & Pierce, 1997; Novic, Holyoak, 1991; Richland, Holyoak, & Stigler, 2004). 셋째, 유추는 발견의 도구적 역할을 수행한다(양기열, 이의진, 2011; 이경화, 2009).

유추의 이러한 기능들 중에서도 유추적 사고 활동을 통해 학생들이 스스로 탐구하고 그 결과 새로운 수학적 사실들을 발견할 수 있다는 "유추의 발견적 도구의 역할"을 강조하는 견해(서보억, 2009; 신은아, 2004; 최남광, 유희찬, 2009; 한인기, 이상근, 2000; Polya, 1954; VanLhen, 1983)가 많다. 그럼에도 불구하고, 실제로 유추가 어떤 형태로 학생들의 수학적 발견을 돕는지를 알아보는 연구는 많지 않으며 그나마도 영재학생들을 대상으로 한 연구들로 그 소재 또한 기하로 한정되어 있다.

수학적 탐구에서 유추를 매개로 하여 학생들의 사고를 자극하면, 기존의 수학 교실에서는 구현하기 어려웠던 "학생들이 주체가 되는 발견적 수학 활동"을 할 수 있을 것이다. 따라서 본 연구에서는 인문계 고등학교 학생들을 대상으로 유추의 발견적 도구의 성격에 초점을 두고 연구를 수행하였다. 학생들은 조립제법을 소재로 하여 아이디어를 탐구하고 자신들의 탐구에 기초하여 수학적 발견을 하게 된다. 그리고 자연수 n에 대하여 "n차 조립제법(synthetic division)"을 "다항식의 나눗셈에서 나누는 식의 차수가 n차인 조립제법"이라고 정의하였으며, 기호로는 s_n으로 나타내고자 한다. 또한, 자연수 n에 대하여 "n차 장제법(long division)"을 "다항식의 나눗셈에서 나누는 식의 차수가 n차인 장제법"이라고 정의하였으며, 기호로는 l_n으로 나타내고자 한다.

$$(x^3-5x^2-3x+15)\div(x-5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
5 & 1 & -5 & -3 & 15 \\
 & & 5 & 0 & -15 \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

<그림 Ⅰ-1> 1차 조립제법의 예: 기호로 s_1

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x+5 \\
\hline
x^2-x+2 & 3x^3+2x^2-2x+20 \\
 & 3x^3-3x^2+6x \\
\hline
 & \quad 5x^2-8x+20 \\
 & \quad 5x^2-5x+10 \\
\hline
 & \qquad -3x+10
\end{array}$$

<그림 Ⅰ-2> 2차 장제법의 예: 기호로 l_2

본 연구의 목적은 조립제법 소재의 탐구활동에서 고등학생들이 나타내는 유추의 양상을 분석하는 것이었으며 연구문제는 다음과 같이 설정하였다.

1. 고등학생들이 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에서 유추는 어떤 양상으로 나타나는가?
   1-1. 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에서 유추는 어떤 양상으로 나타나는가?
   1-2. 2차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에서 유추는 어떤 양상으로 나타나는가?
   1-3. n차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에서 유추는 어떤 양상으로 나타나는가?

2. 고등학생들이 조립제법을 다른 영역에 적용하는 과정에서 유추는 어떤 양상으로 나타나는가?

Ⅱ. 유추에 관한 이론적 고찰

고등학생들의 탐구활동에 나타난 유추의 양상을 분석하기 위해서는 유추적 사고의 기제를 이해해야 하며, 이를 위하여 유추의 의미 및 유추의 사고 과정을 파악해야 한다. 따라서 이 장에서는 유추의 개념, 유사성의 유형과 유추, 유추적 사고과정에 대한 이론 모형을 검토하고자 한다.

1. 유추의 개념

유추를 심리학의 인지적 측면에서 검토하기 시작한 것은 Spearman(1923)부터이다. 그 이후에 많은 학자들(Carpenter, Just & Shell, 1990; Gentner, 1983; Gentner & Markman, 1997; Holyoak & Koh, 1987; Holyoak & Thagard, 1989, 1997; Hummel & Holyoak, 1992, 1997, 2003; Hunt, 1974; Keane & Costello, 2001; Sternberg, 1977a, 1977b; Reitman, 1965 등)이 유추를 인지적 측면에서 연구하고 있다. 이러한 연구들은 A:B ∷ C:D 형태의 비율 유추 과제를 다루는 고전적 연구와 유추를 복잡한 표상 및 처리 과정으로 보는 현대적 연구로 구분할 수 있다. 특히, 현대적 연구는 Gentner와 Holyoak에 의하여 제안되었으며 Gentner와 Holyoak은 유추를 사상(mapping)으로 이해하고자 하였다.

Gentner(1983)에 의하면 유추는 기저 영역(base domain)과 목표 영역(target domain) 사이의 관계에 중점을 둔 사상이다. Holyoak & Koh(1987)에 의하면 유추는 근원 영역(source domain)과 목표영역(target domain)의 대상들의 속성에 중점을 둔 사상이다. 각각 사용하는 용어나 중점 사항에는 다소 차이가 있으나 현대적 연구에서 유추는 서로 다른 영역 사이의 사상으로 이해되는 경향이 있다. 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

Gentner(1983)는 유추를 “T는 B와 같다” 또는 “T는 B이다”와 같이 기저 영역 B에서 목표 영역 T로의 사상으로 설명하였다(pp. 157-158). 예를 들어, 학습자는 새로운 문제를 해결해야 할 때, 이전에 풀었던 비슷한 문제를 생각해내어 그 문제의 풀이 방법을 새로운 문제에 맞도록 변형시켜 문제를 해결한다. Gentner의 설명에 의하면, 학습자가 풀어야 할 새로운 문제는 목표 영역에 해당하고, 학습자가 이전에 풀었던 비슷한 문제는 기저 영역에 해당한다. 그리고 Gentner는 유추를, 이전에 풀었던 친숙한 문제에서 새로운 문제로의 사상 즉, 기저 영역에서 목표 영역으로의 사상으로 이해하고자 하였다.

Holyoak & Koh(1987)은 유추란 더 잘 이해하고 있는 근원 영역으로부터 익숙하지 않은 목표영역으로 지식을 전이하여 적용하는 것이라고 하였다. 그리고 유추적 사고의 과정을 다음과 같이 기술하였다. ⑴근원 영역과 목표 영역에 대한 표상(representation)을 구성한다. ⑵목표 영역과 잠재적으로 관련성이 있는 유사물(analogue)을 근원 영역에서 선택한다. ⑶근원 영역의 유사물과 목표 영역의 유사물 사이에 사상을 만든다. ⑷목표 영역의 해답을 찾기 위하여 사상을 확장시킨다. 또한, 유추적 사고는 ⑴단계에서 ⑷단계로 순차적으로 나타나는 것은 아니며, 각 단계들이 구간적으로 반복하여 나타날 수 있다(p. 332). 이는 ⑵단계를 시행하고 ⑶단계를 시행한 후 다시 ⑵단계를 시행할 수 있다는 의미이다. 예를 들어, 학습자가 새로운 문제를 해결해야 할 때, 새로운 문제와 이전에 풀었던 문제들 사이의 유사점을 찾아보고(⑵단계), 새로운 문제와 이전에 풀었던 문제들 사이에 사상 즉, 관계를 형성해보고(⑶단계), 다시 새로운 문제와 이전에 풀었던 문제들 사이의 유사점을 찾아보고(⑵단계), 다시 문제들 사이에 관계를 형성해 보는(⑶단계) 것을 반복할 수 있다는 의미이다. 따라서 Holyoak & Koh의 유추에 관한 관점은 반성적 사고의 일부라고 해석할 수 있다.

또한, Gentner & Markman(1997)은 유추의 대표적인 특징은 유사성(similarity)과 추론(inference)이라고 압축

하여 설명하였는데, 우선 유사성은 기저 영역과 목표 영역이라는 두 개의 서로 다른 영역 사이에 사상 관계를 만들어 내고, 만들어낸 사상 관계가 유지되도록 하는 역할을 한다. 그리고 추론은 사상이 가능한 두 개의 다른 영역 중 하나의 영역(기저 영역)에서 성립하는 어떤 관계는 다른 영역(목표 영역)에서도 성립할 것이라고 추측을 하도록 하는 역할을 한다. 즉, 유추는 서로 사상 관계가 있는 두 개의 영역 사이에 존재하는 유사성을 통해서 새로운 요소를 추론해내는 것이다. 이렇듯 유추에 의한 학습은 하나의 영역에서 다른 영역으로의 전이를 동반하게 되고 따라서 유추를 유추 전이라고도 부른다(pp. 47-49). 유추의 이와 같은 전이적 성격은 새로운 개념 학습, 새로운 문제 풀이, 새로운 내용 발견에서 효과가 있으며 따라서 유추의 활용 가치를 높이게 된다.

이와 같은 설명들을 종합해보면, 유추의 특징은 다음과 같다. (1)유추는 새로운 상황[3]을 이해 또는 해결하기 위하여 이미 친숙하게 알고 있는 지식이나 경험에 근거하여 유사한 점을 추출하여 활용한다. 즉, 유추는 이미 익숙하게 알고 있는 지식이나 경험에 근거하여 상황을 추측한다. (2)유추는 새로운 개념 습득 및 새로운 문제 해결을 위한 반성적 사고의 일부로 사고 전략의 한 종류이다. 따라서 유추의 핵심은 유사성에 근거한 관계 비교이며 유추의 본질은 추론이다. 그리고 유추는 사고 전략의 일부로 분류할 수 있다.

2. 유사성의 유형과 유추

1절에서 살펴본 바와 같이 유추의 핵심은 유사성에 근거한 관계 비교이다. 따라서 유추의 사고 과정을 파악하기 위해서는 유사성에 관한 고찰이 선행되어야 한다. 유추에 관련되는 유사성은 대상들의 속성, 특징, 관계 등을 어떠한 관점에서 이해하는가에 따라 다양하게 구분될 수 있다. 이 절에서는 유사성에 관한 여러 이론들을 살펴보고 유사성의 유형을 범주화시켜보도록 하겠다.

우선 Gentner & Markman(1997)의 유사성에 관한 관점을 살펴보도록 하자. Gentner & Markman은 기저영역(base domain)이 목표영역(target domain)을 이해하고 해결하기 위한 도움을 줄 수 있는지에 따라 유사성을 단계적으로 완전 유사성(literal similarity), 구조 유사성(structural similarity), 표면 유사성(surface similarity), 비관련 유사성(anomaly similarity)으로 분류하였다(pp. 47-48). Gentner & Markman에 의하면 외형적으로만 유사한 표면 유사성의 경우, 기저영역은 목표영역을 이해하고 해결하는데 실질적인 도움을 제공하지 못한다. 반면에 구조적으로 유사한 구조 유사성의 경우, 기저영역은 목표영역을 이해하고 해결하는데 실질적인 도움을 제공한다. 표면 유사성과 구조 유사성을 동시에 만족하는 경우는 완전 유사성에 해당하고, 표면 유사성과 구조 유사성 모두가 없는 경우는 비관련 유사성에 해당한다(Ibid, p. 53). Gentner & Markman는 유사성을 단계적으로 4단계로 분류하였지만 분류의 핵심 기준은 표면 유사성과 구조 유사성의 유무로 볼 수 있다.

Medin & Ortony(1989)은 유사성을 표면 유사성(surface similarity)과 심층 유사성(deep similarity)으로 구분하였다(pp. 179-196). 여기서 심층 유사성은 Gentner & Markman의 구조 유사성을 의미한다. 또한, Wharton 등(1994)은 유사성을 요소 유사성(element similarity), 관계 유사성(relational similarity), 체제 유사성(system similarity)으로 구분하였다. 그리고 관계 유사성과 체제 유사성을 묶어서 유추적 유사성(analogical similarity)이라고 명명하였다(Wharton외 5인, 1994, pp. 66-67). 여기서 요소 유사성은 Gentner & Markman의 표면 유사성을 의미한다. 그리고 관계 유사성과 체제 유사성은 모두 구조적 일관성에 근거하여 두 유추 대상들의 요소를 대응시키므로 구조 유사성을 의미한다. 그러나 관계 유사성은 단순한 1차적 관계를 고려하므로 저차 구조 유사성으로, 체제 유사성은 관계에 대한 관계를 고려하므로 고차 구조 유사성으로 해석할 수 있다. 관계 유사성과 체제 유사성을 유추적 유사성이라고 명명한 것은 유추의 전제 조건이 구조의 유사성이라는 것을 시사하며, 유추는 구조성을 전제로 한다는 Gentner & Markman의 견해와 관점이 같음을 알 수 있다.

3) 여기서 상황은 문제, 개념, 지식, 과제, 영역, 체제를 포괄하는 넓은 의미로 사용하였다.

살펴본 바에 근거하여 유사성 유형의 범주에 관한 첫 번째 축을 표면 유사성과 구조 유사성으로 상정하고자 한다. 그리고 구조 유사성을 저차 구조 유사성과 고차 구조 유사성으로 분류하고자 한다. 표면 유사성은 문제나 상황에 기술된 단어나 문구처럼 외관상 나타나는 속성이 유사한 것으로 정의하고, 구조 유사성은 문제 해결의 원리와 같이 문제나 상황의 이면에 있는 그래서 외관상으로 나타나지 않는 구조적 속성이 유사한 것으로 정의하고자 한다. 구조 유사성 중에 단순히 속성과 속성의 대응 관계만을 고려한 것은 저차 구조 유사성으로, 속성들의 관계에 대한 관계를 생각한 것은 고차 구조 유사성으로 정의하고자 한다.

유사성에 관한 다른 관점을 살펴보도록 하자. Smith(1989)은 유사성을 총체 유사성(overall similarity)과 차원 유사성(dimensional similarity)으로 구분하였다. 두 대상을 부분으로 나누어서 비교하지 못하고 전반적인 상황이 유사하다고 인식하는 경우 총체 유사성이라고 한다. 두 대상을 부분으로 나누어서 특정한 관점(예를 들면, 색깔, 크기, 모양)에 입각하여 단일 차원(single dimension)에서 유사 및 일치 정도를 인식하는 경우 차원 유사성이라고 한다(p. 125). 6 세 이하의 어린 아동이 하나의 관점에서 유사성을 인식하지 못한다는 사실은 심리학에서 오랫동안 알려진 사실이다. 어린 아동의 경우, 사물이나 상황을 전체적으로 지각하고 판단하는 경향이 있다(Denney, 1972; Inhelder & Piaget, 1964; Vygosky, 1962). 따라서 총체 유사성과 차원 유사성은 발달 과정 및 발달 단계와 관련이 있다.

예를 들어, 어린 아동은 하얀 곰돌이 인형을 하나의 대상으로 인식할 수는 있지만, “하얗다”와 “곰”을 분리하여 색깔과 모양이라는 각각의 단일 차원으로 인식하지는 못한다. 그러나 아동의 연령이 증가하면서 특정한 관점에서 즉, 단일 차원에서 대상들을 비교하고 판단하는 분석적 능력이 나타난다. 결국 6 세 이하의 어린 아동이 기저영역과 목표영역에 유사성이 있다고 답변하였고 그 유사성이 표면 유사성임이 밝혀졌다고 할지라도, 이 아동이 전체적 관점에서 유사하다고 생각하는 것인지 아니면 대상의 일부만을 고려하여 국소적 관점에서 유사하다고 생각하는 것인지 알 수 없다. 역시 어린 아동에게서 구조 유사성이 관찰되었다고 할지라도, 이 아동이 전체적 관점에서 판단한 것인지 국소적 관점에서 판단한 것인지 알 수 없다.

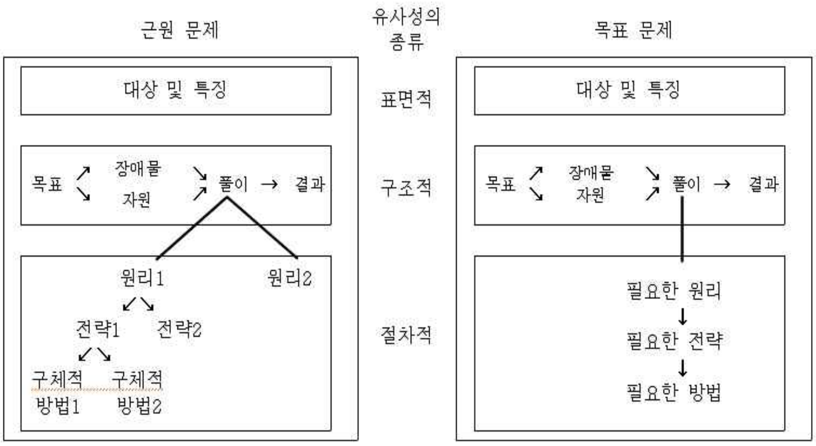
살펴본 바와 같이 유사성 유형의 다른 범주는 발달 단계와 관련이 있으며 따라서 유사성 유형의 범주에 관한 두 번째 축을 총체 유사성과 차원 유사성으로 생각하고자 한다. 총체 유사성은 주어진 문제나 상황을 세분화하여 비교하지 않고 전체적으로 비교한 후 유사성을 판단하는 경우로 정의하고, 차원 유사성은 주어진 문제나 상황을 세분화하여 어떤 특정 차원에 근거하여 비교한 후 유사성을 판단하는 경우로 정의하고자 한다. 표면 유사성과 구조 유사성이 대상의 속성에 관한 기능적 측면에 초점을 맞춘 분류라면, 총체 유사성과 차원 유사성은 대상의 속성에 관한 세분화 능력에 초점을 맞춘 분류이다. 또한, 총체 유사성과 차원 유사성은 발달 과정 및 발달 단계와 관련성이 있다.

유사성에 관한 또 다른 관점은 Chen(2002)이 제시한 절차 유사성(procedural similarity)이다. 절차란 문제해결 과정에 나타나는 일반적인 풀이를 의미하는 것으로 문제해결에서 나타나는 단순한 순서나 방법보다 더 포괄적인 의미이다. 이는 과정 유사성 또는 풀이 유사성으로 해석할 수 있다. Chen의 절차란 과정 및 풀이를 포함하는 일반적인 풀이를 의미하는 것으로 원리를 포함하며, 원리는 다시 구체적인 조작들(concrete operations)로 표현될 수 있는 일련의 하위 활동들을 포함한다. Chen은 <그림 Ⅱ-1>처럼 문제해결 과정에 나타나는 절차 유사성을 원리(principle), 전략(strategy), 구체적 방법(procedure)[4]으로 세분화하여 설명하였다. 그리고 원리, 전략, 구체적인 방법은 위계가 있는 개념임을 강조하였다. Chen은 문제해결 과정을 체계적이고 위계적으로 그리고 세분화하여 설명하고 있다(pp. 81-83).

4) Chen(2002)은 절차유사성(procedural similarity)을 설명하면서 절차(procedure)라는 용어를 사용하였으나(p. 83) 본 연구에서는 용어의 혼란을 막기 위하여 절차유사성(procedural similarity)의 하위 개념인 절차(procedure)을 구체적 방법이라고 의역하여 기술하였다.

<그림 Ⅱ-1>에서 보는 바와 같이, Chen(2002)이 제시한 절차 유사성의 개념은 표면 유사성 또는 구조 유사성의 개념과 독립적으로 분리되어 있다. Chen은 표면 유사성이나 구조 유사성을 기저영역과 목표영역 사이에 존재하는 사상을 위한 유사성으로 그 의미를 축소하였다. 그리고 Chen은 연구 대상자들이 아무리 기저영역과 목표영역 사이에 사상 즉, 대응을 잘 해도 결과적으로 문제해결에 실패하는 경우에 주목하였다. Chen의 연구는, 연구 대상자들에게 기저문제에 대한 유사성을 인식할 수 있도록 힌트를 주었음에도 문제를 해결할 수 없었다는 것은 구체적인 풀이 방법에 대한 정보 없이는 결국 문제를 해결할 수 없다는 것을 입증한 것이다. 또한, 절차 유사성은 표면 유사성이나 구조 유사성과는 다르게 사상 과정과 관련이 있는 것이 아니라, 관련된 풀이 방법들 중에서 적합한 방법을 선택하는 과정과 관련이 있음을 강조하였다. 이는 절차유사성이 주어진 문제해결을 위한 적합한 풀이 방법의 선택 과정에 영향을 준다는 의미이며, 따라서 구체적 방법(procedure)의 선택 여부가 문제해결의 성공 여부를 결정하는 결정적 요인이라는 의미이다(pp. 94-95). 다시 말해, Chen(2002)이 제시한 절차 유사성의 인식여부는 표면 유사성 또는 구조 유사성의 인식여부와 독립적으로 분리되어 있다. 즉, 유사성에 관한 또 다른 관점은 Chen(2002)이 제시한 절차 유사성(procedural similarity)이다.

기저영역과 목표영역에 구조적 공통점이 있어서 문제를 해결한 경우를 생각해보자. 이 경우, Gentner & Markman은 구조 유사성에 의하여 문제를 해결한 것으로 보았다. 그러나 Chen은 (구조 유사성이 아니라) 절차 유사성에 의하여 문제를 해결한 것으로 보았다. 왜냐하면 앞에서 언급한 바와 같이 Chen의 절차 유사성은 문제해결 과정에 나타나는 일반적인 풀이를 의미하는 것으로 문제해결에서 나타나는 단순한 순서나 방법보다 더 포괄적인 것으로 이는 과정 유사성 또는 풀이 유사성으로 해석될 수 있기 때문이다.



<그림 Ⅱ-1> 유사성의 종류(Chen, 2002, p. 83)

마지막으로 유사성 유형의 범주에 관한 세 번째 축을 절차 유사성의 유무로 상정하고자 한다. 그리고 본 연구에서의 절차 유사성은 문제해결 과정이 유사한 것으로 정의하고자 한다. 또한 문제해결 과정에 유사성이 있다는 것 즉, 절차 유사성이 있다는 것은 목표 달성을 위한 전략, 아이디어, 구체적인 계산과정까지를 포함하여 유사성이 있다는 것으로 정의하고자 한다. 또한 본 연구에서는 Chen의 연구처럼 절차 유사성을 표면 및 구조 유사성과 같은 축에 두고 1차원의 관점으로 정의하여 서로 배타적인 개념으로 정의하지 않겠다. 절차 유사성을 표면 및 구조 유사성과 다른 축에 두고 2차원의 관점으로 설정하여 목표 문제의 풀이과정이 기저 문제의 풀이과정과 구조 유사성이 있음과 동시에 절차 유사성도 있을 수 있다고 해석하고자 한다.

유사성 유형에 관한 논의를 종합해보면 유사성은 <표 Ⅱ-1>처럼 세 가지 축을 기준으로 분류할 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 유사성 분류에 관한 3차원 분석틀

표면 v.s. 구조 / 총체 v.s. 차원 / 절차 유사성의 유무	표면 유사성		구조 유사성 (저차 구조 유사성, 고차 구조 유사성)	
	총체 유사성	차원 유사성	총체 유사성	차원 유사성
절차 유사성이 없음	표면적 유사, 전체적으로 유사	표면적 유사, 단일 차원에서 유사	구조적 유사, 전체적으로 유사	구조적 유사, 단일 차원에서 유사
절차 유사성이 있음	표면적 유사, 절차적 유사, 전체적으로 유사	표면적 유사, 절차적 유사, 단일 차원에서 유사	구조적 유사, 절차적 유사, 전체적으로 유사	구조적 유사, 절차적 유사, 단일 차원에서 유사

그러나 이미 살펴본 바와 같이 총체 유사성과 차원 유사성은 어린 아동들의 발달 과정 및 발달 단계와 관련이 있으므로 고등학생을 대상으로 하는 본 연구에서는 제외하도록 하겠다. 따라서 <표 Ⅱ-2>와 같이 유사성에 관한 2차원 분석틀을 본 연구의 유추에 관한 유사성 분류의 분석틀로 사용하고자 한다.

<표 Ⅱ-2> 유사성 분류에 관한 2차원 분석틀

표면 v.s. 구조 / 절차 유사성의 유무	표면 유사성	구조 유사성	
		저차 구조 유사성	고차 구조 유사성
절차 유사성이 없음	표면적 유사	저차 구조적 유사	고차 구조적 유사
절차 유사성이 있음	표면적 유사, 절차적 유사	저차 구조적 유사 절차적 유사	고차 구조적 유사 절차적 유사

3. 유추적 사고에 대한 이론 모형: 구조사상 모형(Structure-mapping Model)

유추적 사고에 관한 인지이론은 Spearman이 1923년에 발표한 「The nature of intelligence and the principles of Cognition」이 그 시초이다. Spearman(1923) 이후 많은 학자들(Carpenter, Just & Shell, 1990; Gentner, 1983; Gentner & Markman, 1997; Holyoak & Koh, 1987; Holyoak & Thagard, 1989, 1997; Hummel & Holyoak, 1992, 1997, 2003; Hunt, 1974; Keane & Costello, 2001; Sternberg, 1977a, 1977b; Reitman, 1965; Ross & Kilbane, 1997)에 의하여 유추 이론은 발전을 거듭하였다. 유추에 관한 이론들을 종합해보면 그 핵심은 Sternberg의 요소 이론(componential theory), Gentner의 구조 사상 이론(structure mapping theory, 줄여서 SMM), Holyoak의 실용적 스키마 이론(pragmatic-schema theory), Ross의 사례 이론(exampler theory) 중 하나의 관점으로 해석될 수 있다. 본 연구는 4개의 관점 중에서 Gentner의 구조사상 모형에 기초하여 유추적 사고의 분석틀을 제안하고 유추적 사고를 분석하고자 한다.

Gentner(1983)는 “T는 B와 같다” 또는 “T는 B이다”와 같은 유추적 추론을 기저영역 B에서 목표영역 T로의 사상으로 설명하였다. 여기서 T는 설명해야 할 영역이고 B는 지식을 제공하는 영역이다. 기저영역 B의 속성들을 b_1, b_2, $\cdots$ b_n, 목표영역 T의 속성들을 t_1, t_2, $\cdots$ t_m 그리고 속성들 사이의 관계들을 A, R, R′이라 하자. 그러면 유추는 B에서 T로 대응되는 사상 $M: b_i \rightarrow t_i$ 으로 볼 수 있다. 또한 이러한 사상은 다음과 같이 일반화될 수 있다(pp. 157-158).

⑴ 대상의 속성이 무시된 사상: $A(b_i)] \not\to [A(t_i)$

⑵ 대상의 관계가 보존된 사상: $R(b_i,\ b_j)] \to [R(t_i,\ t_j)$

⑶ 대상의 관계가 보존되면서 전체적인 관계가 체계화된 사상:

$$R'\left(R_1(b_i,\ b_j),\ R_2(b_k,\ b_l)\right)] \to [R'\left(R_1(t_i,\ t_j),\ R_2(t_k,\ t_l)\right)$$

⑴의 경우, 유추적 사고가 나타나지 않은 경우이다. 구조 사상 이론에서 유추적 사고는 ⑵또는 ⑶과 같이 기저영역에 속해 있는 대상들 사이의 관계 체계가 목표영역에 속해 있는 대상들 사이의 관계 체계로 이동되는 관계의 사상을 의미한다. 즉, 구조 사상 이론에서는 기저 영역 B에 속하는 하나의 대상의 속성이 목표 영역 T에 속하는 하나의 대상의 속성으로 사상되는 것을 지양한다. 그보다는 기저 영역 B의 대상들 사이의 관계가 목표 영역 T의 대상들 사이의 관계로 사상되는 것을 지향한다(Gentner, 1989, p. 201). 요약하자면 구조 사상 이론은 관계의 사상을 선호한다.

그러면 구조 사상 이론은 왜 관계의 사상을 선호할까? Gentner(1983)는 체계성 원리(systematicity principle) 때문이라고 하였다. 체계성 원리란 ⑶과 같이 대상들의 속성에 관한 관계에 대하여 다시 관계를 형성하여 두 번째 관계가 사상되는 것을 의미한다(p. 158). 체계성이 있는 사상에서는 체계성이 없는 사상에 비하여 예측이 용이하다(Ibid, p. 163). 다시 말해, 체계성 원리란 높은 차원의 관계(higher-order relation)가 낮은 차원의 관계(lower-order relation) 사이의 연결을 강화시킨다는 차원과 차원의 연결 구조를 설명한 원리이다(이승우, 2001, p. 23). Rutherford의 유추적 사고의 과정은 체계성의 원리를 잘 보여주는 예이다(Gentner, 1983, p. 160).

Gentner의 기저영역에서 목표영역으로의 사상 중 유추적 사고가 완성된 사상은 기저영역을 정의역으로 하고 목표영역을 치역으로 하는 하나의 함수로 볼 수 있으며 체계성의 원리에 의한 ⑶과 같은 사상은 유추에 관한 여러 가지 함수의 합성함수로 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 유추적 사고가 나타난 경우 이 유추적 사고를 Gentner의 구조사상 모형(SMM)인 $R(b_i,\ b_j)] \to [R(t_i,\ t_j)$ 으로 나타내어 분석하고자 한다.

Gentner(1983)는 Rutherford가 “원자의 움직임은 태양계와 같다”를 알아내는 유추적 사고의 과정을 그림으로 나타냈다(p. 160). 이 과정을 SMM으로 나타내면 <표 Ⅱ-3>와 같다.

<표 Ⅱ-3> Rutherford의 유추적 사고의 과정에 대한 SMM

<table>
<tr><td>$R'\left(R_1(b_i,\ b_j),\ R_2(b_k,\ b_l)\right)$</td><td>$R(b_i,\ b_j)$
태양과 행성의 관계</td><td>$R(b_i,\ b_j)]$
$\to [R(t_i,\ t_j)$</td><td>$R(t_i,\ t_j)$
핵과 전자의 관계</td><td>$R'\left(R_1(t_i,\ t_j),\ R_2(t_k,\ t_l)\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R' (거리(태양, 행성),
인력(태양, 행성))</td><td>(1)거리(태양, 행성)[5]</td><td>→</td><td>(5)거리(핵, 전자)</td><td rowspan="2">R' (거리(핵, 전자),
인력(핵, 전자))</td></tr>
<tr><td>(2)인력(태양, 행성)</td><td>→</td><td>(6)인력(핵, 전자)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R' (주위를 돈다(태양, 행성),
더 무겁다(태양, 행성))</td><td>(3)주위를 돈다
(행성, 태양)</td><td>→</td><td>(7)주위를 돈다
(전자, 핵)</td><td rowspan="2">R' (주위를 돈다(전자, 핵),
더 무겁다(핵, 저자))</td></tr>
<tr><td>(4)더 무겁다
(태양, 행성)</td><td>→</td><td>(8)더 무겁다
(핵, 전자)</td></tr>
</table>

$$R'\left(R_1(b_i,\ b_j),\ R_2(b_k,\ b_l)\right)] \to [R'\left(R_1(t_i,\ t_j),\ R_2(t_k,\ t_l)\right)$$

Rutherford의 유추에서 $R(b_i,\ b_j)$ 중 하나를 바꾸면 즉, 대상들 사이의 관계들 중 하나의 관계를 바꾸면 다

5) 거리(태양, 행성)은 태양과 행성의 거리 관계를 $R(b_i,\ b_j)$ 의 형태로 나타낸 것이다.

른 관계가 영향을 받는다는 점에서 체계성이 존재한다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 태양과 행성 사이의 인력이 감소된다면 그 사이의 거리는 증가할 것이다. 그러나 다른 관계들에는 변화가 없다. 따라서 관계(1)과 관계(2)는 상호 관련성이 있다. 또한, 행성이 태양보다 더 무겁다면 태양은 행성 주위를 돌게 될 것이다. 따라서 관계(3)과 관계(4)는 상호 관련성이 있다. 태양과 행성사이에 나타나는 이러한 저차 관계를 등식으로 나타내면:

$$F_{grav} = \frac{G m_p m_s}{R^2} = m_p a_p = m_s a_s$$

여기서 F_{grav}는 중력, m_p는 행성의 질량, a_p는 행성의 반지름 위에서 가속도, m_s는 태양의 질량, a_s는 태양의 반지름 위에서 가속도, R은 행성과 태양 사이의 거리, G는 중력 상수이다.

태양과 행성을 각각 핵과 전자로 바꾸면 저차 관계(1)~(4)는 고차 관계(5)~(8)을 만든다. 그리고 태양과 행성에서 성립한 상호관계가 핵과 전자에서도 성립하게 된다. 핵과 전자사이에 나타나는 고차 관계를 등식으로 나타내면:

$$F_{elec} = \frac{-q_e q_n}{R^2} = m_e a_e = m_n a_n$$

여기서 F_{elec}는 전자기력, q_e는 전자량, m_e는 전자의 질량(첨자 바꾸면 핵), R은 핵과 전자 사이의 거리, -1은 전자기 상수이다(Gentner, 1983, pp. 162-163).

Rutherford의 유추 “원자는 태양계와 같다”는 저차 관계들의 관계를 나타내는 $R'(R_1(b_i, b_j), R_2(b_k, b_l))$에서 다시 저차 관계들의 관계를 나타내는 $R'(R_1(t_i, t_j), R_2(t_k, t_l))$으로 구조사상된 것이다. 다시 말해 태양과 행성사이의 상호관련성이 핵과 전자사이의 상호관련성으로 구조사상된 것이며 이는 유추적 추론이 이루어진 것이다.

Rutherford의 유추에 나타난 관계들을 좀 더 설명하자면, $R_1(b_i, b_j)$와 $R_2(b_k, b_l)$은 각각 저차 관계이다. 왜냐하면 $R_1(b_i, b_j)$은 속성 b_i와 속성 b_j을 관계 R_1을 이용하여 단순한 1차적 관계로 나타내고 있기 때문이다. 그리고 두 개의 저차 관계가 모여서 고차 관계 $R'(R_1(b_i, b_j), R_2(b_k, b_l))$을 만들었으며, 고차 관계 $R'(R_1(b_i, b_j), R_2(b_k, b_l))$은 고차 관계 $R'(R_1(t_i, t_j), R_2(t_k, t_l))$으로 구조사상된 것이다. 그리고 이러한 고차 관계와 고차 관계의 사상은 체계성 원리가 적용된 예라 하겠다.

Gentner가 예로 보여준 Rutherford의 유추는 또한 설명적 유추의 전형이다. 설명적 유추는 설명을 가능하게(to explain) 하고, 예측을 가능하게(to predict) 한다[6](Gentner, 1982, p. 118). 설명적 유추는 명확성(clarity)을 주요 특징으로 한다(Gentner, 1982, p. 124). Rutherford는 태양계의 관계를 이용하여 원자의 움직임을 예측하여 설명하였다. 또한 Rutherford는 태양계에서 “태양과 행성의 관계”를 원자의 움직임에서 “핵과 전자의 관계”로 명확하게 대응시켰다.

본 연구에서는 탐구활동 중 유추적 사고가 나타낸 경우 Gentner의 SMM으로 나타내어 분석을 하고자 한다.

6) 반면에 표현적 유추는 환기를 가능하게(to evoke) 하고, 기술을 가능하게(to describe) 한다(Gentner, 1982, p. 118). 표현적 유추는 풍부함(richness)을 주요 특징으로 하는데 이는 설명적 유추의 특징인 명확성(clarity)과 대조를 이룬다(Gentner, 1982, p. 124).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

이 장에서는 이론적 고찰을 바탕으로 연구 목적을 수행하기 위하여 연구 방법 및 자료 분석 방법, 연구 참여자 및 탐구 과제를 서술하고자 한다.

1. 연구 방법 및 자료 분석 방법

고등학생들의 사고 과정에 나타난 유추적 추론 능력을 검토한 후 그 양상을 분석하기 위하여 본 연구의 연구 방법으로는 질적 사례연구를 채택하였다. 질적 사례연구는 개인 및 상황에 따라 연구의 관점을 다양하게 적용하여 대상의 특징이나 문제점을 체계적이고 심층적이며 종합적으로 기술할 수 있다(조성남 외 3인, 2011, pp. 179-180). 따라서 본 연구에서는 우선 고등학생들에게 자유로운 탐구 여건을 제공하였고, 학생들의 탐구 과정을 심층적으로 분석하여 상세하게 기술하였다.

자료 수집은 2011년 11월 초부터 2012년 2월 말까지 이루어졌으며, 관찰과 심층면담 그리고 연구자의 기록자료(관찰일지, 심층면담일지) 및 학생들의 활동자료(탐구활동 자료, 과제 보고서, 감상문) 네 가지 방법으로 자료를 수집하고 분석하였다.

관찰은 사례연구의 대표적인 방법이다(Creswell, 2005, p. 144). 관찰을 통한 연구는 “사람들을 연구하는 것”이라기보다는 “사람들로부터 배우는 것”의 의미가 더 강하다(Spradly, 1988, p. 2). 따라서 연구자에게는 연구 참여자들을 포괄적이고 동시에 구체적인 맥락 속에서, 가능하면 최대한 연구 참여자들의 관점을 있는 그대로 알아내고 해석하는 접근이 요구된다(조용환, 1999 p. 244).

심층면담은 연구 참여자들의 보다 심층적인 진술을 이끌어 낼 수 있는 방법으로 개방형 질문을 사용하여 비구조화된 형식으로 이루어지는 경향이 있다(Creswell, 2005, pp. 155-156). 심층면담은 연구 참여자들의 생활세계에 대한 사고패턴을 이해하고자 할 때, 관찰 할 수 없는 행동양식이나 사고방식 등을 이해하고자 할 때, 연구 참여자들의 말과 행동의 심층 맥락을 이해하고자 할 때 유용하게 사용되는 방법이다(Merriam, 2001). 본 연구에서는 학생들의 사고과정 중에서도 기저 영역을 기반으로 목표 영역의 문제를 탐구하는 과정을 알고자 할 때 학생들의 승낙을 받고 심층면담을 실시하였다. 심층면담은 학생들의 탐구활동 및 과제 보고서의 결과물에 대한 구체적인 사고과정을 이해하기 위하여 실시되었다. 그리고 학생들이 자신들의 탐구활동 과정을 잊기 전에, 가능하면 탐구활동 실시일과 같은 날에 심층면담을 실시하였으며, 시간적 제약조건 때문에 부득이한 경우에는 탐구활동을 한 다음 날에 심층면담을 실시하였다. 또한, 연구자가 추가적으로 면담이 필요하다고 판단한 경우 심층면담을 추가하였다. 학생들마다 차이가 있었으나 대략 1시간 내외로 심층면담이 이루어졌다. 심층면담 역시 연구 참여자들의 동의를 얻어 전 과정을 녹음하였으며, 면담이 끝난 후에는 바로 면담 일지를 작성하였다.

문서 역시 본 연구의 중요한 연구 자료이다. 본 연구에서 연구 참여자들을 대상으로 수집한 주요 문서에는 관찰일지(연구자 기록자료), 심층면담일지(연구자 기록자료), 탐구활동 자료(학생들 기록자료), 과제 보고서(학생들 기록자료), 감상문(학생들 기록자료)이 있다. 이 문서들은 연구자가 학생들의 사고 과정에 나타난 유추적 추론 능력을 이해하는 중요한 정보가 되었을 뿐만 아니라 관찰이나 심층면담 자료를 보충해주는 역할을 하였다.

본 연구에서는 학생들이 유추적 사고가 나타난 경우 Gentner의 SMM으로 나타내어 분석을 하고자 한다. 이를 위하여 학생 A와 학생 B에 대한 유추적 사고를 각각 첨자 A와 B를 이용하여 나타냈다. 또한, 장제법과 조립제법에 관한 내용을 각각 l과 s로 나타냈다. 그리고 x차 장제법이나 조립제법에 관한 내용은 첨자 x를 이용하여 나타냈다. 예를 들어, 학생 A의 2차 장제법에 관한 사고를 l_{A2}로 표기하였다.

2. 연구 참여자 및 탐구 과제

질적 연구에서 연구 참여자는 의도적으로 선택하며, 연구자들은 질적 연구의 설계에서 명확한 기준을 가지고 참여자의 선택에 대한 합리적인 근거를 제공할 수 있어야 한다(Creswell, 2005, pp. 150-151). 본 연구의 목적에 적합한 연구 참여자의 기준은 첫째, 연구 참여자는 주어진 탐구 문제의 주제인 조립제법에 관한 학습이 이루어진 상태이어야 한다. 둘째, 연구 참여자의 학업 능력은 탐구활동을 수행할 수준이 되어야 한다. 셋째, 본 연구는 조립제법에 관한 탐구활동에 나타나는 유추의 양상을 이해하고자 하는데 초점을 두고 있으므로, 연구 참여자들은 대수적 표현 방법 및 대수에 관하여 기본적으로 이해하고 있어야한다.

연구 참여자로 인천지역의 일반계 공립 Σ고등학교(인천시 중구 소재)에서 1학년 학생 6명(상위권 3명, 중상위권 3명)과 일반계 공립 Ω고등학교(인천시 남동구 소재) 1학년 학생 6명(상위권 3명, 중상위권 3명)을 추천받았다. 추천받은 12명의 학생들 중에 의도적인 표본추출 전략(Miles & Huberman, 1994, p. 28) 및 비형식적인 면담을 통하여 일반계 공립 Σ고등학교 학생 1명(상위권)과 일반계 공립Ω고등학교 학생 1명(중위권)을 최종 연구 참여자로 선정하였다.

연구 참여자로 최종 선정된 Σ고등학교 학생 A와 Ω고등학교의 학생 B의 특성을 살펴보면 다음과 같다. 학생 A는 수학을 포함한 전체적인 성적이 상위권이었다. 학생 A는 과학에 흥미가 많고 과학 및 공학 분야로 진학할 것을 희망했다. 학업과 관련한 주제로 의사소통 능력이 뛰어나서 선생님 또는 친구들과 과학 및 수학에 대해 토의하는 것을 좋아했다. 자신을 합리적이라고 생각했고 자신의 의사결정을 매우 신뢰했다. 학생 B는 수학을 포함한 전체적인 성적은 중상위권이었다. 수학교사를 희망하는 학생 B는 수학에 흥미가 높은 학생으로, 수학에 대한 열정이 많아서 교과서의 수학 문제뿐만 아니라 교과서에 나오지 않는 문제들도 풀이하고 탐구하는 것을 좋아했다. 또한 학생 B는 앞으로 자신의 수학 성적이 오를 것이라는 확신이 매우 높았으며, 수학 결과물을 체계적으로 정리하는 능력이 훌륭했다. 선생님들로부터 신뢰가 두터웠고 교우관계도 매우 원만했다.

연구 참여자들에게는 자유로운 탐구 환경이 제공되었다. 연구 참여자들이 충분히 탐구할 수 있도록 과제를 구체적인 형식보다는 <표 Ⅲ-1>과 같은 탐구 상황으로 제공하였다. 탐구 활동 이후에는 비구조화된 형식의 개방형 질문을 통해 심층면담이 이루어졌다.

<표 Ⅲ-1> 탐구 과제

	과제 내용
탐구 과제 1	1차식으로 나누는 조립제법이 설명하는 이유를 설명하시오.
탐구 과제 2	2차식으로 나누는 조립제법을 제시할 수 있는가? 제시한 2차 조립제법이 설명하는 이유를 설명하시오.
탐구 과제 3	n차식으로 나누는 조립제법을 제시할 수 있는가? 제시한 n차 조립제법이 설명하는 이유를 설명하시오.
탐구 과제 4	조립제법을 다른 영역에 적용할 수 있는가? 있다면 구체적으로 어떻게 적용할 수 있는지 설명하시오.

Ⅳ. 결과 및 분석

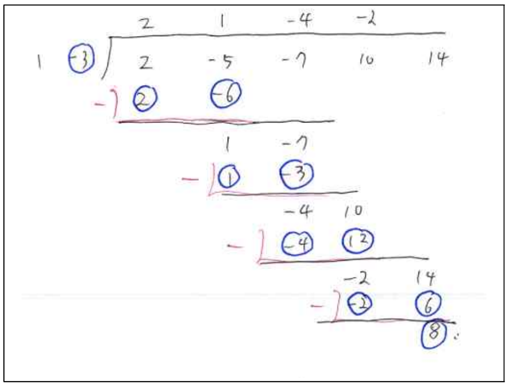
1. 조립제법을 설명하는 과정에 나타난 유추의 양상

연구문제 1의 결과 및 분석을 하위 세 개의 연구문제로 나누어 기술하고자 한다. 학생 A와 학생 B는 우선 1

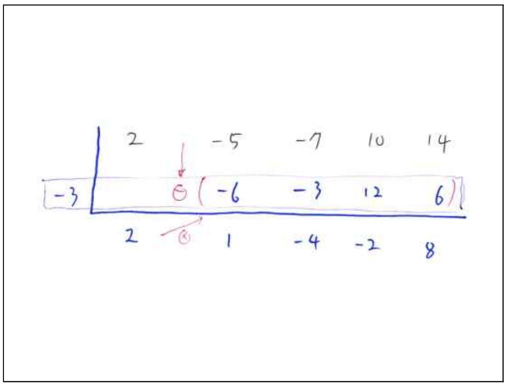
차 다항식으로 나누는 조립제법에 대한 설명을 시도하였다. 그 후 2차 다항식으로 나누는 조립제법과 3차 다항식으로 나누는 조립제법에 대한 설명을 차례로 시도하였다. 학생 A와 학생 B는 유추를 이용하여 1차 조립제법을 2차와 3차 조립제법으로 확장시켰다. 특히, 학생 A는 3차 조립제법 이후에 귀납적 방법으로 조립제법의 일반화를 시도하였다.

1-1. 1차 조립제법을 설명하는 과정에 나타난 유추의 양상

이 절에서는 연구문제 1-1의 결과 및 분석을 기술하고자 한다. 학생 A와 학생 B는 각각 1차 다항식으로 나누는 조립제법에 대해서 설명했다. 우선 학생 A의 사례를 살펴보며, 학생 A는 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하기 위하여, x를 제외하고 계수 및 상수만을 이용하여 장제법으로 나눗셈을 하였다(<그림 Ⅳ-1> 참고). 그리고 장제법과 조립제법을 나란히 적은 후 두 방법을 비교하여 서로 같은 숫자를 <그림 Ⅳ-1>과 같이 ○ 표시하면서 설명을 하였다. <그림 Ⅳ-2>는 학생 A가 <그림 Ⅳ-1>에서 ○ 표시한 숫자들을 조립제법의 형식으로 나타낸 것이다.



<그림 Ⅳ-1> 학생 A의 1차 조립제법 설명 중 일부 (1)



<그림 Ⅳ-2> 학생 A의 1차 조립제법 설명 중 일부 (2)

<그림 Ⅳ-2>의 조립제법은 교과서에서 제시된 일반적인 조립제법과는 차이점이 있었는데, 학생 A는 자신이 만들어낸 <그림 Ⅳ-2>의 조립제법과 교과서에서 제시된 조립제법과의 차이점에 대하여 다음과 같이 설명하였다.

연구자: 지금 유도한 조립제법이 원래 조립제법 그러니까 교과서에 나오는 조립제법과 어떤 차이점이 있지?
학생 A: 두 번째 줄에 -1을 곱해야 조립제법과 같아져요.
연구자: 음... 그렇군. 왜 이런 차이가 생겼을까?
학생 A: (장제법을 가르키며) 그냥 나누기를 한 것은 계산방식이 뺄셈이잖아요. 그런데 $x-3$으로 조립제법을 할 때는 -3 대신에 3을 사용하니까 -1을 분배한 만큼 달라지는 거라 생각해요.
연구자: 그럼.... 교과서에 나오는 조립제법을 이끌어낼 수 있을까?
학생 A: (종이에 쓰면서) 이렇게 하면 교과서에 있는 조립제법이 만들어져요. (<그림 Ⅳ-2>의 두 번째 줄 -3과 -6, -3, 12, 6을 가리키며) 그러니까 이 숫자들이 부호가 바뀌면 되요.

학생 A의 조립제법 설명 과정은 장제법과 조립제법이 갖고 있는 어떤 공통점에 근거한 것으로 이는 유사성

에 근거한 유추적 추론의 과정이다. 학생 A는 장제법과 조립제법의 속성 중에 계산방식에 주목하였다. 그리고 장제법의 계산방식과 조립제법의 계산방식이 각각 뺄셈과 덧셈이라는 점을 지적하면서 이러한 속성의 차이점을 어떻게 연결해야 하는지를 설명하였다. 학생 A의 이러한 사고과정은 장제법의 구조와 조립제법의 구조의 이해를 근거한 것으로 구조 유사성에 근거한 유추적 추론이다. 학생 A의 성공적인 유추적 추론의 이면에는 구조 유사성 뿐 아니라 표면 유사성도 있다. 학생 A는 <그림 Ⅳ-2>의 숫자배열(-3과 -6, -3, 12, 6)과 조립제법의 숫자배열을 단순히 외관상 비교하는 것으로 자신의 설명을 성공적으로 마무리할 수 있었다.

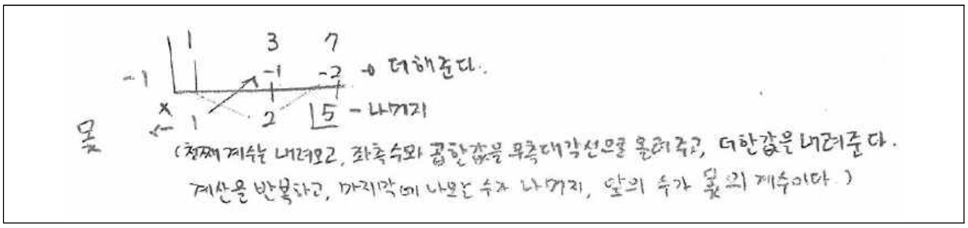
아무리 기저 영역과 목표 영역이 구조 유사성의 정도가 높더라도 학생들이 구조 유사성을 알아차리지 못한다면 유추적 사고는 나타나지 않는다. 이때, 표면 유사성은 구조 유사성을 찾는데 도움이 될 수 있는데, 학생 A의 사례는 어떻게 표면 유사성에 근거하여 구조 유사성을 생각해내는지에 관한 좋은 사례이다.

학생 A의 유추적 추론의 과정은 장제법과 조립제법의 관계 인식에 관한 것으로, 표면 유사성과 구조 유사성에 근거한 학생 A의 조립제법 설명 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-1> 학생 A의 1차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

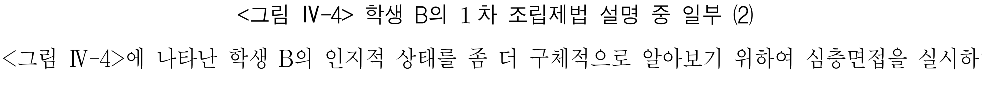
$R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})$
l_{A1} : 1차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수＝1)
s_{A1} : 1차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수＝1)
R_{A1} : 학생 A가 생각해낸 장제법으로부터 조립제법을 설명한 방식, 장제법과 조립제법의 관계

다음으로 학생 B의 사례를 살펴보도록 하자. 학생 B는 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하기 위하여, <그림 Ⅳ-3>와 같이 조립제법의 원리를 꼼꼼하게 짚어보는 것으로부터 시작하였다.



<그림 Ⅳ-3> 학생 B의 1차 조립제법 설명 중 일부 (1)

그리고 학생 B는 조립제법에서 “첫째, 왜 제수(나누는 식)의 부호를 바꾸어야 하는가? 둘째, 나눗셈식(장제법)에서는 빼주는데, 왜 조립제법에서는 더해주는가?”라는 질문을 스스로 제기하였으며 <그림 Ⅳ-4>에서 보듯이 자신의 질문에 스스로 답하였다. 이렇듯 학생 B는 수학적 소재를 이용한 탐구를 좋아한다.


이때, 여기서 드는 의문점이 있다 첫째, 왜 제수의 부호를 바꾸어야 하는가? 둘째, 나눗셈 식에서는 빼주는데, 왜 조립제법에서는 더해주는가? 나는 이 두 의문점이 하나로 연관지어져 있다고 생각한다 무슨소리냐면, 제수의 부호를 바꾸기 때문에 더해주고, 더하기 위해 제수의 부호를 바꾼다고 생각한다.

<그림 Ⅳ-4> 학생 B의 1차 조립제법 설명 중 일부 (2)

<그림 Ⅳ-4>에 나타난 학생 B의 인지적 상태를 좀 더 구체적으로 알아보기 위하여 심층면접을 실시하였다.

연구자: (<그림 Ⅳ-4>를 가리키며) 여기 써진 내용에 대하여 좀 더 설명해 줄 수 있니?

학생B: (<그림 Ⅳ-5>와 같이 쓰면서) 만약에 제수(나누는 식) $x+1$ 에서 $+1$ 의 부호를 바꾸지 않는다면 조립제법은 뺄셈을 해야 해요.

연구자: 그렇군. 이런 조립제법도 만들 수 있겠구나.

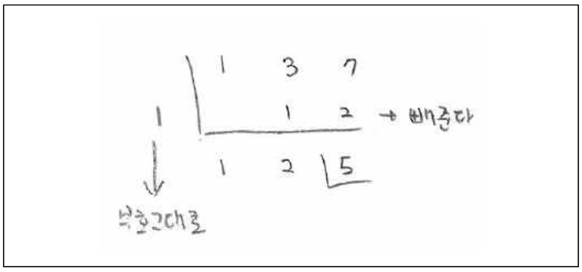
학생B: (<그림 Ⅳ-4>를 가리키며) 이 조립제법을 “뺄셈 조립제법”이라고 부르고 그리고 (<그림 Ⅳ-3>을 가리키며) 수업시간에 배운 조립제법은 “덧셈 조립제법”이라고 불러도 될까요?

연구자: 물론이지.

학생B: (잠시 생각을 하더니) 그런데 선생님. 왜 뺄셈 조립제법 대신에 덧셈 조립제법을 배우는지 알 것 같아요.

연구자: 왜?

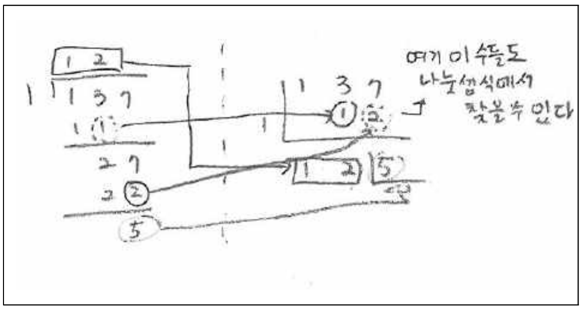
학생B: 뺄셈보다 덧셈이 더 쉬워서요. (웃음)



<그림 Ⅳ-5> 학생 B의 1차 조립제법 설명 중 일부 (3): “뺄셈 조립제법”

학생 B의 조립제법 설명 과정도 장제법과 조립제법의 유사성에 근거한 유추적 추론의 과정이다. 학생 B는 자신이 찾아낸 장제법과 조립제법의 속성에 주목하였으며 그 결과, “덧셈 조립제법”과 “뺄셈 조립제법”이라는 정의를 만들어냈다.

그리고 학생 A와 마찬가지로 학생 B 역시 구조 유사성이 나타나기 전에 표면 유사성이 먼저 나타났다. 학생 B의 특이할 점은 <그림 Ⅳ-6>과 같이 장제법과 자신이 만든 “뺄셈 조립제법”을 비교했다는 점이다. 여기서 알 수 있듯이 학생 B의 경우, 표면적 유사성이 구조적 유사성에 도움을 제공하였다.



<그림 Ⅳ-6> 학생 B의 1차 조립제법 설명 중 일부 (4): 장제법과 “뺄셈 조립제법”의 비교

“덧셈 조립제법”과 “뺄셈 조립제법”을 정의한 학생 B의 태도는 Ma(2002)에서 나오는 사례와 공통점이 있다.

Ma의 사례에서 보면, $\begin{array}{r} 35 \\ -18 \\ \hline \end{array}$ 와 같은 세로 뺄셈에서 왜 일의 자리부터 뺄셈을 해야 하는가에 관한 토론 내용이 기술되어 있다(pp. 64-66). Ma는 만약 지식이 계산 절차를 수행하는 데에만 한정되어 있었다면, 수학적으로 이해할 기회를 갖지 못했을 것이라고 하였다(Ibid, p. 66). 계산 절차에만 초점을 두고 교수-학습이 이루어지는 대표적인 단원이 초등학교 교육과정에서는 세로 덧셈 및 세로 뺄셈이라면, 고등학교 교육과정에서는 조립제법일 것이다. 학생 B는 조립제법이 성립하는 이유를 스스로 설명해봄으로써 수학적으로 깊이 있는 이해를 이끌어낼 수 있었다.

학생 B는 표면 유사성과 구조 유사성에 근거하여 성공적으로 유추적 추론을 하였다. 또한 학생 B의 경우, 표면 유사성이 구조 유사성을 위하여 도움을 제공하였으며, 궁극적으로 유추적 추론이 가능하도록 하였다. 학생 B의 유추적 추론의 과정은 장제법과 조립제법의 관계 인식에 관한 것으로, 표면 유사성과 구조 유사성에 근거한 학생 B의 조립제법 설명 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-2> 학생 B의 1차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

$R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})$
l_{B1} : 1차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수 = 1) s_{B1} : 1차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수 = 1) R_{B1} : 학생 B가 생각해낸 장제법으로부터 조립제법을 설명한 방식, 장제법과 조립제법의 관계

연구문제 1-1에 대한 결과는 다음과 같다. 표면 유사성은 유추적 추론에서 중요한 역할을 한다. 학생 A와 학생 B의 사례는 표면 유사성이 어떻게 구조 유사성과 연관이 되고 궁극적으로 유추적 추론이 나타나는지를 보여주고 있다. 따라서 학생 A와 학생 B의 사례는 표면 유사성이 구조 유사성에 긍정적 영향을 미친다는 표면 유사성의 역할에 관한 좋은 사례가 될 것이다. 또한 학생 A와 학생 B의 유추 과정은 장제법과 조립제법의 관계에 대한 인식으로 각각 $R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})$와 $R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})$으로 나타낼 수 있다.

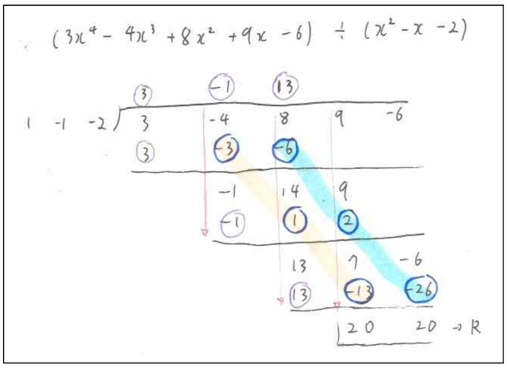
1-2. 2차 조립제법을 설명하는 과정에 나타난 유추의 양상

이 절에서는 연구문제 1-2의 결과 및 분석을 기술하고자 한다. 학생 A와 학생 B 모두 2차 다항식으로 나누는 자신만의 2차 조립제법을 만들어 보고 자신이 만든 조립제법에 대한 설명을 시도하였다. 우선 학생 A의 사례를 살펴보도록 하자.

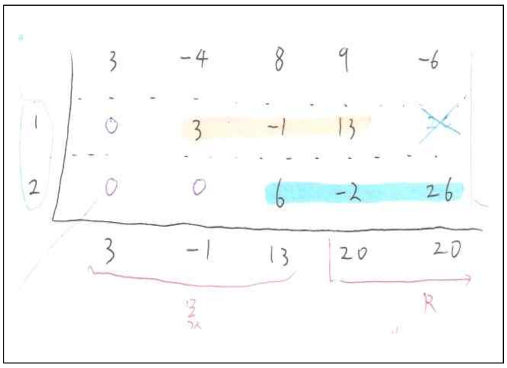
학생 A는 탐구활동 중에 주어진 조립제법의 일반화에 대한 다음과 같은 질문을 받았다. 모든 다항식에 대하여 장제법이 아닌 조립제법을 이용하여 나눗셈을 할 수 있을까? 모든 다항식의 나눗셈에 대하여 조립제법을 만들 수 있을까?" 그러나 일반화에 대한 답을 바로 제시하지는 못하였으며 이에 대한 답을 과제로 하기로 했다. 그러나 이후 제출한 과제보고서는 매우 미흡하였다. 연구자는 학생 A가 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에서 유추적 사고가 나타났다고 하더라도 단번에 일반화를 하는 것은 무리라고 판단하였다. 따라서 학생 A에게 "어떤 다항식을 2차식으로 나누는 나눗셈에 대하여 조립제법을 만들 수 있을까?"라는 질문을 하여 귀납적 방법을 이용하여 조립제법을 일반화하도록 유도하였다. 2차 조립제법에 관한 질문에 대하여 학생 A는 1차식으로 나누는 나눗셈에서 연관성을 찾아보겠다며 지난 시간 자신의 활동 즉, 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 활동 내용을 오랫동안 살펴보았다. 학생 A는 4차식을 2차식으로 나누는 조립제법에 대하여 다

음과 같이 설명하였다.

학생 A: (지난 시간 활동지를 오랫동안 살펴보더니) 대각선이 중요해요.
연구자: 대각선?
학생 A: (<그림 Ⅳ-7>처럼 장제법에 ○ 표시를 하면서) 이 숫자들이 조립제법과 관련이 있는 것 같아요. (지난 시간 활동지 중 일부인 <그림 Ⅳ-1>을 가리키며) 여기서도 대각선의 숫자들이 조립제법에서 부호가 바뀌어서 나타났으니까, (<그림 Ⅳ-7>의 대각선 -3, 1, -13과 대각선 -6, 2, -26을 가리키며) 여기서도 같은 원리겠죠.
연구자: 그럼.... 4차식을 2차식으로 나누는 조립제법을 만들어볼 수 있겠니?
학생 A: 해볼께요. (오랫동안 정성스럽게 <그림 Ⅳ-8>처럼 쓰면서) 이렇게 하면 될 것 같아요.



<그림 Ⅳ-7> 학생 A의 2차 조립제법 설명 중 일부 (1)

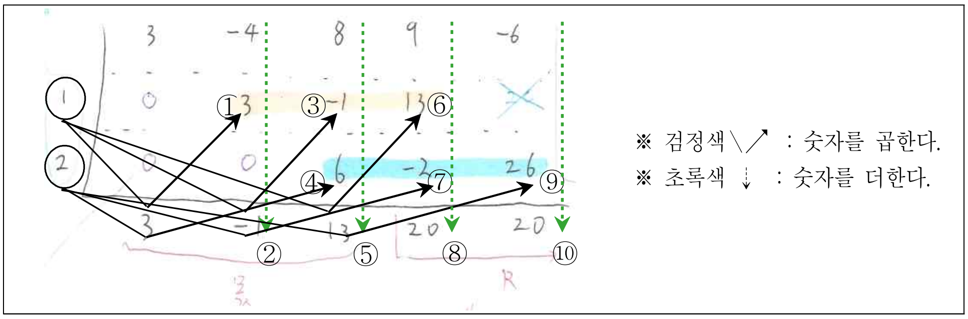


<그림 Ⅳ-8> 학생 A의 2차 조립제법 설명 중 일부 (2)

학생 A는 1차 조립제법이 성립하는 이유를 토대로 4차식을 2차식으로 나누는 조립제법을 설명하였다. 학생 A는 자신이 만든 조립제법에 대하여 다음과 같이 설명하였다.

학생 A: 우선 1차식으로 나눌 때처럼 나누는 식의 부호를 바꾸고... 최고차항은 빼요. 그리고 윗줄 1과 곱한 수들은 윗줄에 쓰고 아랫줄 2와 곱한 수들은 아랫줄에 쓰면 되요. (<그림 Ⅳ-7>를 가리키며) 그냥 나눈거랑 비교해 보면 윗줄 아랫줄 모두 수들을 3개씩만 쓰면 되는 것도 알 수 있어요. (20, 20에 나머지 표지를 하면서) 몫하고 나머지도 알 수 있어요.

학생 A가 발견한 4차식을 2차식으로 나누는 조립제법을 순차적으로 설명하면 다음과 같다. $3x^4-4x^3+8x^2+9x-6$을 x^2-x-2으로 나누는 경우에 대하여 첫째, 2차식 x^2-x-2에서 최고차를 제외한 x항의 계수 -1과 상수항 -2의 부호를 바꿔서 세로로 쓴다. 둘째, x항의 계수가 있는 행(1행)에는 0을 한 개 쓰고, 상수항이 있는 행(2행)에는 0을 두 개 쓴다. 셋째, 1차 조립제법과 마찬가지로 첫 번째 숫자 3은 그냥 내려온다. 넷째, 1행과 곱한 수는 1행에 쓰고 2행과 곱한 수는 2행에 쓴다. 또한 각각의 행에는 0이 아닌 숫자가 3개씩만 나타나도록 계산을 한다. 구체적인 계산 순서는 <그림 Ⅳ-9>의 ①부터 ⑩까지에 나타나 있다. 다섯째, 2차식으로 나눌 때 나머지는 1차식이므로 끝에 두 개의 숫자 20, 20이 나머지를 의미한다. 즉, 나머지는 $20x+20$이다.



<그림 Ⅳ-9> 학생 A가 발견한 2차 조립제법의 계산 순서

2차 조립제법을 발견해낸 학생 A의 사고 과정은 1차 조립제법을 유도한 방법과 어떤 공통점이 있을 거라는 유사성에 근거한 유추적 추론이다. 이러한 유추적 추론이 가능한 이유는, 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에 보았듯이, 학생 A가 '뺄셈을 이용하는 장제법'이 '덧셈을 이용하는 조립제법'으로 어떻게 바뀌는지에 관한 구조적 이해가 있었기 때문이었다. 즉, 학생 A는 1차 조립제법을 구조 유사성에 근거하여 이해했기 때문에, 2차 조립제법의 발견 과정에서는 접근 단계부터 구조적으로 접근하였으며, 그 결과 유추적 추론이 가능했다고 분석된다. 뿐만 아니라, 학생 A가 보였던 유사성은 '관계에 대한 관계'의 유사성으로 이는 고차 유사성이고 동시에 고차 유추적 추론에 해당한다. 학생 A는 고차 구조 유사성과 고차 유추적 추론을 통해, 2차 조립제법을 발견하였다. 그러나 <그림 Ⅳ-7>과 <그림 Ⅳ-8>을 비교한 결과에서 보았듯이 표면 유사성에 근거한 유추적 추론도 있었음을 알 수 있다.

학생 A가 2차 장제법에서 2차 조립제법을 이끌어낸 방법은 1차 장제법에서 1차 조립제법을 이끌어낸 방법과 동일하므로 R_{A1}으로 나타낼 수 있다. 다시 말해, 학생 A가 생각해낸 2차 장제법과 2차 조립제법의 관계는 1차 장제법과 1차 조립제법의 관계 R_{A1}과 동일하다.

또한 학생 A는 관계들 $R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})$와 $R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2})$ 사이의 관계를 발견한 것이다. 따라서 학생 A의 사고 과정은 구조 유사성 중에서도 고차 구조 유사성에 근거한 유추적 추론에 해당한다. 학생 A의 유추적 사고 과정에서 기저영역은 1차 장제법과 1차 조립제법의 계산 방식 및 속성 그리고 1차 장제법과 1차 조립제법의 관계 $R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})$이고, 목표영역은 2차 장제법과 2차 조립제법의 계산 방식 및 속성 그리고 2차 장제법과 2차 조립제법의 관계 $R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2})$이다. 학생 A의 2차 조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내 보면 다음과 같다.

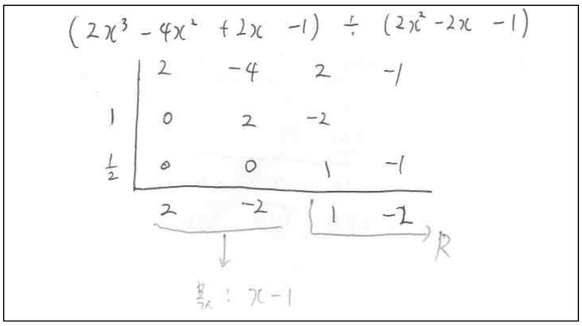
<표 Ⅳ-3> 학생 A의 2차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

$$R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})] \rightarrow [R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2})$$

$l_{A1},\ s_{A1},\ R_{A1}$: <표 Ⅳ-1>과 동일
l_{A2} : 2차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)
s_{A2} : 2차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)

학생 A는 자신이 만든 최고차 계수가 1이 아닌 2차식 $2x^2-2x-1$로 나누는 조립제법에 대해서도 <그림 Ⅳ-10>과 같이 설명하였다. 학생 A는 "$2x^3-4x^2+2x-1$을 $2x-1$로 나누는 조립제법"에서

“$2x^3-4x^2+2x-1$을 $2x^2-2x-1$로 나누는 조립제법”을 유추하였다. 이는 최고차 계수가 1이 아닌 1차식으로 나누는 조립제법에서 최고차 계수가 1이 아닌 2차식으로 나누는 조립제법으로 유추가 작동된 경우이다. 다시 말해, 학생 A는 $2x-1$으로 나눌 때 $\frac{1}{2}$을 이용하여 조립제법을 한다는 사실을 $2x^2-2x-1$으로 나눌 때에 적용한 것이다. 학생 A가 장제법에서 조립제법을 유추한 것이 아니라 조립제법에서 조립제법을 유추한 것은 학생 A가 더 이상 표면 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하는 것이 아니라, 철저하게 구조 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하였음을 의미한다. 또한 학생 A가 <그림 Ⅳ-10>에서 보여준 발견은 2차 조립제법의 절차를 그대로 이용하여 조립제법을 한 것으로 이는 절차 유사성에 근거하여 유추적 추론을 한 것으로 분석할 수 있다.



<그림 Ⅳ-10> 학생 A의 2차 조립제법 설명 중 일부 (3)

학생 A는 자신이 발견한 최고차 계수가 1이 아닌 2차 조립제법에 대하여 다음과 같이 설명하였다.

연구자: (<그림 Ⅳ-10>의 왼쪽의 숫자 1과 $\frac{1}{2}$을 가리키며) 이 숫자들은 무엇을 의미할까?

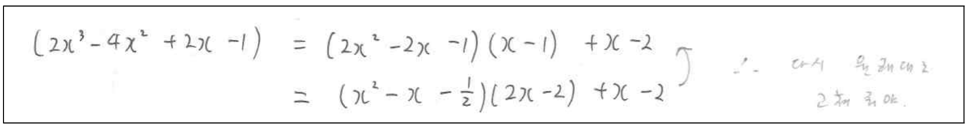
학생 A: $2x^2-2x-1$으로 나누는 것을 의미해요. 음... 예를 들어, $2x-1$로 나눌 때 조립제법에서 $\frac{1}{2}$로 쓰고 하잖아요. 그것처럼... 2로 묶은 다음 $\left(2\left(x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right.$라고 쓰면서$\left.\right)$ x^2을 빼고, 나머지 항들의 숫자를 부호를 바꿔서 쓴 거에요. 그리고 (<그림Ⅳ-9>를 가리키며) 조립제법은 이거처럼 했어요.

연구자: 그럼... 몫과 나머지는 무엇일까?.

학생 A: 몫은 $x-1$이고 나머지는 $x-2$이요.

연구자: (<그림 Ⅳ-10>의 숫자 2와 -2를 가리키며) 왜 몫이 $2x-2$가 아니라 $x-1$인 걸까?

학생 A: (<그림 Ⅳ-11>처럼 쓰면서) 이렇게 증명할 수 있어요.



<그림 Ⅳ-11> 학생 A의 2차 조립제법 설명 중 일부 (4)

학생 A가 최고차 계수가 1이 아닌 2차 조립제법을 발견하는 과정은 유사성에 근거한 유추적 추론의 과정이다. 특히, 여기에 나타난 유사성은 구조 유사성과 절차 유사성이다. 학생 A는 최고차 계수가 1이 아닌 1차 조

립제법에 나타난 구조를 기저영역으로 보고, 이 기저영역과 구조적으로 유사하게 그리고 절차적으로도 유사하게 자신만의 2차 조립제법을 만들어 냈다. 그리고 자신이 만든 방법을 적절한 방법으로 검토하는 과정을 거쳤다. 학생 A는 <그림 Ⅳ-11>를 다음과 같은 식으로 나타내면서, 최고차 계수 a로 묶은 후 조립제법을 했을 경우 몫을 다시 최고차 계수 a로 나누어 주어야 함을 다음과 같이 설명하면서 마무리 하였다.

> 학생 A: (<그림 Ⅳ-12>를 가리키며) 이 숫자들을 식으로 나타낼 수 있을 것 같아요. $\left(f(x)=(ax^2+bx+c)Q(x)+R(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)Q(x)+R(x)\right.$ 라고 쓰면서$\Big)$ 이렇게 하면 일반적인 경우에 대한 설명이 될 것 같아요.

심리학에서 이루어진 유추에 관한 이론들을 살펴보면, 연구 대상자들은 초기에는 표면 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하다가 점점 구조 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하게 된다. 이런 현상을 김연수(1999)는 관계 이동(relation shift)이라고 하였다(p. 5). 학생 A도 유추적 추론의 과정에서 관계 이동 현상이 나타났는데, 초기에는 표면 유사성에 의존한 구조 유사성을 보였으나, 점점 표면 유사성으로부터 독립하여 구조 유사성에 근거한 유추적 추론이 나타났다.

학생 A가 생각해낸 나누는 다항식의 최고차 계수가 1이 아닌 2차 조립제법에 대한 설명 방법은 나누는 다항식의 최고차 계수가 1인 2차 조립제법에 대한 설명 방법 R_{A1}과 동일하다. 그리고 학생 A가 알아낸 나누는 다항식의 최고차 계수가 1이 아닌 2차 조립제법을 설명해낸 방식 즉, 계수로 묶은 후 조립제법을 하는 방법을 R_{A2}라 하자. 그러면, 학생 A의 나누는 다항식의 최고차 계수가 1이 아닌 2차 조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 $R_{A2}(s_{A1*})] \to [R_{A2}(s_{A2*})$ 및 $R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A2*})$와 같다(<표 Ⅳ-4> 참고). 또한 지금까지 나타난 학생 A의 사고 과정을 종합하여 Gentner의 SMM으로 나타내보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-4> 학생 A의 최고차 계수가 1이 아닌 경우의 2차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

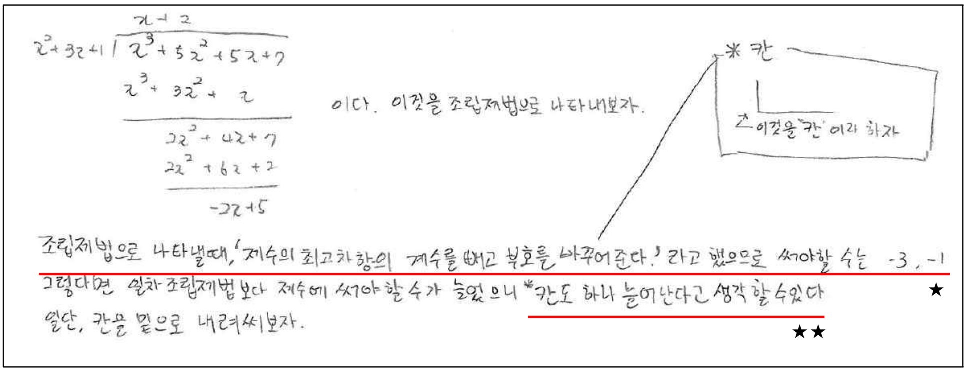
$$R_{A2}(s_{A1*})] \to [R_{A2}(s_{A2*}), \quad R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A2*})$$

$$R(R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1}),\ R_{A2}(s_{A1*}),\ R_{A1}(s_{A2}))] \to [R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2}),\ R_{A2}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A2*}))$$

$l_{A1},\ l_{A2},\ s_{A1},\ s_{A2},\ R_{A1}$: <표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-3>와 동일
s_{A1*} : 1차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수$\neq 1$)
s_{A2*} : 2차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수$\neq 1$)
R_{A2} : 계수로 묶은 후 조립제법하는 방법

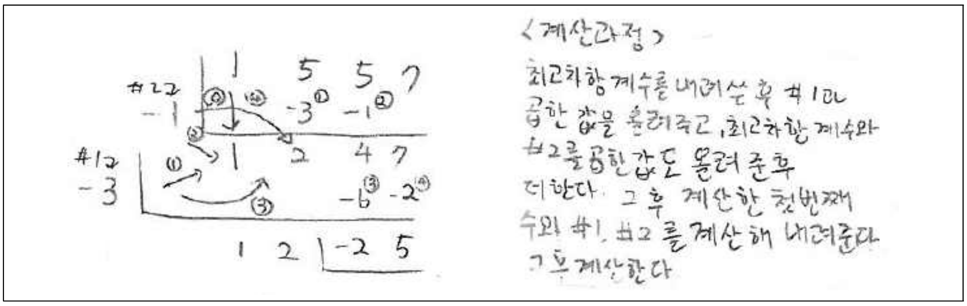
다음으로 학생 B의 사례를 살펴보도록 하자. 학생 B도 역시 탐구활동 중에 주어진 조립제법의 일반화 가능성에 대한 질문을 받았으나 그에 대한 답은 제시하지 못하였다. 연구자는 학생 B 역시 1차 조립제법이 성립하는 이유를 설명하는 과정에서 유추적 사고가 나타났다고 하더라도 중간 과정 없이 일반화를 하는 것은 무리라고 판단하였다. 따라서 연구자는 학생 B가 귀납적 방법을 이용하여 일반화를 시도할 수 있도록 안내하기 위하여 “어떤 다항식을 2차식으로 나누는 나눗셈에 대하여 조립제법을 만들 수 있을까?”라는 질문을 하였다. 이에 대하여 학생 B는 충분한 시간을 갖고 탐구를 하였으나 성과가 없어서 이를 과제로 하기로 했다. 다음 시간, 학생 B의 과제보고서에 대한 심층면접에서 다음과 같이 설명하였다.

학생 B: 교과서에서 조립제법을 찾아봤는데, 교과서에서는 일차식일 때만 조립제법이 가능하다고 나와 있었어요. 그래서 2차식에 대한 조립제법을 어떻게 해야 하는지 고민을 하다가, 일단 조립제법이 가능하다고 가정하고 x^3+5x^2+5x+7을 x^2+3x+1로 나누는 경우를 생각해 보기로 했어요. (자신의 과제보고서를 가리키며) 일단 3차식을 2차식으로 나누어 봤어요(<그림 Ⅳ-12> 참고).



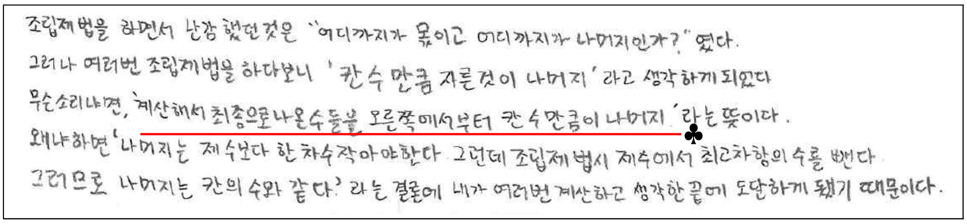
<그림 Ⅳ-12> 학생 B의 2차 조립제법 설명 중 일부 (1)

연구문제 1-1의 결과 및 분석에서 이미 보았듯이 학생 B는 "덧셈 조립제법"이나 "뺄셈 조립제법"처럼 자신의 사고 과정에 나타난 산출물들을 정의하는 것을 선호한다. 학생 B는 2차 조립제법을 설명하는 과정에서도 "칸"이라는 용어를 정의함으로써 자신의 설명을 세련되게 하였다([★]와 [★★] 참고). 학생 B는 자신의 생각을 <그림 Ⅳ-13>와 같이 종합하였다.



<그림 Ⅳ-13> 학생 B의 2차 조립제법 설명 중 일부 (2)

학생 B는 2차 조립제법의 설명을 마친 후의 소감을 2차 조립제법을 발견한 과정에 대한 반성적 관점에서 <그림 Ⅳ-15>와 같이 작성하였다. 학생 B는 자신의 감상문에서 자신이 정의한 "칸"을 나머지와 관련하여 설명을 하였다. "(나머지의 차수) = (나누는 다항식의 차수 − 1)"이다. 그런데 조립제법을 할 때, 나누는 다항식에서 최고차의 항을 제외하고 "칸"을 만들어서 조립제법을 하므로 (♣)와 같이 "(나머지에 해당하는 숫자의 개수)=("칸"의 개수)"라는 자신의 생각을 기술하였다. 자신의 생각을 설명하는데 스스로 만든 정의를 활용하는 학생 A의 설명 과정은 매우 수학자적인 사고 과정이라 하겠다.



조립제법을 하면서 난감했던것은 "어디까지가 몫이고 어디까지가 나머지인가?" 였다.
그러나 여러번 조립제법을 하다보니 '칸수 만큼 자른것이 나머지' 라고 생각하게 되었다
무슨소리냐면, 계산해서 최종으로 나온수들을 오른쪽에서부터 칸수만큼이 나머지 '라는 뜻이다.
왜냐하면 '나머지는 제수보다 한 차수작아야한다 그런데 조립제법시 제수에서 최고차항의 수를 뺀다
그러므로 나머지는 칸의 수와 같다' 라는 결론에 내가 여러번 계산하고 생각한 끝에 도달하게 됐기 때문이다.

<그림 Ⅳ-14> 학생 B의 2차 조립제법에 대한 감상문 중 일부

2차 조립제법을 발견한 학생 B의 사고 과정은 학생 A의 사고 과정과 유사했다. 학생 B의 사고 과정은 2차 장제법과 2차 조립제법이 갖고 있는 어떤 공통점에 근거한 것으로 이는 유추적 추론의 과정이다. 학생 B가 이러한 유추적 추론이 가능한 이유는, 학생 B가 "덧셈 조립제법"과 "뺄셈 조립제법"을 정의하여 자신의 사고 과정을 기술할 만큼 1차 조립제법에 대한 구조 및 을 자신만의 방법으로 완벽하게 이해하고 있었기 때문이다. 또한 1차 조립제법을 유도한 절차를 이용하는 절차 유사성을 보였다. 즉, 학생 B는 구조 유사성 및 절차 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하였으며 그 결과, 자신만의 2차 조립제법을 만들어 냈다.

학생 B가 2차 장제법에서 2차 조립제법을 이끌어낸 방법은 1차 장제법에서 1차 조립제법을 이끌어낸 방법과 동일하므로 R_{B1}으로 나타낼 수 있다. 다시 말해, 학생 B가 생각해낸 2차 장제법에서 2차 조립제법의 관계는 1차 장제법과 1차 조립제법의 관계 R_{B1}와 동일하다.

또한 학생 B는 관계들 $R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})$와 $R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2})$사이의 관계를 발견한 것이다. 따라서 학생 B의 사고 과정은 구조 유사성 중에서도 고차 구조 유사성에 근거한 유추적 추론에 해당한다. 학생 B의 유추적 사고 과정에서 기저영역은 1차 장제법과 1차 조립제법의 계산 방식 및 속성 그리고 1차 장제법과 1차 조립제법의 관계 $R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})$이고, 목표영역은 2차 장제법과 2차 조립제법의 계산 방식 및 속성 그리고 2차 장제법과 2차 조립제법의 관계 $R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2})$이다. 학생 B의 2차 조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내 보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-5> 학생 B의 2차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

$$R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})] \rightarrow [R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2})$$

$l_{B1},\ s_{B1},\ R_{B1}$: <표 Ⅳ-2>와 동일
l_{B2} : 2차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)
s_{B2} : 2차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)

연구문제 1-2에 관한 결과는 다음과 같다. 유추적 사고란 구조 유사성이 있어야 나타날 수 있다. 학생 A와 학생 B의 사례는 모두 구조 유사성이 어떻게 유추적 추론에 영향을 주는지를 보여주었다. 따라서 학생 A와 학생 B의 사례는 유추적 사고에서 구조 유사성의 역할을 강조하는 좋은 사례가 될 것이다.

학생 A와 학생 B의 공통점은 첫째, 1차 장제법에서 1차 조립제법을 유도하는 과정에서 이해하게 된 장제법과 조립제법의 구조를 기반으로 2차 장제법에서 2차 조립제법을 성공적으로 유추하였으며 그 결과, 각자 자신들만의 방법으로 2차 조립제법을 발견하였다. 둘째, 구조 유사성 및 절차 유사성에 근거한 유추적 추론을 하였다. 2차 조립제법을 만들어내는 과정에서 구조 유사성이 나타날 수 있었던 이유는 1차 장제법과 1차 조립제법

을 구조적으로 이해하고 있었기 때문이다. 더불어 학생 A와 학생 B의 구조 유사성은 “관계에 대한 관계”의 구조를 파악한 것으로 고차 구조 유사성에 해당한다. 셋째, 자신만의 조립제법을 만드는 과정에서 기저 영역의 내용을 무작위로 추출하지 않았다. 기저 영역의 내용을 계획적으로 선택하였다. 그리고 선택 후에는 기저 영역과 목표 영역을 지속적으로 비교하면서 유추적 추론이 진행되었다. 이러한 유추적 사고는 반성적 사고의 특성으로 해석할 수 있다.

반면에 1-2절에 나타난 학생 A와 학생 B의 차이점을 살펴보자. 첫째, 학생 A는 초기에는 표면 유사성 및 구조 유사성에 의한 유추적 추론을 하다가 나중에는 구조 유사성 및 절차 유사성에 의한 유추적 추론을 하는 관계 이동 현상을 보였다. 학생 B는 처음부터 구조 유사성 및 절차 유사성에 의한 유추적 추론을 하였다. 둘째, 학생 A는 최고차 계수가 1이 아닌 다항식으로 나누는 경우까지 포함하여 유추적 사고를 하였으며 학생 B는 최고차 계수가 1인 다항식의 경우에만 유추적 사고가 나타났다.

학생 A와 학생 B의 2차 조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 다음과 같다.

◉ 학생 A의 경우: $R(R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1}),\ R_{A2}(s_{A1*}),\ R_{A1}(s_{A2}))] \rightarrow [R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2}),\ R_{A2}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A2*}))$

◉ 학생 B의 경우: $R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})] \rightarrow [R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2})$

1-3. n차 조립제법을 설명하는 과정에 나타난 유추의 양상

이 절에서는 연구문제 1-3의 결과 및 분석을 기술하고자 한다. 학생 A와 학생 B 모두 n차 다항식으로 나누는 자신만의 n차 조립제법을 만들어 보고자 하였다. 우선 학생 A의 사례를 살펴보도록 하자.

학생 A에게 탐구활동 중에 주어진 조립제법의 일반화에 대한 다음과 같은 질문을 하였다. 모든 다항식에 대하여 장제법이 아닌 조립제법을 이용하여 나눗셈을 할 수 있을까? 모든 다항식의 나눗셈에 대하여 조립제법을 만들 수 있을까? 학생 A는 일반화에 대한 답을 바로 제시하지는 못하였으나, 연구문제 1-1과 연구문제 1-2의 결과 및 분석에서 기술한 바와 같이 자신만의 2차 조립제법을 만들 수 있었다. 그리고 나서는 $3x^6-4x^5+8x^3+9x^2+7x-6$을 x^3-2x^2+5으로 나누는 3차 조립제법과 $2x^5+3x^4+2x^3+x^2+6x+7$을 $x^4+2x^3+x^2+3x+4$으로 나누는 4차 조립제법을 통하여 일반화를 시도하였다.

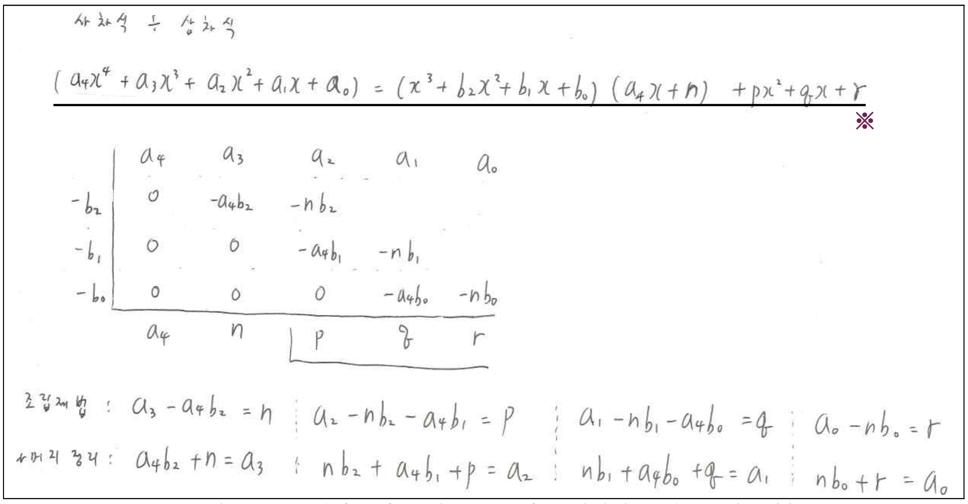
학생 A는 자신이 만든 2차 조립제법의 방법으로부터 곧바로 3차 및 4차 조립제법을 이끌어 냄으로써 일반화가 가능하다는 확신을 갖게 되었다. 학생 A는 다음과 같이 진술하였다.

> 학생 A: 평소에 조립제법은 1차식에만 적용하는 것이라고 생각했거든요. 2차식에 적용해 볼까하는 생각을 해본 적은 없었거든요. 2차식에 적용하는 게 생각보다 너무 오래 고민하긴 했지만 어느 사이에 제가 2차식, 3차식, 4차식의 경우의 조립제법을 하고 있었어요.(웃음) 그리고 선생님께 제 생각을 설명하면서 더욱 명확해졌어요. 제가 발견한 공식이 단단해진 느낌을 받았어요.

지금까지 학생 A는 구체적인 예를 이용하여 조립제법을 만들었다. 그런데 일반화과정에서는 문자를 이용하여 자신의 조립제법을 설명하였다. 학생 A는 <그림 Ⅳ-15>에서 알 수 있듯이 4차식을 3차식으로 나누는 자신만의 조립제법을 문자를 이용하여 나타내었다. 또한 4차식을 2차식으로 나누는 자신만의 조립제법도 문자를 이용하여 나타내었다.(4차식을 2차식으로 나누는 예는 지면 관계상 생략)

<그림 Ⅳ-15>에서 마지막 줄은 학생 A가 만든 자신만의 조립제법에 관한 증명인데, 예를 들어 $a_4b_2+n=a_3$은 학생 A가 만든 조립제법의 $a_3-a_4b_2=n$에서 항의 이항을 통해 얻은 것이며, 동시에 주어진

식(※)에서 x^3의 계수를 좌우 비교하여 얻은 것이기도 하다. 그러나 학생 A는 자연수 m, n에 대하여 $m \geq n$일 때, m차식을 n차식으로 나누는 경우에 대한 일반화를 완벽하게 성공하지는 못하였다. 학생 A는 n차식을 $n-1$차식으로 나누는 경우에 대한 일반화 시도를 위하여 장제법을 거쳐 <그림 Ⅳ-16>처럼 몫과 나머지에 관한 식을 얻었으나 조립제법으로 만들지는 못하였다.



사차식 ÷ 삼차식

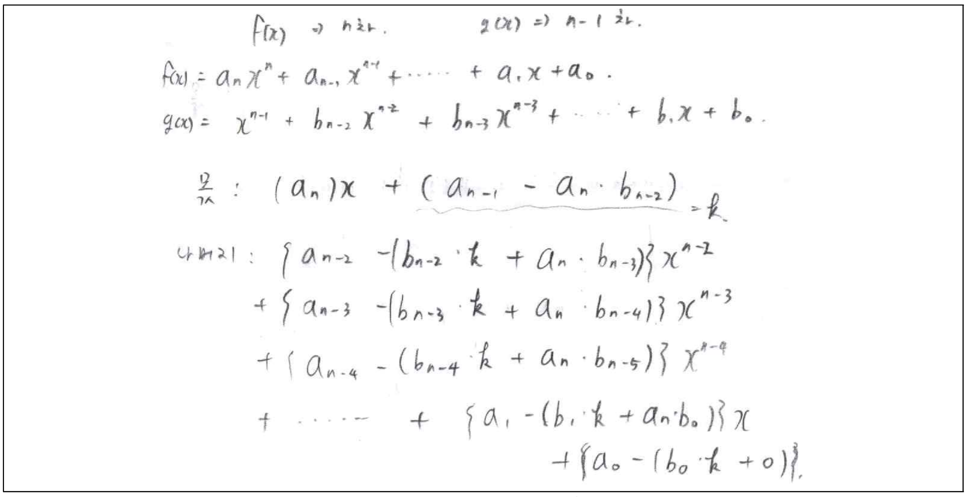
$(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0) = (x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)(a_4x+n)+px^2+qx+r$ ※

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$-b_2$	0	$-a_4b_2$	$-nb_2$		
$-b_1$	0	0	$-a_4b_1$	$-nb_1$	
$-b_0$	0	0	0	$-a_4b_0$	$-nb_0$
	a_4	n	p	q	r

조립제법 : $a_3-a_4b_2=n$ | $a_2-nb_2-a_4b_1=p$ | $a_1-nb_1-a_4b_0=q$ | $a_0-nb_0=r$

나머지 정리 : $a_4b_2+n=a_3$ | $nb_2+a_4b_1+p=a_2$ | $nb_1+a_4b_0+q=a_1$ | $nb_0+r=a_0$

<그림 Ⅳ-15> 학생 A의 문자로 표현된 조립제법 설명 중 일부 (1)



$f(x)$ ⇒ n차. $g(x)$ ⇒ $n-1$차.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$

$g(x)=x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\cdots+b_1x+b_0.$

몫 : $(a_n)x+\underbrace{(a_{n-1}-a_n\cdot b_{n-2})}_{=k}$

나머지 : $\{a_{n-2}-(b_{n-2}\cdot k+a_n\cdot b_{n-3})\}x^{n-2}$

$+\{a_{n-3}-(b_{n-3}\cdot k+a_n\cdot b_{n-4})\}x^{n-3}$

$+\{a_{n-4}-(b_{n-4}\cdot k+a_n\cdot b_{n-5})\}x^{n-4}$

$+\cdots\cdots+\{a_1-(b_1\cdot k+a_n\cdot b_0)\}x$

$+\{a_0-(b_0\cdot k+0)\}.$

<그림 Ⅳ-16> 학생 A의 n차식을 $n-1$차식으로 나누는 경우에 대한 설명 중 일부

학생 A가 m차식을 n차식으로 나누는 일반화를 완벽하게 성공한 것은 아니다. 그러나 학생 A의 3차 조립제법 및 4차 조립제법 발견 과정은 2차 조립제법에 대한 절차 유사성에 근거한 발견이다. 학생 A의 3차, 4차

조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 $R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A3})$ 및 $R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A4})$ 로 나타낼 수 있다(<표 Ⅳ-6> 참고).

또한, 학생 A가 문자를 이용하여 조립제법을 설명해낸 방식 즉, 문자를 이용하여 조립제법을 표현하고 검산식을 이용하여 조립제법을 증명하는 방식을 A_{A3} 라 하자. 그러면 학생 A의 문자를 이용한 3차 조립제법 및 4차 조립제법의 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 $R_{A3}(s_{A2})] \to [R_{A3}(s_{An})$ 으로 나타낼 수 있다(<표 Ⅳ-6> 참고). 또한 지금까지 나타난 학생 A의 사고 과정을 종합하여 Gentner의 구조사상 이론에 기초한 SMM으로 나타내보면 <표 Ⅳ-6>와 같다.

학생 A가 n차 조립제법을 발견하는 과정은 유사성에 근거한 유추적 추론의 과정이다. 특히, 여기에 나타난 유사성은 구조 유사성과 절차 유사성이다. 학생 A는 2차 조립제법에 나타난 구조를 기저영역으로 보고, 이 기저영역과 구조적으로 유사하게 그리고 절차적으로도 유사하게 자신만의 3차 및 4차 조립제법을 만들어 냈다. 그리고 자신이 만든 방법을 적절한 방법으로 검토하는 과정을 거쳤다. 학생 A의 사례에서 보듯이 절차 유사성에 근거한 유추적 추론은 학생 A의 고차 다항식의 조립제법에 관한 내면화를 이끌어 냈다고 할 수 있다.

<표 Ⅳ-6> 학생 A의 문자를 이용한 고차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

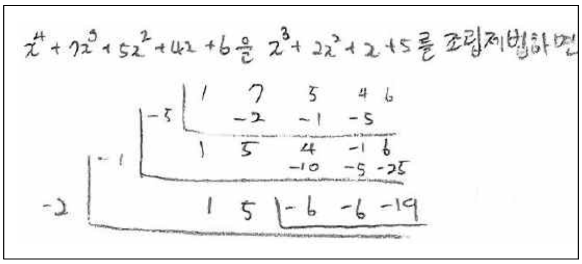
$$R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A3}), \quad R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A4}), \quad R_{A3}(s_{A2})] \to [R_{A3}(s_{An})$$

$$R(R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1}),\ R_{A2}(s_{A1*}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A3}(s_{A2}))]$$

$$\to [R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2}),\ R_{A2}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A3}),\ R_{A1}(s_{A4}),\ R_{A3}(s_{An}))$$

$l_{A1},\ l_{A2},\ s_{A1},\ s_{A2},\ s_{A1*},\ s_{A2*},\ R_{A1},\ R_{A2}$: <표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-3>, <표 Ⅳ-4>와 동일
s_{A3} : 3차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)
s_{A4} : 4차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)
s_{An} : 문자를 이용한 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)
R_{A3} : 문자를 이용한 조립제법에서 검산식을 이용하여 증명하는 방법

다음으로 학생 B의 사례를 살펴보도록 하자. 학생 B도 일반화에 대한 답을 바로 제시하지는 못하였으나 3차 조립제법과 4차 조립제법을 만들기를 시도하였으며 이를 통하여 일반화를 시도하였다. 학생 B는 <그림 Ⅳ-17> 처럼 3차식으로 나누는 나눗셈에 대하여 자신만의 3차 조립제법을 만들었다.



<그림 Ⅳ-17> 학생 A의 3차 조립제법 설명 중 일부

학생 B는 n차 조립제법으로의 일반화에 성공한 것은 아니며, 학생 A처럼 문자를 이용하여 조립제법을 나타내지도 못하였다.

그러나 학생 B는 일반화를 시도하는 과정에서 자신만의 3차 조립제법을 발견하였으며, 학생 B가 발견해낸 3차 조립제법에 대한 설명 방법은 2차 조립제법에 대한 설명 방법 R_{B1}과 동일하다. 따라서 학생 B의 3차 조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 $R_{B1}(s_{B2})] \to [R_{B1}(s_{B3})$ 및 $R_{B1}(s_{B2})] \to [R_{B1}(s_{B4})$로 나타낼 수 있다(<표 Ⅳ-7> 참고). 또한 지금까지 나타난 학생 B의 사고 과정을 종합하여 Gentner의 SMM으로 나타내보면 <표 Ⅳ-7>와 같다.

학생 B의 경우도 학생 A와 마찬가지로 관계 이동(relation shift) 현상이 나타났는데, 학생 B는 초기에는 표면 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하다가 점점 구조 유사성에 근거하여 유추적 추론을 하였다.

학생 B가 n차 조립제법을 발견하는 과정은 유사성에 근거한 유추적 추론의 과정이었다. 특히, 여기에 나타난 유사성은 구조 유사성과 절차 유사성이었는데, 학생 B는 2차 조립제법에 나타난 구조를 기저영역으로 보고, 이 기저영역과 구조적으로 유사하게 그리고 절차적으로도 유사하게 자신만의 3차 및 4차 조립제법을 만들어 냈다. 학생 A의 사례에서 알 수 있듯이 절차 유사성에 근거한 유추적 추론은 학생 A의 고차 다항식의 조립제법에 관한 내면화를 이끌어 냈다.

<표 Ⅳ-7> 학생 A의 문자를 이용한 고차 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

$$R_{B1}(s_{B2})] \to [R_{B1}(s_{B3}), \quad R_{B1}(s_{B2})] \to [R_{B1}(s_{B4})$$

$$R(R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1}),\ R_{B1}(s_{B2}),\ R_{B1}(s_{B2}))] \to [R(R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2}),\ R_{B1}(s_{B3}),\ R_{B1}(s_{B4}))$$

l_{B1}, l_{B2}, s_{B1}, s_{B2}, R_{B1} : <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-7>와 동일
s_{B3} : 3차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수＝1)
s_{B4} : 4차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수＝1)

연구문제 1-3에 관한 결과는 다음과 같다. 유추적 사고란 구조 유사성 및 절차 유사성에 근거할 때 나타날 수 있다. 학생 A와 학생 B의 사례는 모두 구조 유사성 및 절차 유사성이 어떻게 유추적 추론에 영향을 주는지를 보여주고 있다.

학생 A와 학생 B의 공통점은 다음과 같다. 첫째, 학생 A와 학생 B는 2차 조립제법을 기저영역으로 하여 3차 및 4차 조립제법을 성공적으로 유추하였다. 자신들이 만든 방법이 내면화되었다고 볼 수있으며 그 결과 5차 이상의 고차 조립제법에 대해서도 자유롭게 조립제법을 수행랑 수 있었다. 둘째, 귀납적 방법으로 n차 조립제법을 유도하고자 하였으나 실패하였다. 이는 고차 조립제법을 자유롭게 수행할 만큼 자신들이 만든 방법에 자동화되었음에도 불구하고 문자를 다루는 능력이 아직 미숙하기 때문인 것으로 생각된다. 셋째, 학생 A와 학생 B는 지금까지 자신들이 만든 조립제법의 전체적인 관계를 파악하면서 탐구활동을 진행하였다. 이는 "관계에 대한 관계"를 파악하는 고차 구조 유사성에 근거한 유추적 사고를 한 것으로 볼 수 있다. 넷째, 전체적인 관계 파악과 더불어 기저 영역과 목표 영역을 지속적으로 비교하면서 유추적 추론이 진행되었다. 이러한 유추적 사고는 반성적 사고의 특성으로 해석할 수 있다.

학생 A와 학생 B의 차이점은 다음과 같다. 학생 A는 문자를 이용하여 고차 조립제법을 탐구하였으나 학생 B는 숫자를 이용하여 고차 조립제법을 탐구하였다. 학생 A와 학생 B의 2차 조립제법 발견 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 다음과 같다.

◉ 학생 A의 경우: $R(R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1}),\ R_{A2}(s_{A1*}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A3}(s_{A2}))]$

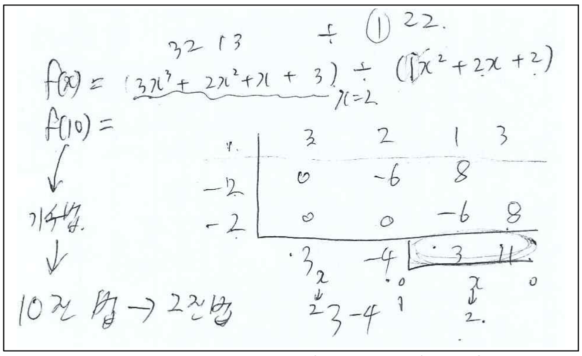
$\rightarrow [R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2}),\ R_{A2}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A3}),\ R_{A1}(s_{A4}),\ R_{A3}(s_{An}))$

◉ 학생 B의 경우: $R(R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1}),\ R_{B1}(s_{B2}))] \rightarrow [R(R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2}),\ R_{B1}(s_{B3}))$

2. 조립제법을 다른 영역에 적용하는 과정에서 나타난 유추의 양상

연구문제 2의 결과 및 분석은 다음과 같다. 학생 A는 유추적 사고를 통하여 조립제법을 다른 영역에 적용할 수 있었다. 그러나 학생 B는 다양한 시도를 해보았으나 조립제법을 다른 영역에 적용하는 것은 성공하지 못했다. 따라서 이 절에서는 학생 A의 사례를 중심으로 살펴보고자한다.

학생 A는 조립제법을 자연수의 나눗셈에 적용하였다(<그림 Ⅳ-18> 참고). 학생 A는 자연수 3213을 자연수 122로 나누는 경우를 다항식 $3x^3+2x^2+x+3$을 다항식 x^2+2x+2으로 나누는 경우로 설명하였다. 학생 A는 조립제법을 이용하여 다항식의 나눗셈을 한 후에 x에 10을 대입하였다.



<그림 Ⅳ-18> 학생 A의 조립제법을 이용한 자연수의 나눗셈 설명 과정

학생 A는 조립제법을 자연수의 나눗셈에 적용하게 된 이유 및 구체적인 과정을 다음과 같이 설명하였다.

학생 A: 자연수와 다항식 모두에 적용할 수 있는 나눗셈 방법을 만들고 싶었어요.

연구자: (<그림 Ⅳ-18>을 가리키며) 그래서 이런 방법을 생각한 건가? 좀 더 자세히 이야기해볼까?

학생 A: 3213을 122로 나누는 것 대신에, 다항식 $3x^3+2x^2+x+3$을 다항식 x^2+2x+2으로 나누는 것을 이용하면 되요. 그러면, 몫이 $3x-4$이고 나머지가 $3x+11$이 되요.

연구자: 그럼, 3213을 122로 나눈 경우의 몫과 나머지는 뭘까?

학생 A: x에 10을 대입하면, 몫은 26이고 나머지는 41이 돼서 그냥 자연수 나누기 한 거랑 똑같아요. 그리고 x에 2 또는 3을 대입하면 2진법 나눗셈이나 3진법 나눗셈도 할 수 있어요.

학생 A는 관계들 사이의 관계를 발견했다고 할 수 있다. 따라서 학생 A의 사고 과정은 구조 유사성 중에서도 고차 구조 유사성에 근거한 유추적 추론에 해당된다고 볼 수 있다. 기저영역은 2차 장제법과 2차 조립제법의 관계로 보고, 목표영역은 자연수에서의 장제법과 조립제법으로 보자. 그러면 학생 A의 사고 과정을 Gentner의 SMM으로 나타내보면 <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-8> 학생 A의 조립제법을 다른 영역에 적용하는 탐구활동에 나타난 SMM

$R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2})] \rightarrow [R(R_{A1}(l(10)_{A2},\ s(10)_{A2})$
$l_{A2},\ s_{A2},\ R_{A1}$: <표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-3>와 동일 $l(10)_{A2}$: 자연수(10 진법)의 나눗셈에서 제수가 3 자리인 장제법(단, 첫 번째 자리의 숫자=1) $s(10)_{A2}$: 자연수(10 진법)의 나눗셈에서 제수가 3 자리인 조립제법(단, 첫 번째 자리의 숫자=1)

학생 A는 다항식에 관한 장제법과 조립제법의 관계를 가지고 모든 진법에서 사용 가능한 자연수의 나눗셈을 예측하여 설명하였다. 물론 학생 A가 일반화된 문자가 아니라 자연수의 예를 통해 설명하였다는 미흡함이 있지만 학생 A의 사고는 숫자를 이용했다는 약점만 제외하면, Rutherford가 태양과 행성의 관계를 이용하여 핵과 전자의 관계를 예측하여 설명한 것(Gentner, 1983)과 비슷한 수준이다. 또한, Gentner의 체계성의 원리를 적용할 만한 사례로도 볼 수 있다. 학생 A의 유추적 사고를 종합하면 <표 Ⅳ-10>처럼 나타낼 수 있다.

Gentner의 구조사상이론 및 유사성의 유형에 의하여 종합해보면 각각 <표 Ⅳ-9>와 <표 Ⅳ-10>과 같이 나타낼 수 있다.

<표Ⅳ-9> 학생 B의 조립제법 탐구활동에 SMM

연구 문제	내용	Gentner 구조사상이론	유사성 유형
연구 문제 1-1	1차식 으로 나누는 나눗셈	$R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})$ l_{B1} : 1 차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) s_{B1} : 1 차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) R_{B1} : 장제법으로부터 조립제법을 설명한 방식	◆ 표면 유사성 ◆ 저차 구조 유사성
연구 문제 1-2	2차식 으로 나누는 나눗셈 (1)	$R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1})] \rightarrow [R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2})$ $l_{B1},\ s_{B1},\ R_{B1}$: 상동 l_{B2} : 2 차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) s_{B2} : 2 차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)	◆ 저차 구조 유사성 ◆ 고차 구조 유사성 ◆ 절차 유사성
연구 문제 1-3		$R_{B1}(s_{B2})] \rightarrow [R_{B1}(s_{B3}),\ R_{B1}(s_{B2})] \rightarrow [R_{B1}(s_{B4})$ $s_{B2},\ R_{B1}$: 상동 s_{B3} : 3 차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)	◆ 저차 구조 유사성 ◆ 고차 구조 유사성 ◆ 절차 유사성
종 합		$R(R_{B1}(l_{B1},\ s_{B1}),\ R_{B1}(s_{B2}))] \rightarrow [R(R_{B1}(l_{B2},\ s_{B2}),\ R_{B1}(s_{B3}))$	

<표Ⅳ-10> 학생 A의 조립제법 탐구활동에 나타난 SMM

연구문제	내용	Gentner 구조사상이론	유사성 유형
연구문제 1-1	1차식으로 나누는 나눗셈	$R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})$ l_{A1} : 1차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) s_{A1} : 1차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) R_{A1} : 장제법으로부터 조립제법을 설명한 방식	◆ 표면 유사성 ◆ 저차 구조 유사성
연구문제 1-2	2차식으로 나누는 나눗셈 (1)	$R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1})] \to [R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2})$ l_{A1}, s_{A1}, R_{A1} : 상동 l_{A2} : 2차식으로 나누는 장제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) s_{A2} : 2차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1)	◆ 표면 유사성 ◆ 고차 구조 유사성
	2차식으로 나누는 나눗셈 (2)	$R_{A2}(s_{A1*})] \to [R_{A2}(s_{A2*})$, $R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A2*})$ s_{A2}, R_{A1} : 상동 s_{A1*} : 1차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수$\neq$1) s_{A2*} : 2차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수$\neq$1) R_{A2} : 계수로 묶은 후 조립제법하는 방법	◆ 저차 구조 유사성 ◆ 고차 구조 유사성 ◆ 절차 유사성
연구문제 1-3	n차식으로 나누는 나눗셈	$R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A3})$, $R_{A1}(s_{A2})] \to [R_{A1}(s_{A4})$ $R_{A3}(s_{A2})] \to [R_{A3}(s_{An})$ s_{A2}, R_{A1} : 상동 s_{A3} : 3차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) s_{A4} : 4차식으로 나누는 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) s_{An} : 문자를 이용한 조립제법이 가지고 있는 계산방식 및 속성 (단, 최고차의 계수=1) R_{A3} : 문자를 이용한 조립제법에서 검산식을 이용하여 증명하는 방법	◆ 저차 구조 유사성 ◆ 고차 구조 유사성 ◆ 절차 유사성
종 합		$R(R_{A1}(l_{A1},\ s_{A1}),\ R_{A2}(s_{A1*}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A1}(s_{A2}),\ R_{A3}(s_{A2}))]$ $\to [R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2}),\ R_{A2}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A2*}),\ R_{A1}(s_{A3}),\ R_{A1}(s_{A4}),\ R_{A3}(s_{An}))$	
연구문제 2	다른 영역에 적용	$R(R_{A1}(l_{A2},\ s_{A2})] \to [R(R_{A1}(l(10)_{A2},\ s(10)_{A2})$ l_{A2}, s_{A2}, R_{A1} : 상동 $l(10)_{A2}$: 자연수(10진법)의 나눗셈에서 제수가 3자리인 장제법 (단, 첫 번째 자리의 숫자=1) $s(10)_{A2}$: 자연수(10진법)의 나눗셈에서 제수가 3자리인 조립제법 (단, 첫 번째 자리의 숫자=1)	◆ 고차 구조 유사성

Ⅴ. 결론

본 연구는 고등학생들의 사고 과정에 나타나는 유추의 양상을 알아보기 위하여 인문계 고등학교 1학년 학생 2명을 대상으로 질적 사례연구 방법으로 수행되었다. 조립제법을 소재로 한 학생들의 탐구활동을 통해서 관찰, 심층면담, 연구자의 기록자료(관찰일지, 심층면담일지), 학생들의 활동자료(탐구활동 자료, 과제 보고서, 감상문)의 네 가지 방법으로 자료를 수집하여 분석하였다. 수집한 자료의 분석을 위하여 첫 번째, 표면 유사성, 구조 유사성(저차 구조유사성, 고차 구조유사성), 절차 유사성의 세 축으로 하는 유사성 분류에 관한 분석틀을 이용하였다. 두 번째, Gentner의 구조사상 모형(Stsucture-mapping Model)을 이용하였다. 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 표면 유사성은 유추적 추론에서 중요한 역할을 수행한다. 표면 유사성은 구조 유사성의 발현에 원동력이 될 수 있다. 학생 A와 학생 B의 경우, 1차 조립제법을 설명하는 과정에서 표면 유사성이 구조 유사성과 연계되었다. 두 학생 모두 1차 조립제법을 설명하는 과정에서 표면 유사성을 발판으로 하여 구조 유사성이 나타났으며 그 결과, 성공적인 유추적 추론을 하게 되었다. 이는 표면 유사성이 구조 유사성에 긍정적 영향을 미친다는 연구들(Bassok, Wu & Olseth, 1995; Chen, 1995; Chen, Yanowitz & Daehler, 1995; Holyoak & Koh, 1987; Pierce & Gholson, 1994; Ross & Kilbane, 1997)의 결과와도 일치한다.

둘째, 구조 유사성에 근거한 유추적 추론은 수학적 발견을 이끌어 낸다. 학생 A와 학생 B는 구조 유사성 중에서 고차 구조 유사성에 근거한 유추를 통해 2차 이상의 조립제법을 발견하였다. 두 학생 모두 유추를 새로운 지식 창출의 도구로 사용하였으며, 이는 유추의 가장 부각되는 역할이 수학적 발견의 도구라는 견해(김진호, 2005; 양기열, 이의진, 2011; 이경화, 2009; VanLehn, 1983)와도 일치하는 부분이다. 또한 유추를 지식 창출의 도구로 활용하여 수학적 발견을 이루어낸 학생들의 사고 과정은 수학자들에게서 볼 수 있는 사고 과정이라는 점이 흥미롭다. 학생들도 "수학자처럼" 수학을 탐구하고 발견할 수 있다는 시사점을 얻을 수 있다.

셋째, 체계화의 원리에 의한 유추적 추론은 다른 영역에 대한 예측과 설명을 가능하게 한다. 학생 A는 다항식에 관한 장제법과 조립제법의 관계를 통해 모든 진법에서 사용 가능한 자연수의 나눗셈을 예측하여 설명하였다. 물론 학생 A가 일반화된 문자가 아니라 자연수의 예를 통해 설명하였다는 미흡함이 있다. 그러나 학생 A의 설명은 Rutherford가 태양과 행성의 관계를 이용하여 핵과 전자의 관계를 예측하여 설명한 것(Gentner, 1983)과 비슷한 수준이다. 그리고 선행연구들을 살펴보면 체계성의 원리가 적용될 만한 수준의 사례를 찾아보기 어렵다. 이런 점에서 본 연구의 사례는 체계성 원리를 적용할 수 있는 학생들의 사례를 제공했다는 시사점을 얻을 수 있다.

넷째, 절차 유사성에 근거한 유추적 추론은 내면화를 이끌어 내었다. 학생 A와 학생 B는 1차 장제법과 조립제법의 관계 비교를 통하여 2차 조립제법을 발견하였다. 그러나 3차, 4차 조립제법을 만드는 과정에서는 더 이상 장제법과 조립제법의 비교 없이 절차적 반복에 의하여 조립제법을 만들어냈다. 이는 두 학생 모두 자신이 발견한 방법이 내면화되었다고 볼 수 있다.

다섯째, 유추적 추론은 반성적 사고의 성격을 띠고 있다. 유추의 성격이 도구적이고 발견적이라는 견해는 다수 존재하는데, 이와 더불어 유추의 반성적 성격을 추가하고자 한다. 학생 A와 학생 B는 자신들이 알고 싶은 영역과 자신들이 알아낸 사실들을 지속적으로 비교함으로써 유추가 나타났다. 두 학생 모두 유추적 사고가 한 번의 과정에 나타난 것이 아니고 계속적인 반성의 과정을 거치면서 나타났다. Fischbein은 반성적 사고의 성격을 띠고 있는 유추를 "반성적 추론(try-and-see reasoning)"이라고 규명하였다. 또한 Fischbein은 이러한 일련의 과정을 "생명력 있는(viable)" 사고의 과정이라고 표현하였으며 유추의 "근본적인 성질(fundamental quality)"이라고 하였다(Fischbein, 1987, pp. 127-128).

여섯째, 학생들의 수준에서 Rutherford의 예에서처럼 직관력을 가지고 본질적으로 관련이 없어 보이는 두 영역을 유추하는 것은 어려움이 있다. 그래서 대부분의 유추에 관한 연구들에서는 표면적으로 그리고 구조적으로 유사한 두 영역 사이의 유추에서부터 시작한다. 본 연구도 "조립제법의 구조를 기반으로 다른 영역으로 유추가 가능하다"라는 큰 그림을 생각하였으나 학생들의 어려움을 감안하여 학생들이 단계적으로 접근할 수 있도록 구조적으로 표면적으로 유사한 장제법과 조립제법이라는 영역 사이의 유추로부터 탐구를 시작하였다. 그러나 학생들이 유창하게 유추를 도구로 이용할 수 있다면, Rutherford 수준의 즉, 체계성 원리를 포함하는 유추를 곧바로 할 수 있을 것이다.

본 연구의 시사점은 다음과 같다. 첫째, 학생들이 확산적 사고 및 생산적 사고를 할 수 있도록 가능성을 열어두어야 한다. 대부분의 고등학교 수학 교과서에서는 "1 차식으로 나누는 경우에만 조립제법을 이용할 수 있다"면서 조립제법의 범위를 1 차 조립제법에 한정하고 있다. 뿐만 아니라 교과서에서는 1 차 조립제법은 아무런 탐구의 과정 없이 기계적인 방법으로 제시되고 있으며, 2 차 이상의 조립제법은 탐구할 기회조차 부여되지 않고 있다. 그러나 본 연구에서 살펴본 바와 같이, 학생들은 조립제법을 고차식까지 확장하여 고정 관념에서 벗어난 생산적인 생각을 제시하였다. 이는 학생들이 적어도 조립제법에서만큼은 확산적 사고를 할 수 있다는 가능성을 제시한 것이다. 일찍이 Bourbaki(1950)는 '수학자는 기계처럼 또는 컨베이어벨트에서 일하는 노동자처럼 일하지 않는다'(p.227)면서 수학에서 단순한 기계적 사고를 경계하였다. 따라서 학생들이 조립제법 뿐 아니라 수학의 다양한 영역에서 확산적 사고 및 생산적 사고를 할 수 있도록 가능성의 장을 열어두어야 할 것이다.

둘째, 본 연구는 일반 고등학교의 상위권 학생 1 명과 중위권 학생 1 명을 대상으로 연구를 진행하였다. 이 연구로 25 명 이상의 학생들이 모여 있는 일반 고등학교 학생들에게 일반화할 수는 없다. 그러나 기존의 연구들이 영재학생들에게 주로 초점을 맞추고 있다는 점을 주목할 때, 이 연구는 유추적 사고의 대상을 일반 고등학교의 중위권 학생까지 연구 대상을 확장했다는 시사점을 제공한다.

결론적으로 학생 A와 학생 B는 유추를 도구로 사용하여 2 차 이상의 조립제법을 발견하였다. 이는 유추를 매개로 하여 학생들의 사고가 격려된 결과이며 학생들이 사고의 주체가 되어 발견적 수학 활동을 한 사례이다. 그러나 학생 A와 학생 B는 유추적 사고의 능력에 따라 유추적 사고의 양상 뿐 아니라 수학적 발견의 차이를 보였다. 마지막으로 유추적 사고를 자극할 수 있는 다양한 소재를 개발하여 적용해보는 후속연구가 필요하다.

참 고 문 헌

고상숙・김규상 (2003). 분수 학습에서 정신모델 구성을 위한 유추의 역할, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 15(1), 105-111.

김연수 (1999). 기저유추원의 두 처리방식이 아동의 유추적 문제해결에 미치는 연령별 효과. 서울대학교 석사학위 논문.

김용태・신봉숙・최대욱・이순희 (2005). 유추를 통한 분수 연산에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 19(4), 715-731.

김진호 (2005). 수학자가 수학을 탐구하듯이 학습자도 수학을 탐구할 수 있는 방안 모색, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 44(1), 87-101.

박미미・이동환・이경화・고은성 (2012). 유추에 의한 문제제기 활동을 통해 본 통계적 개념 이해, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 22(1), 101-115.

박현정・이종희 (2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석, 대한수학교육학회지 수학

교육학연구, 16(2), 115-138.
서보억 (2009). 유추를 활용한 진법의 확장에 대한 수학탐구활동, 국제수학영재교육세미나프로시딩, 14, 39-42.
신은아 (2004). 귀납적 추론과 유추의 교과서 사례분석. 경북대학교 석사학위논문.
양기열・이의진 (2011). 수학영재학생들의 유추를 통한 이차곡면의 탐구활동 분석, 영재교육연구, 21(2), 269-286.
이경화 (2009). 영재아들의 세 유형의 유추 과제 해결, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 19(1), 45-61.
이승우 (2001). 학교 수학에서의 유추와 은유. 서울대학교 석사학위 논문.
이종희・김선희 (2002). 인수분해 문제 해결과 유추, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 4(4), 281-599.
조성남・이현주・주영주・김나영 (2011). 질적연구방법과 실제. 서울: 그린.
조용환 (1999). 질적 연구: 방법과 사례. 서울: 교육과학사.
최남광・유희찬 (2009). 영재교육에서 유추를 통한 데카르트 정리의 도입가능성 고찰, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 19(4), 479-491.
한인기・이상근 (2000). "유추"를 활용한 기하학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지지>, 5, 165-174.
Alexander, P. A., White, C. S., & Daugherty, M. (1997). Children's use of analogical reasoning in early mathematics learning. In Lyn D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images(pp. 117-147).* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Bassok, M. (1990). Transfer of domain-specific problem-solving procedures. Journal of Experimental Psychology: *Learning, Memory, and Cognition,* 16(3), 522-533.
Bassok, M., Wu, L. & Olseth, K. L. (1995). Judging a book by its cover: Interpretative effects of content on problem-solving transfer. *Memory & Cognition,* 23(3), 354-367.
Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *The American Mathematical Monthly,* 57(4), 221-232.
Carpenter, P. A., Just M. A., & Shell, P. (1990). When one intelligence test measures: A theoretical account of the processing in the raven progressive matrices test. *Psychological review,* 97, 404-431.
Chen, Z. (1995). Analogical transfer: From schematic pictures to problem solving. *Memory & Cognition,* 23(2), 255-269.
Chen, Z. (2002). Analogical problem solving: A hierarchical analysis of procedural similarity, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* 28, 81-98.
Chen, Z., Yanowitz, K. L., & Daehler, M. W. (1995). Constraints on accessing abstract source information: Instantiation of principles facilitates children's analogical transfer. *Journal of Educational Psychology,* 87(3), 445-454.
Creswell, J. W. (2005). 질적 연구방법론: 다섯 가지 전통. (조흥식, 정선욱, 김진숙, 권지성 역). 서울: 학지사. (원저 Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions은 1998년 CA: Sage Publication에서 출판).
Denney, N. W. (1972). A developmental study of free classification in children. *Child Development, 43,* 221-232.
English, L. D. (1997). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning. In Lyn D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*(pp. 3-18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gholson, B., Smither, D., Buhrman, A., Duncan, M. K., & Pierce, K. A. (1997). Children's development of analogical problem-solving skill. In Lyn D. English(Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*(pp. 149-190). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D. (1982). Are scientific analogies metaphors? In David S. Miall(Ed.), *Metaphor: Problems and perspectives(pp. 106-132).* Atlantic Highlands, NJ: Humanities Press.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive science,* 7*,* 155-170.

Gentner, D. (1989). The mechanism of analogical learning. In Stella Vosniadou & Andrew Ortony (Eds.), Similarity and analogical reasoning. New York: Cambridge University Press. 199-241.

Gentner, D., & Markman, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American psychologist,* 52*,* 45-56.

Grick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology,* 12*,* 306-355.

Grick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology, 15,* 1-38.

Holyoak, K. J. (2005). Analogy. In Holyoak, K. J. & Morrison, R. G.(Eds.), *The cambridge handbook of thinking and reasoning*(pp. 117-141). New York: Cambridge University Press.

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition,* 15(4), 332-340.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1989). Analogical mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science,* 13*,* 295-355.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1997). *Mental leaps: Analogy in creative thought.* Cambridge, MA: MIT Press.

Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1992). Indirect analogical mapping. In Proceedings of the Fourteenth annual conference of the cognitive science society(pp. 516-521). Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review,* 104*,* 427-466.

Hummel, J. E., & Holyoak, K. J. (2003). A symbolic-connectionist theory of relational inference and generalizayion. *Psychological Review,* 110*,* 220-264.

Hunt, E. B. (1974). Quote the raven? Nevermore! In Lee W. Greg(Ed.), *Knowledge and cognition*(pp. 129-157). Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child.* New York: Norton.

Keane, M. T., & Costello, F. (2001). Setting limits on analogy: Why conceptual combinations is not structural alignment. In Dedre Gentner, Keith J. Holyoak, & Boicho N. Kokinov(Eds), *The analogical mind : perspectives from cognitive science*(pp. 287-312). Cambridge, MA: MIT Press.

Ma, L. (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. (신현용, 승영조 역). 서울: 승산, (원저 Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States는 Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates에서 출판).

Markman, A. B. & Gentner, D. (1993). Structural alignment during similarity comparison. *Cognitive Psychology,* 23*,* 431-467.

Markman, A. B. & Gentner, D. (1997). The effects of alignment on memory. *Psychological Science,* 8*,* 363-367.

Medin, D., & Ortony, A. (1989). Psychological essentialism. In Stella Vosniadou & Andrew Ortony(Eds.), *Similarity and analogical reasoning(pp.179-196).* New York: Cambridge University Press.

Merriam, S. B. (2001). *Qualitative research and case study applications in education(2nd ed.).* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Miles M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: A sourcebook of new methods(2nd ed.).* Sage Publications, CA: Thousand Oaks.

Novic, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of experimental psychology: Learning, Memory, and Cognition,* 17, 398-415.

Pierce, K. A. & Gholson, B. (1994). Surface Similarity and Relational Similarity in the Development of Analogical Problem Solving: Isomorphic and Nonisomorphic Transfer. *Developmental Psychology,* 30(5), 724-737.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. Ⅰ: Induction and analogy in mathematics.* London: Oxford University Press.

Reitman, W. R. (1965). *Cognition and thought: An information-processing approach.* New York: Wiley.

Richland, L. E., Holyoak, K. J., & Stigler, J. W. (2004). Analogy use in eighth-grade mathematics classrooms. *Cognition and instruction,* 22, 37-60.

Ross, B. H. & Kilbane, M. C. (1997). Effects of Principle Explanation and Superficial Similarity on Analogical Mapping in Problem Solving. *Learning, Memory, and Cognition,* 23, 427-440.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving. Orlando,* Fla.: Academic Press..

Smith, L. B. (1989). A model of perceptual classification in children and adults. *Psychological Review,* 96, 125-144.

Spearman, C. (1923). *The nature of intelligence and the principles of cognition.* London: MacMillian.

Spradly, J. P. (1988). 참여관찰방법. (이희봉 역). 서울: 대한교과서주식회사, (원저 Participant observation은 1980년 New York: Holt, Rinehart and Winston에서 출판).

Sternberg, R. J. (1977a). Component processes in analogical reasoning. *Psychological Review,* 84, 353-378.

Sternberg, R. J. (1977b). *Intelligence, information processing, and analogical reasoning: The componential analysis of human abilities.* Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

VanLehn, K. A. (1983). *Felicity conditions for human skill acquisition : validating an AI-based theory.* Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology.

Vygosky, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MA: MIT Press.

Wharton, C. M., Holyoak, K. J., Downing, P. E., Lange, T. E., Wickens, T. D., & Melz, E. R. (1994). Below the surface: Analogical similarity and retrieval competition in reminding. *Cognitive Psychology,* 26(1), 64-101.

A case study on inquiry activities of synthetic division through analogies

Jung, Milin
Graduate school of Dept. of Math. Education, Korea University
E-mail : jml93@hanmail.net

Whang, Woo Hyung+
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of the study was to investigate the aspects of analogy of high school student's thinking process revealed in the inquiry activity with synthetic division. The case study method of qualitative research was conducted with two high school 10th grade students. Structure-mapping model(SMM) of Gentner and similarity frames which were proposed by other researchers were utilized to analyze the data. Two students used analogy as a tool and they could discover synthetic division of more than 2 degrees, but they revealed different levels of mathematics discovery depending on the different degree of analogical thinking. Surface similarity in the process of inquiry activity played a vital role in analogical thinking. We asked students to explore and discover analogy based on structure similarity. Analogy based on the systematic approach made it possible to predict upper domain. Analogy based on the procedure similarity induced internalization. We could conclude that analogy has instrumental, heuristic and reflective characteristics.

* ZDM Classification : C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C99
* Key Words : Analogies, Similarities, Structure-mapping, Structure-mapping Model, Long division, Synthetic division
+ Corresponding author