韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.1.57
제 28집 제 1호, 2014. 2. 57-63

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 1, Feb. 2014. 57-63

# 테셀레이션 소재의 수학이야기 자료 개발1)

신 현 용 (한국교원대학교)

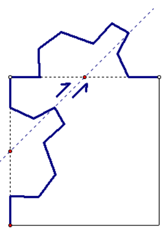
근래에 음악이나 공학적 도구 활용 등을 활용한 수학학습용 스토리텔링 자료가 개발되어 소개되곤 한다. 미술 소재도 그러한 자료에 활용될 수 있다. 이 연구에서는 미술 특히 디자인 기법을 활용하는 수학이야기 자료를 개발한다.

## Ⅰ. 서론

수학교실에서 테셀레이션(tessellation)은 아이들의 흥미를 유발하곤 한다. 테셀레이션을 주제로 하는 수학수업은 테크놀로지(컴퓨터)를 효과적으로 활용할 수 있는 예가 될 수 있다.

테셀레이션에는 여러 가지 흥미 있는 수학적 문제가 결부된다(신현용, 2013). 이 글에서는 테셀레이션과 관련되는 수학문제 하나를 해결하는 과정을 이야기 형태로 제시하면서 테크놀로지 활용의 효과에 주목한다.

## Ⅱ. 문제가 무엇인가



에서 꼴(Escher type) 테셀레이션을 할 때 자주 사용하는 기법 중 하나가 이웃하는 변으로의 미끄럼반사이다. 예를 들어, 오른쪽 그림에서는 정사각형으로 기본타일을 만드는 과정에서 이웃하는 변으로의 미끄럼반사를 적용한 것이다. 표시된 화살표 방향으로 평행이동 후 동일한 축에 관해 반사를 시행한 결과이다, 이러한 기법은 정사각형의 경우뿐만이 아니라 정삼각형 등 여러 경우에 적용된다. 문제는 주어진 도형을 “미끄럼반사 후 반사” 시킨 결과가 어떤 도형인지 시각적으로 쉽게 파악되지 않는다는 것이다. 그래서 보통은 이웃하는 변으로 회전시키고 그 변의 중점을 지나고 그 변과 수직인 직선에 관하여 반사시킨다. 즉, “미끄럼반사”를 수행하는 것 대신 “회전 후 반사”를 수행하는 것이다. 문제는 “이게 정당한 방법인가”이다.

## Ⅲ. 어떻게 풀 것인가

흔히 적용되는 정사각형과 정삼각형의 경우를 먼저 살펴보자. 다음 두 사실(신현용•유익승•문태선•신실라, 2014)을 이용한다.

---

1) 이 연구는 ‘2013 KNUE 학술연구비’지원에 의해 수행되었음.
* 접수일(2014년 2월 7일), 심사(수정)일(2014년 2월 12일), 게재확정일(2014년 2월 12일)
* ZDM 분류 : D44, N84, N85, U54
* MSC2000 분류 : 97B40, 97C20, 97C80, 97U50, 97U70
* 주제어: 스토리텔링, 테셀레이션, 테크놀로지 활용

정리1

평면 위에서 좌표가 $(e,f)$인 점 $X$를 축으로 하여 θ만큼 회전(반시계방향) 이동시키는 변환은 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & e(1-\cos\theta)+f(\sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & e(-\sin\theta)+f(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

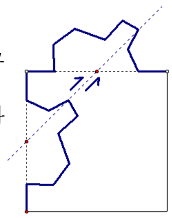
정리2

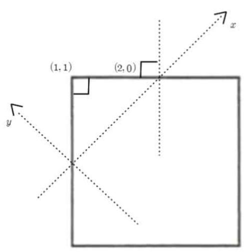
평면 위에서 좌표가 $(e,f)$인 점 $X$를 지나고 $x-$축과 $\frac{\theta}{2}$의 각을 이루는 직선을 축으로 하는 반사는 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & e(1-\cos\theta)+f(-\sin\theta) \\ \sin\theta & -\cos\theta & e(-\sin\theta)+f(1+\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 정사각형의 경우

오른쪽에서 이웃한 변(윗변)으로의 미끄럼반사는 왼쪽 위 꼭짓점을 축으로 하여 $\frac{\pi}{2}$만큼 반시계방향으로 회전한 후, 윗변의 중점을 지나고 윗변과 수직인 직선을 축으로 하는 반사와 같은 변환임을 보이자.






계산의 편의를 위해 왼쪽 그림과 같이 좌표축을 다시 설정하자. 정리1에 의하여 점 $(1,1)$을 축으로 $\frac{\pi}{2}$만큼의 회전은 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

한편, 정리2에 의하여 점 $(2,0)$을 지나고 $x-$축과 $\frac{\pi}{4}$만큼의 각을 이루는 직선을 축으로 하는 반사는 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

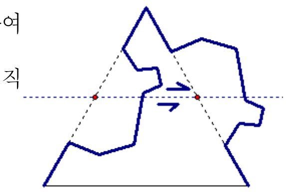
다음을 확인할 수 있다.

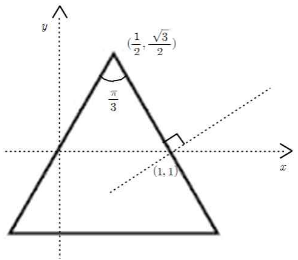
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 오른쪽 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$은 $x-$축을 따라 2만큼 평행이동 후 반사시키는 변환을 나타낸다.

2. 정삼각형의 경우

오른쪽에서 이웃한 변(오른쪽 변)으로의 미끄럼반사는 위 꼭짓점을 축으로 하여 $\frac{\pi}{3}$만큼 반시계방향으로 회전한 후, 오른쪽 변의 중점을 지나고 그 변과 수직인 직선을 축으로 하는 반사와 같은 변환임을 보이자.






이때에도 편의를 위해 좌표축을 왼쪽 그림과 같이 다시 설정하자. 정리1에 의하여 점 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$을 축으로 $\frac{\pi}{3}$만큼의 회전은 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

정리2에 의하여 점 $(1,0)$을 지나고 $x-$축과 $\frac{\pi}{6}$만큼의 각을 이루는 직선을 축으로 하는 반사는 다음 행렬로 표현된다.

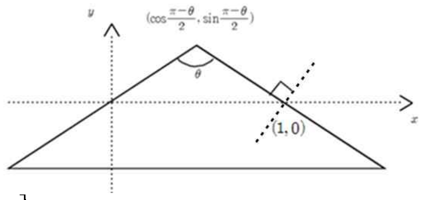
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

다음을 확인할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서 오른쪽 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$은 $x-$축을 따라 1만큼 평행이동 후 반사시키는 변환을 나타낸다.

## Ⅳ. 실제로 풀자




앞의 정삼각형의 경우에서와 마찬가지로 오른쪽 그림을 생각하자. 이제, 점 $(\cos\frac{\pi-\theta}{2},\sin\frac{\pi-\theta}{2})$를 축으로 하여 Θ만큼 회전(반시계방향) 이동시키는 변환은 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \cos\frac{\pi-\theta}{2}(1-\cos\theta)+\sin\frac{\pi-\theta}{2}(\sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & \cos\frac{\pi-\theta}{2}(-\sin\theta)+\frac{\pi-\theta}{2}(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

점 $(1,0)$을 지나고 $x-$축과 $\frac{\theta}{2}$의 각을 이루는 직선을 축으로 하는 반사는 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1-\cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이제, $0 \le \theta < 2\pi$ 에서 등식

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1-\cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \cos\frac{\pi-\theta}{2}(1-\cos\theta)+\sin\frac{\pi-\theta}{2}(\sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & \cos\frac{\pi-\theta}{2}(-\sin\theta)+\frac{\pi-\theta}{2}(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

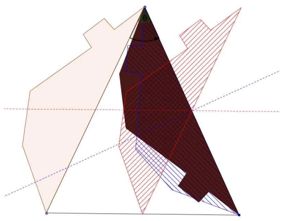
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

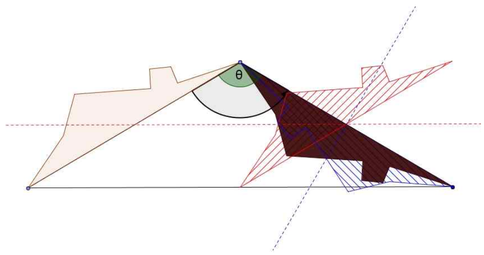
을 만족시키기 위한 필요충분조건은 $(2\sin\frac{\theta}{2}-1)\cos\theta = 0$ 즉, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$임을 알 수 있다. 우리가 앞 서 증명한 정사각형($\theta = \frac{\pi}{2}$)과 정삼각형($\theta = \frac{\pi}{3}$)의 경우는 매우 특별한 경우임을 알 수 있다.

## Ⅴ. 풀이가 타당한가?

위의 사실을 컴퓨터로 확인해보자. 정사각형과 정삼각형의 경우에는 성립한다는 것을 금방 확인할 수 있다.

이제, 위의 결과에 의하면 $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$의 경우에는 성립하지 않아야 한다. 그런데, 문제가 발생한다. 컴퓨터가 보여준 아래 두 그림은 $\theta$가 $\frac{\pi}{3}$보다 작은 경우와 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 경우이다.

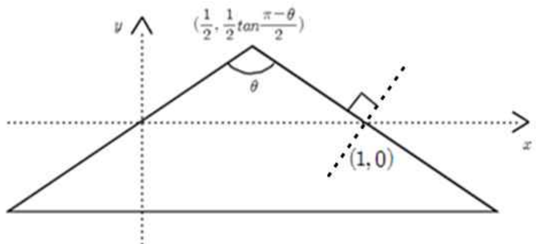





각 $\theta$를 임의로 변화시켜 보아도 똑같은 현상이 관찰된다. $\theta \neq 0$인 모든 경우에 성립하는 것 같다. 앞에서 기술한 필요충분조건이 틀린 게 분명하다.

참으로 이상한 점이 있다. 제법 복잡한 행렬이 개입되는데 앞에서 미리 확인한 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 두 경우에는 왜 등식이 성립하는 것일까? 계산이 틀렸다면 성립하는 경우가 없는 것이 보통 아닌가? 수학적 명제를 증명하는 과정에서 이러한 현상은 쉽게 경험할 수 없는 것이다.

풀이 과정을 면밀히 검토하면서 잘못을 발견했다. "Ⅳ. 실제로 풀자"에 그려진 그림에서 회전축의 좌표를 잘못 잡은 것이다. $(\cos\frac{\pi-\theta}{2}, \sin\frac{\pi-\theta}{2})$가 아니다. 왜 이런 터무니없는 실수를 하였을까? 직전에 정삼각형의 경우와 같은 상황이라고 순간 착각한 것 같다.




옳은 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}tan\frac{\pi-\theta}{2})$이다. $\theta \neq 0$인 임의의 $\theta$에 대하여 그림이 왼쪽과 같아야 한다. 이제, 점 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}tan\frac{\pi-\theta}{2})$를 축으로 하여 Θ만큼 회전(반시계방향) 이동시키는 변환은 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}tan\frac{\pi-\theta}{2}(\sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & \frac{1}{2}(-\sin\theta)+\frac{1}{2}tan\frac{\pi-\theta}{2}(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

점 $(1,0)$을 지나고 $x-$축과 $\frac{\theta}{2}$의 각을 이루는 직선을 축으로 하는 반사는 다음 행렬로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1-\cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이제, $\theta \neq 0$인 모든 $\theta$에 대하여 다음을 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1-\cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}tan\frac{\pi-\theta}{2}(\sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & \frac{1}{2}(-\sin\theta)+\frac{1}{2}tan\frac{\pi-\theta}{2}(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이상으로부터 다음을 알 수 있다. 즉, $\theta \neq 0$인 모든 경우에 이웃하는 변으로의 미끄럼반사는 “회전 후 반사”로 대체할 수 있다.

$\theta = 0$인 경우에는 “미끄럼반사”와 “회전 후 반사”는 모두 동일한 반사이다. 이 경우에는 위의 증명 상황이 형성되지 않는다. 그런데, 왜 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 두 경우에는 왜 성립한 것인가? 이 두 경우에는 오류로 잘 못 설정한 좌표가 우연하게 옳은 좌표와 일치한 것이다. 참으로 위험한 일치였다.

## Ⅴ. 결론

요즈음 학문의 융합은 여러 담론의 주제가 되곤 한다. 학문의 융합을 말할 때마다, 수학은 주도적인 역할을 할 수 있다. 예를 들어, 음악을 통하여 수학을 말할(신현용 • 신혜선 • 나준영 • 신기철, 2014) 수 있듯이, 미술 특히 디자인을 통하여 수학을 언급하는 것도 자연스러운 일이다.

여러 학문을 융합하여 논하는 과정에서 “스토리텔링”, “증명과 논박”, 또는 “어떻게 풀 것인가?”등과 같은 형식을 빌려 이야기 형식으로 제시하는 것은 의미 있을 것이다.

이 글에서는 테셀레이션과 관련된 수학 이야기를 “어떻게 풀 것인가?”의 형식으로 꾸미고, 그 이야기 속에“테크놀로지의 활용”의 효율성을 가미한 이야기를 제시한다.

다양한 주제에 다양한 “어떻게 풀 것인가?(How to solve it?)” 또는 “증명과 논박(Proofs and Refutations)”등과 같은 여러 수학교육적 이론을 접목한 이야기 개발은 학교 현장에서 중요한 의미를 가질 것이다.

## 참 고 문 헌

신현용 (2013). 벽지의 대칭성: 어떻게 풀 것인가? 한국수학교육학회 뉴스레터, 제29권 제6호, 통권 148호, 한국수학교육학회.

신현용 · 신혜선 · 나준영 · 신기철 (2014). 수학 IN 음악, 한국수학교육학회 수학교사시리즈12, 교우사.

신현용 · 유익승 · 문태선 · 신실라 (2014, 출간예정). 수학 IN 디자인, 한국수학교육학회 수학교사시리즈13, 교우사.

# Development of Mathematical Story Based on Tessellation

**Shin Hyunyong**
Korea National University of Education
E-mail :shin@knue.ac.kr

Recently, some storytelling materials based on music or CAS tools have been introduced. Activities or concepts in art can be utilized as such material. In this article, we propose a mathematical storytelling material based on design scheme.

＊ ZDM Classification : D44, N84, N85, U54
＊ 2000 Mathematics Subject Classification : 97B40, 97C20, 97C80, 97U50, 97U70
＊ Key Words : affective characteristics, interest, self-efficacy, value