韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmee.2014.28.1.1
제 28집 제 1호, 2014. 2. 1-17

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 28, No. 1, Feb. 2014. 1-17

톱니바퀴 관련 문제해결 과정에서 발생하는 오류 원인의 분석 및 지도방안

노 은 환 (진주교육대학교)†
정 상 태 (사천용산초등학교)
김 민 정 (사천정동초등학교)

최근 학생의 수학적 사고력 및 문제해결능력의 신장이 강조되고 있다. 그럼에도 불구하고 실제 학생들이 문제를 해결하는 과정을 살펴보면 주어진 문제 유형과 관련된 알고리즘을 사용하여 기계적으로 해결하는 경우가 많다. 이러한 문제해결 방법으로는 최근 강조되고 있는 목표를 달성하기 어려울 뿐만 아니라 오히려 오류나 오 개념을 형성할 수도 있다. 그런데 일관성을 갖는 오류는 현재 학습자의 인지능력 상태를 파악할 수 있게 하고, 학습 실패 원인에 대한 정보를 제공해 준다는 긍정적 측면이 있다. 이에 본 연구에서는 톱니바퀴 관련 문제해결 과정에서 학생이 보이는 오류를 분석하여 그 원인을 진단하고, 오류의 교정과 예방을 위한 바람직한 지도방안을 마련하고자 하였다. 학생의 오류를 분석한 결과 사용할 수 있는 다른 방법이 있음에도 불구하고 비례식만을 이용하여 해결하려고 하였으며, 자신이 세운 비례식이 옳은지 그른지에 대해서도 전혀 고려를 하지 않았다. 이는 다른 많은 요인이 있겠으나, 교과서와 교육과정의 구성도 중요한 요인 중 하나라고 할 수 있다. 이와 같은 결과를 토대로 문제해결과 관련된 세 가지 접근방법과 톱니바퀴 관련 문제와 연관되어 교육과정에 제시되는 개념의 내용과 순서 및 지도방안에 대한 논의와 시사점을 제시하였다.

Ⅰ. 들어가며

1. 연구의 필요성과 목적

NCTM(2000)은 수학 교육의 중요한 목표로 수학적 사고력과 문제해결력의 신장을 강조하고 있다. 이를 바탕으로 우리나라 2009 개정 교육과정에서도 수학과 목표를 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하게 하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 사고하는 능력을 기르게 하여, 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는데 그 목적을 두고 있다(교육과학기술부, 2011k).

그러나 실제 학교 현장에서 많은 학생들은 개념을 제대로 이해하지 못하여 문제해결 과정에서 많은 어려움을 겪고 있다. 따라서 문제해결 과정에서 학습자가 어떻게, 왜 오류를 범하고 있는지, 그리고 주어진 학습과제에서 어떠한 오류 유형이 학습자들에게 가장 취약한지, 또 이미 발생한 오류를 어떻게 치료할 것인지 등에 대한 연구가 필요하다(전영배 외, 2010).

* 접수일(2013년 8월 11일), 심사(수정)일(1차: 2013년 9월 16일, 2차: 2013년 11월 20일, 3차: 2014년 1월 3일), 게재 확정일(2014년 1월 17일)
* ZDM 분류 : D7
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 톱니바퀴 관련 문제, 문제 해결, 오류 원인 분석, 지도 방안
† 교신저자 : ehroh@cue.ac.kr

이러한 필요성 때문에 오류 분석에 관한 많은 연구들이 있었으며(송순희, 오정현, 1997; 구미애, 1999; 김선옥, 2002; 김수미, 2003; 김현주, 2006; 이기석, 이두호, 2010), 이는 유능하고 성공적인 교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학적 구조를 알아야 할 뿐만 아니라, 학생들의 오류를 진단하기 위한 전략에 대한 지각을 갖추어야 하고, 현장의 수학 교사들이 학생의 오류를 연구할 필요가 있다고 강조한 Clayton et al.(1990)의 의견과도 일맥상통한다. 오류는 현재 학습자의 인지능력 상태를 파악할 수 있게 하고, 학습자들의 학습 실패 원인에 대한 정보를 제공해주기 때문에 오류를 파악하는 일은 중요하다. 따라서 교사들은 학생들의 오류를 파악하고, 오류 분석을 통해 원인을 찾아 학생들의 문제해결능력 및 수학적 사고력을 향상시킬 수 있도록 도움을 제공해야 한다.

문제해결능력 및 수학적 사고력 신장과 관련된 많은 연구가 이루어지고 있으나, 대부분 특정 수학적 요소를 이용하여 문제를 해결하는 방법에 주목하고 있다(유익승, 한인기, 2011; 성창근, 이광호, 2012; 박지연, 박영희, 2012; 주홍연, 권혁진, 2012). 그러나 문제를 다양한 수학적 요소와 관련시키거나 수학적 요소들이 이루고 있는 구조를 파악하는 것에 대해서는 그리 많은 연구가 이루어지고 있지 않다.

본 연구는 연구자가 톱니바퀴 관련 문제에 대해 고민하는 학생을 만나면서 시작된다. 이 문제를 해결하는 과정에서 학생은 주어진 문제를 풀 수 있는 다양한 방법이 있음에도 불구하고 이를 고려하지 않고 비례식을 활용하기로 하였으며, 주어진 문제에 대해 깊이 고민해 보지 않고 자신이 늘 하던 방식으로 제시되어 있는 숫자들을 적당히 나열하여 문제를 해결하려고 하였다. 이것은 주어진 문제의 해결을 통해 문제해결능력 및 수학적 사고력을 기르는 것과는 상반된다고 볼 수 있다.

이러한 이유로 본 연구에서는 톱니바퀴 관련 문제의 해결 과정에서 나타나는 오류에 대해 분석하고, 그 원인을 진단하여 학생이 일으키는 오류의 교정과 오류의 예방을 위한 바람직한 지도방안을 모색해 보고자 한다.

2. 수학적 오류

이종희(2002)는 수학적 오류를 학습자 개개인이 수학을 습득할 때 갈등을 일으키고 새로운 개념을 이해하는데 방해가 되는 선행지식이나 자생적 관념을 의미한다고 하였다. 또한 송순희, 오정현(1997)은 수학의 개념상 바르지 못한 논리과정을 수학적 오류로 정의하였다. 김부미(2006)는 수학적 오 개념을 수학적 개념과 일치하지 않거나 제한된 영역에서만 성립하여 새로운 수학적 지식을 학습할 때 인지 갈등을 일으키는 선행 지식으로 정의한 후, 수학적 오류를 수학 학습을 할 때 학생의 오 개념에 의해서 체계적으로 나타나는 학습 과정과 결과로 정의하였다. 이는 오류가 우연에 의한 것이 아니라 오 개념에 의한 나름의 정돈된 과정에 의한 것임을 말한다.

학생이 일으키는 오류의 발생 원인에는 여러 가지가 있을 수 있다. 김부미(2006)는 이전의 학습결과로 형성된 옳았던 개념이 특정 문맥에서는 오 개념이 되는 과정이나 결과로서 발생되거나 개념과 개념이 Chunk(청크) 또는 Unpack(언팩)되는 과정에서 발생할 수 있다고 하였다. 또한 수학 학습 과정에서 같은 문제가 서로 다른 근원으로부터 오류를 발생시키기도 하며 같은 오류가 서로 다른 문제해결 과정에서 발생하기도 한다고 하였다. Tirosh(2000)는 학생들의 불완전하거나 부정확한 지식, 결함 있는 절차 사용, 교사의 잘못으로 인해 오류가 발생할 수 있다고 하였다. 따라서 그는 교사가 학생들의 오류를 확인하고 교정해줌으로써 효과적인 수학 학습을 실현하도록 해야 한다고 주장하였다. 또한 이러한 과정을 통해 교사는 학생들의 이해 정도를 알아볼 수 있으며, 학습의 실패 원인에 대한 정보를 학습자들로부터 얻게 되므로 새로운 학습에 있어서 적절한 교수 · 학습 방법을 구성하는데 도움이 될 것이라고 하였다.

이와 같은 오류를 분석하는 연구에는 크게 2가지 유형이 있다. 첫 번째는 복수의 사례에서 오류의 원인을 진단한 후 그 결과를 몇 가지 유형으로 분석하는 것으로, 전영배 외(2009)는 '미분 문제해결 과정에서 오류 분석'에서 미분과 관련된 검사지를 투입하여 미분 문제해결 과정에서 나타나는 오류를 틀에 맞게 분류 · 분석함으로서

미분 학습 지도방안에 대한 기초를 마련하였다. 그 결과 개념상의 부족으로 인한 오류와 관련 없는 자료의 오용, 그리고 기술적인 계산상의 오류가 주를 이루고 있다는 것을 알아냈으며, 미분 단원의 도입 단계에서 기본적인 개념학습 지도에 중점을 두어야 하며 학생이 보일 수 있는 반응을 미리 예상하고 이에 대비하여 수업을 준비해야 한다고 하였다.

두 번째는 학생이 보이는 오류의 원인을 분석하는데 초점을 맞추는 것으로, 전영배 외(2010)는 '미지수가 2개인 연립일차부등식'에 대한 문제해결과정에서 학생들이 흔히 겪을 수 있는 오류에 대해 분석하고 그 원인을 진단하여, 학생이 일으키는 오류의 교정과 오류의 예방을 위한 바람직한 지도방안을 모색하였다. 그 결과 학생들이 '미지수가 2개인 연립방정식'에서 성립하는 성질이 '미지수가 2개인 연립일차부등식'에서도 그대로 성립할 것이라는 잘못된 생각으로 오류를 범하기 쉽다고 하면서 이러한 점을 잘 숙지하여 교사는 학생들에게 연립방정식과 연립부등식의 풀이 방법은 서로 다름을 주지시킬 필요가 있다고 주장하였다.

앞에서 살펴본 바와 같이 수학적 오류에 대한 정의와 원인, 교수학적 의의는 학자에 따라 조금씩 다르며, 오류 분석에 관한 연구는 연구의 목적에 따라 두 가지 유형으로 나타난다. 본 연구에서는 수학적 오류를 '문제해결과정에서 논리성이 결여된 개념이나 절차를 습관적으로 사용하였거나 과정 또는 결과가 잘못된 것'으로서 간단히 '오류'로 사용하고자 하며, 연구 유형은 전영배 외(2010)의 방법을 따르고자 한다.

3. 톱니바퀴 관련 문제와 관련된 초등학교 교육과정 분석

본 연구에 사용된 문제를 해결하는 방법은 다양하게 생각해 볼 수 있는데, 이를 위해 학생들이 알아야 할 내용을 중심으로 초등학교 교육과정을 분석하고자 한다.

학생들은 3학년 2학기에 덧셈과 뺄셈의 혼합계산을 학습하고(교육과학기술부, 2011a), 4학년 1학기 5단원 혼합계산에서 자연수의 사칙연산을 기초로 하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 혼합계산을 학습한다(교육과학기술부, 2011g). 이 단원에서는 혼합계산의 계산 순서를 알고 계산을 능숙하게 하는 것뿐만 아니라, ( )와 { }가 있는 혼합계산식의 계산 순서를 알고 순서에 따라 계산하는 것에 중점을 둔다. 또한 자연수의 범위에서 여러 가지 형태의 복잡한 계산 문제를 정확하게 처리할 수 있도록 하여 학생이 높은 단계에서 학습하게 되는 분수, 소수의 혼합계산을 할 수 있는 능력을 가질 수 있도록 구성되어 있다. 이 단원에서 제시되는 문제를 예로 들면 다음과 같다. '여경이네 학교 4학년 학생 240명은 현장학습을 가기 위해 버스 한 대에 40명씩 탔습니다. 선생님께서 각 버스에 쓰레기봉투를 2장씩 놓으셨습니다. 버스에 놓은 쓰레기봉투는 모두 몇 장인지 알아봅시다.'(교육과학기술부, 2011b, p.78)라는 문제에서, 교과서는 학생들이 탄 버스는 몇 대인지 구하고 버스 한 대에 필요한 쓰레기봉투 수를 곱하도록 제시되어 있다. 그러나 이 문제는 교과서에 제시되어 있는 방법 외에 다양한 방법으로 해결할 수 있다. 버스 1대에 필요한 단위 비율(쓰레기봉투 2장)을 생각하고, 버스의 수를 구해서 단위 비율을 곱하면 주어진 문제를 해결할 수 있다. 그리고 구하고자 하는 문제 상황에서의 학생 수 240은 원래 주어진 학생 수 40에 6을 곱한 것이므로 필요한 쓰레기봉투의 수 또한 원래 주어진 쓰레기봉투 수에 6을 곱하여 구할 수 있다. 즉, $240=40\times 6$ 이므로 $\square=2\times 6=12$ 이 되는 것이다. 이는 6학년 1학기에 배우게 되는 비례식의 기초가 된다고 할 수 있다.

이후 학생들은 5학년 2학기 7단원 비와 비율에서(교육과학기술부, 2011c; 교육과학기술부, 2011h) 서로 다른 두 수의 크기를 비교하는 상황을 통해서 비를 도입하고 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 약속한다. 또, 비율을 나타내는 분수, 소수, 백분율, 할푼리를 이해하고 그들의 관계를 파악하며, 실생활에 쓰이는 여러 가지 비율 문제를 해결할 수 있도록 지도한다. 이 단원을 통해서 배우게 되는 내용은 6학년 1학기에 배우게 될 비례식과 6학년 2학기에 배우게 될 정비례와 반비례의 기초가 된다고 볼 수 있다. 이 단원에서는 비와 비율을 구분하여 제시하고 있으나 비에 대해서는 명확하게 정의를 내리지 않고 있을 뿐만 아니라, 필요에 따라서 비

와 비율을 혼용하고 있다. 예를 들어서 이 단원의 후반부에서 학습하게 되는 백분율, 할푼리 등에서는 명확하게 비율을 이용하여 설명하고 있지만 6학년 1학기 7단원 비례식에서 비례식을 약속하기 위해서 도입한 상황에서는 비를 이용하고, 비례식의 약속에서는 비율을 이용한다(교육과학기술부, 2011d).

6학년 1학기 7단원 비례식에서는 5학년 2학기에 배운 비와 비율에 관한 내용을 토대로 비율이 같은 두 생활 장면으로부터 두 비를 제시하여 이 두 비율이 같음을 확인해 보고, 이 두 비를 등식으로 나타내어 비례식의 개념을 이해하게 한다. 또, 두 수의 비에서 전항과 후항을 알고, 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 비율이 같다는 비의 성질을 발견하도록 하며, 이를 이용하여 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내도록 한다. 그리고 비례식에서 외항과 내항을 알게 하고, 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 발견하도록 하며, 이를 이용하여 미지항이 있는 비례식에서 미지항의 값을 구할 수 있도록 한다. 또, 생활 장면에서 비례식이 적용되는 문제를 해결하도록 지도한다. 그렇게 함으로써 추후에 배우게 될 연비와 비례배분의 초석을 다지게 한다(교육과학기술부, 2011f; 교육과학기술부, 2011i).

8단원 연비와 비례배분에서는 5학년에서 학습한 비와 비율 단원과 6학년에서 학습한 비례식 단원을 기초로 하여 셋 이상의 양의 비를 한꺼번에 나타내는 연비의 뜻을 알게 하고, 두 비의 관계를 연비로 나타내도록 하며 연비의 각 항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나눌 수 있다는 연비의 성질을 알 수 있도록 한다. 전체를 주어진 비로 배분하는 비례배분을 이해하도록 하며 연비로 주어진 양을 비례배분 하도록 한다. 즉, 연비와 비례배분의 개념을 바르게 이해하고 이를 실생활에 활용하는 것을 학습하고, 이후 배우게 될 정비례와 반비례를 공부하는 기초로 활용한다.

마지막으로 6학년 2학기 7단원 정비례와 반비례에서는(교육과학기술부, 2011e; 교육과학기술부, 2011j) 5학년 2학기에 배운 비와 비율에 관한 내용 및 6학년 1학기에 배운 연비와 비례배분을 토대로 대응하여 변하는 두 양 사이의 관계로부터 정비례의 개념을 이해하고 정비례 관계식을 알아보게 한다. 아울러 대응하여 변하는 두 양 사이의 관계로부터 반비례의 개념을 이해하고 반비례 관계식을 알아보게 한다. 또 대응하여 변하는 두 양 사이의 관계 중에서 정비례와 반비례가 있는 것을 알아보고 생활 장면에서 정비례와 반비례가 적용되는 문제를 해결하도록 지도한다.

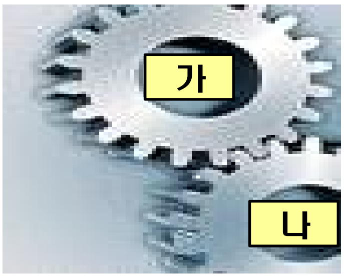
Ⅱ. 연구의 실제

1. 문제제기 및 연구대상자 특성

가. 문제 제기

6학년 1학기 비례식 단원을 학습하고 있던 중 한 학생이 [문제 1]을 가져왔고 학생의 풀이 과정을 살펴보았더니 비례식을 사용하여 식을 세우고 답을 얻었다. 그러나 주어진 문제의 보기에 동일한 것이 없었고, 학생은 비례식을 변경하여 풀더니 답을 찾았다고 하였다. 이에 연구자는 왜 처음의 비례식에서 얻은 것은 답이 아니며, 무엇 때문에 비례식을 변경했는지 물었으나, 학생은 명확한 답변을 하지 못하였다. 이를 통해 본 연구가 시작되었다.

[문제 1] 맞물려 돌아가는 두 톱니바퀴가 있습니다. 톱니바퀴는 아래의 그림과 같이 각각 톱니 하나씩 맞물려서 돌아갑니다. 이제 문제를 해결해 보세요.



(가)의 톱니 수는 30개이고 (나)의 톱니 수는 20개 입니다. (가) 톱니바퀴가 4바퀴 도는 동안 (나) 톱니바퀴는 몇 바퀴 돌게 됩니까? ( )

① 3바퀴 ② 4바퀴 ③ 5바퀴 ④ 6바퀴 ⑤ 7바퀴

연구대상자가 범하는 오류가 다른 학생들에게도 일어나는 것인지 알아보기 위해 연구자가 재직 중인 학교의 6학년 학생에게 [문제 1]을 투입하였고, 144명의 학생 중 정답자 68명을 제외한 나머지 76명의 학생의 풀이 과정을 살펴보았으며, 그 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> [문제 1]에서 보인 학생들의 반응

오답자	무응답	비례식 형태로 시도한 오답유형				비례식 형태는 아니지만 논리성이 결여되었거나 잘못된 해결방법
		30:20=4:□	30:4=20:□	30:20=120:80 또는 30:20=120:□	기타	
76	16	21	9	5	3	22

<표 1>에서와 같이 오답자 중 21명의 학생이 연구대상자와 동일한 비례식을 통해 문제해결을 시도하였으며, 비례식의 형태로 문제해결을 시도하여 오답을 보인 학생이 17명이 있었다. 다만 연구의 시작이 연구대상자의 질문에서부터 비롯된 것이기 때문에 연구대상자로부터 얻은 오류 결과를 대표적인 학생의 사례로 기술하고자 한다.

나. 연구 대상자의 풀이

학생은 주어진 문제를 비례식을 이용하여 아래와 같이 문제를 해결하였다.

$30:20=4:\square$에서 $\square=\frac{8}{3}$. 그리고 난 후, "어! 보기에 답이 없네?" (다시 비례식을 계산하더니 고개를 갸웃거린다.) 잠시 후, $30:20=\square:4$에서 $\square=6$. "정답은 ④번 6바퀴에요."

다. 면담의 실제

문제해결에 어려움을 겪는 연구대상자에게 도움을 주기 위하여 면담을 실시하였으나, 학생은 자신의 문제해결 과정에 대해서 명확하게 설명을 하지 못하였다. 연구자는 학생과의 면담 과정을 현장 노트(field note)로 기록하면서 소형 녹음기로 녹음하였다. 면담이 끝난 후 녹음 자료를 확인하면서 현장 노트에서 빠진 부분을 보충하고, 잘못된 내용이 없는지 확인하여 정확한 면담 자료를 확보하였다. 자세한 면담의 내용은 다음과 같다.

(고개를 갸웃거리는 것이 생각나서)
T 1 : 뭐가 이상하니?
S 2 : 문제에서 주어진 대로 30 : 20 = 4 : □라는 식을 써서 계산하였더니 보기에 정답이 없었어요.
T 3 : 왜 그렇게 비례식을 세웠니?
S 4 : 음…. 모르겠어요. 그냥 풀어봤는데 잘 안 풀렸어요. 책에 있는 대로 한 것 같은데….
T 5 : 그럼 어떻게 하면 문제를 풀 수 있을까?
S 6 : (한참 후) 30 : 20 = □ : 4라고 하면 □ = 6이 되고, 보기에 답이 있어요. 그런데 이게 맞는지는 잘 모르겠어요.
T 7 : 방금 네가 두 가지의 식을 제시했는데, 네가 세운 식이 어떤 의미를 가지는지 설명할 수 있겠니?
S 8 : ….
T 9 : 문제는 하나인데, 너는 서로 다른 두 가지 식을 세웠구나. 분명 두 식은 어떤 의미를 가지고 있을 텐데…. 두 식이 갖는 의미를 이야기 해 볼래?
S 10 : 둘 다 맞는 것 같은데요? …. 잘 모르겠어요.
T 11 : 그럼 처음 30 : 20 = 4 : □이라는 식을 세운 이유는 무엇이니?
S 12 : 음…. 그야 (가) 톱니가 30개이고 (나) 톱니가 20개라고 했잖아요.
T 13 : 그렇지. 그래서?
S 14 : 그러니까 30 : 20. 일단 이것을 썼어요.
T 15 : 그 다음은? 그 다음은 왜 4 : □를 쓴 거니?
S 16 : 톱니의 수가 (가):(나) 가 30 : 20 이잖아요? 그다음에 (가)가 4바퀴라고 했으니까 4를 쓰고 (나)는 몇 바퀴 도는지 모르니까 □를 썼어요. 그러니까 30 : 20 = 4 : □라는 식이 나왔어요.
T 17 : □는 어떻게 구했니?
S 18 : 외항과 내항의 곱이 같잖아요. 30하고 □를 곱한 것이 20×4와 같아야 돼요. 그러니까… 30×□ = 80이 되어야 되는데… 그러면 분수가 나와요. 아닌 것 같아요.
T 19 : 분수가 나오면 왜 아닌데?
S 20 : 답에 없잖아요…. 선생님이 한 번 풀어보세요.
T 21 : 에이~ 네가 고민하는 과정을 거쳐야 수학 실력이 늘지. 그럼 30 : 20 = □ : 4는 왜 세운 식인데?
S 22 : 저도 사실 정확히는 모르겠는데…. 30 : 20 = 4 : □를 하니까 답이 안 나와서 30 : 20 = □ : 4를 해봤는데… 답이 있었어요. 그래서 썼어요.

라. 연구대상자의 특성

연구대상자는 경남 사천 소재 M초등학교 6학년 여학생으로서 진단평가와 중간평가에서 중상위 수준의 수학 학업 성취를 보이는 학생이다. 연구대상자는 평소 자신이 옳다고 생각하는 일에 대해서는 교사와 언쟁을 벌일 정도로 자신의 의견을 충분히 표현하는 학생이다. 교과서에 제시된 형성평가 문항의 해결에서는 항상 90점 이상을 받을 정도의 실력을 갖추고 있으며, 평소 반복학습을 주로 하는 유형의 학습지를 열심히 공부하는 학생이다. 이를 바탕으로 알고리즘을 이용한 문제풀이 능력은 탁월한 편인 반면, 응용이 필요한 문제를 해결할 때는 잠시 생각하고 쉽게 포기해 버리는 경향도 있으며, 문제 풀이 과정보다는 답이 무엇인지에 대해 강한 집착을 보이는 학생이다.

2. 원인 진단과 개선 방안에 대한 절차

본 연구에서는 연구대상자가 범한 오류의 원인 진단과 바람직한 지도방안의 객관성 확보를 위하여 다음과 같은 절차를 거쳤다.

먼저 연구자는 연구대상자의 반응을 통해 학생이 보이는 오류를 확인하였고 그러한 오류의 원인에 대해 일차적으로 진단하였다. 그런 다음 연구자가 속해 있는 수학교육세미나팀[3]에서 연구대상자가 범한 오류의 원인을 다양한 측면에서 살펴보았으며, 이렇게 진단된 원인이 어느 정도의 일반성을 갖는지 확인하기 위해 6학년 144명의 학생에게 [문제 1]을 투입하여 연구대상자가 범한 오류가 다수의 학생에게서 볼 수 있는 현상임을 확인하고 오류의 원인으로 확진하였다.

연구자는 연구대상자가 범한 오류의 원인 진단을 바탕으로 바람직한 지도방안을 마련하고자 하였다. 바람직한 지도방안과 관련해서는 크게 배우는 방식과 교재에 대한 탐구의 두 가지로 생각해 볼 수 있다. 그런데 배우는 방식과 관련된 탐구는 학생과 교사의 주관적인 부분이 많기 때문에 본 연구에서는 교재에 대한 부분을 중점적으로 탐구하기로 하였다. 바람직한 지도방안을 마련하기 위해서 연구자는 앞에서 도출한 원인 진단을 바탕으로 비례식 지도방안에 대해 교재와 관련하여 바람직한 지도방안을 일차적으로 모색하였으며 수학교육세미나팀에서 이 내용을 검토하여 바람직한 지도방안 마련과 관련된 개선책을 얻을 수 있었다. 다만, 연구자는 교과서의 결함이 있으니 수정하여야 한다는 것이 아니라 지도 방법을 제안하자는 취지이며 이는 어떤 내용을 지도하고자 할 때 발생하는 어려움은 있기 마련이라는 생각을 바탕으로 한다. 예컨대 비례식을 배우기 위해 정비례를 먼저 익혀야 한다고 했을 때, 정비례를 지도하기 위해서는 불가피하게 반비례가 나와야 하며 이러한 절차가 꼭 바람직하다고만 할 수는 없을 수 있다. 그러나 비례식을 세울 수 있는 암묵적인 정비례 상황만 다루어 실제 정비례를 배울 때, 비례식을 그 예로 가져오는 것도 한 방법이 될 수 있다고 생각한다. 따라서 결과를 변화시키는 것이 아니라 다만 교수학적 변환에서 발생할 수 있는 문제를 언급하고 개선점 중의 하나에 대해 논의하고자 하였다. 이러한 것들을 토대로 연구자는 비례식을 지도하는 바람직한 방안에 대한 이차적인 안을 마련하였고 이에 대하여 수학교육세미나팀에서 여러 번의 논의를 거쳐 최종적인 결론을 도출하였다.

3. 연구대상자가 범한 오류의 원인 진단

학생은 연구자와의 면담 과정에서 자신의 풀이에 대한 논리적 허점을 발견하지 못하였다. 이것은 무엇 때문

---

3) 수학교육세미나팀은 수학교육을 전공한 연구자들의 모임으로 수학교육 박사학위 소지자 3명, 박사과정 수료자 4명으로 구성되어 있으며, 매주 정기적으로 수학교육과 관련된 여러 가지 주제에 대해 심도 있게 논의하는 연구공동체이다.

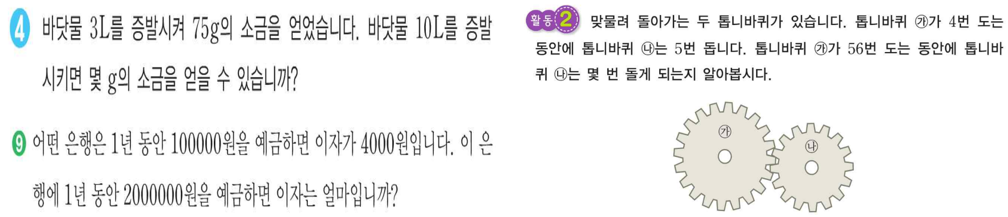
일까? 이것은 크게 두 가지 측면에서 기인한 것이라 볼 수 있다.

첫 번째 이유는 주어진 문제를 한 가지 방법으로만 해결하려고 한 것이다. 주어진 문제를 효율적인 한 가지 방법으로 해결할 수 있다면, 그것은 문제가 되지 않는다. 그러나 연구대상자는 주어진 문제 해결에 효율적인 방법 중 하나인 비례식을 이용하려 하였고, 비례식에 대한 부정확한 지식으로 말미암아 잘못된 식을 세우게 되었으며 결국 문제해결에 실패하게 된 것이다.

교사는 학생을 가르치면서 교과서와 지도서에 제시된 순서와 내용을 그대로 사용할 수도 있지만, 재구성하여 가르치는 경우도 있다. 여기에서는 이러한 경우를 제외하고 교과서와 지도서에 제시되어 있는 구성 순서와 내용에 기반을 두어 다루기로 한다. 이와 같은 측면에서 오류의 두 번째 이유를 찾을 수 있고, 이것은 다음과 같은 몇 가지로 세분화 할 수 있다. 하나는 현재 교과서가 비례식의 의미에 대해서 고려하지 않고 비례식을 세우는 데에만 초점을 맞추고 있다는 것이다. 교과서에서는 비례식의 정의와 비의 성질에 대해서는 3차시 분량 정도의 간단한 학습으로 끝내는 반면에 비례식의 성질을 이용하여 문제를 해결하는 것은 5차시를 배당하여 문제 해결에 중점을 두는 것으로 보인다. 이 과정에서 비례식의 성질은 아주 강조되고 있으나, 비례식의 의미에 대해서는 제대로 된 학습이 이루어지지 않고 있다. 다시 말해서 비례식 본연의 의미 즉, 제시되는 개념들이 정비례하고 수량 정보들의 비율이 같을 때에 비례식을 세울 수 있다는 사실을 간과하고 '비율이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식'이라 약속을 하고 있다. 그러는 과정에서 학생들은 비례식을 세울 때에 비례식의 의미에 대해서는 생각하지 않고 주어진 숫자를 임의로 넣어서 $a:b=c:d$ 와 같은 비례식을 세우고 미지항을 비례식의 성질을 이용하여 구하게 된다. 그리고 비례식 단원을 학습하는 과정에서 학생들은 정비례 상황에 대한 이해가 부족하다고 볼 수 있다. 즉, 정비례에 대해서 배우지 않았기 때문에 톱니바퀴와 관련된 문제 해결에 있어 정비례한지 따져보지 않고 습관적으로 비례식을 쓰게 되는 것이다.

실제로 연구대상자는 S2에서 확인할 수 있듯이 문제에 주어져 있는 숫자를 임의로 나열하여 $30:20=4:\square$ 라는 비례식을 세웠고 이를 바탕으로 문제를 해결하고자 하였다. 그러나 그렇게 해서 구한 답이 보기에 없었고 한참 생각하더니 S6과 같이 원래 세웠던 비례식에서 뒤에 나오는 숫자의 위치를 바꾸어서 $30:20=\square:4$ 라는 비례식을 세웠고 그렇게 해서 구한 답이 보기에 있는 것을 보고 이를 답이라고 하였다. 즉, 이 문제를 왜 비례식을 세워서 해결하는지, 그리고 자신이 세운 비례식이 올바르게 성립하는지에 대한 판단 없이 주어진 수에만 집중하여 비례식을 세워 문제를 해결하려고 하는 것이다.

또 다른 하나는 교과서에 제시된 문제가 주어진 수들을 순서대로 나열하면 비례식이 세워지고, 문제를 해결하는 과정에서 그 방법에만 초점이 맞춰진다는 것이다. S4에서 학생은 '책에 있는 대로 한 것 같은데…….'라는 말을 하면서 자신의 풀이과정을 정당화하고 있다. 이 말의 뜻을 구체적으로 살펴보기 위해서 연구자는 비례식 단원에서 제시되고 있는 문제를 살펴보았으며 이는 <그림 1>과 같다(교육과학기술부, 2011d, p.109; 교육과학기술부, 2011d, p.111; 교육과학기술부, 2011d, p.121).



<그림 1> 비례식 단원에서 제시된 대표적인 유형의 문제

앞에서 살펴본 문제는 문제에 주어진 숫자들을 순서대로 나열하여 비례식을 쉽게 세울 수 있고, 비례식의 성질이라는 알고리즘으로 쉽게 답을 찾을 수 있다. 수학 교과서와 수학 익힘책에 수록된 대부분의 문제는 이와 같이 해결이 가능하다. 때문에 연구대상자를 포함한 대부분의 학생들은 연구에서 제시된 문제도 주어진 수들을 적절하게 배치하여 비례식을 세우려 하게 되고, 이를 바탕으로 문제를 해결하고자 하는 것이다.

마지막으로 위와 같은 방식으로 비례식을 세우고는 비례식의 성질이라는 알고리즘에 의한 계산으로 문제를 해결하는 것에 초점이 맞춰져 있다는 것이다. 비례식 단원에서는 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 비율이 같다는 비의 성질도 배우고, 비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 비례식의 성질도 배우게 된다. 그러나 이후의 문제를 해결하는 과정에서 외항의 곱과 내항의 곱이 같다는 비례식의 성질을 이용하는 것에 초점이 맞춰져 있다. S16에서 학생은 '외항과 내항의 곱이 같잖아요.'라는 말을 하면서 비례식의 성질을 이용하여 문제를 해결하고 있다. 물론 이와 같은 경우처럼 비례식의 성질을 이용한 해결이 더 용이할 때가 있다. 그러나 위에 제시된 교과서 문제 중에서 「어떤 은행은 1년 동안 100000원을 예금하면 이자가 4000원입니다. 이 은행에 1년 동안 2000000원을 예금하면 이자는 얼마입니까?」의 경우, $100000:4000=2000000:\square$라는 비례식을 세워서 문제를 해결할 수 있는데, 여기서 □의 값을 구할 때에는 비례식의 성질을 이용하는 것보다는 비의 성질을 이용하는 것이 훨씬 더 간편함에도 불구하고, 학생들은 비례식의 성질을 이용하여 문제를 해결하고자 하는 것이다.

이와 같은 몇 가지 사실을 통해 비례식과 관련된 현행 교육과정의 순서와 내용이 어느 정도 잘못 구성되어 있음을 알 수 있다.

4. 바람직한 지도방안

학생이 한 가지 방법으로만 주어진 문제를 해결하려고 한다는 오류와 관련해서는 가. 오류의 진단에 대한 처방에서, 교육과정의 잘못에서 기인했다는 것과 관련해서는 나. 비례식 지도방안에서 지도 방향을 제시하고자 한다.

가. 오류의 진단에 대한 처방

앞에서 주어진 [문제 1]을 연구대상자는 비례식만을 이용하여 해결하려고 하였으나, 이 문제는 다른 방법으로도 해결이 가능하다.

첫 번째 방법으로 단위 비율을 이용하는 것을 들 수 있다. 단위 비율을 이용한 전략은 초등학교 4학년 1학기 혼합계산 단원에서 심심치 않게 볼 수 있다. 단위 비율을 이용한 전략의 설명을 돕기 위해 수학 교과서 91쪽에 제시되어 있는 '공책 1권의 값은 250원, 연필 1다스의 값은 2400원, 지우개 1개의 값은 150원입니다. 공책 1권, 연필 5자루, 지우개 2개의 값을 구하는 식을 계산 순서를 생각하면서 하나의 식으로 만들어 구하시오.'[4]라는 문제를 살펴보도록 하자. 이 문제에서 연필 5자루의 값을 구하고자 할 때, 단위 비율을 이용하여 해결할 수 있다. 즉, $2400\div12=200$이 되고, 연필 5자루의 값을 구하기 위해서는 단위 비율인 200을 5배하여 구할 수 있다. 즉, $200\times5=1000$이 된다. 앞에서 주어진 문제에서 구하고자 하는 것이 연필 5자루의 값이 아니기 때문에 상황이 조금 더 복잡하긴 하지만, 연필 5자루의 값을 구하는 데 있어서 단위 비율이 사용되는 것임에는 틀림없다.

[문제 1]은 '연필 값 문제'와는 사뭇 다르다. 문제에서 주어진 (가)의 톱니 수는 30개이고, (나)의 톱니 수는 20

4) 문제가 사용될 때마다 문제를 제시하는 것은 비효율적이므로 이 문제를 이후 제시하게 될 때에는 간략하게 '연필 값 문제'라 칭하도록 하겠다.

개이다. 이 두 톱니바퀴가 맞물려 돌아가고 있기 때문에 상황은 조금 더 복잡해지게 된다. 그러나 단위 비율을 이용하여 문제를 해결할 수 있다는 사실은 변함이 없다.

문제에서 주어진 대로 (가) 톱니바퀴의 톱니 1개가 돌아가는 바퀴 수를 단위 비율로 한다면, (가)는 톱니 수가 30개이므로 (가) 톱니바퀴가 1바퀴 돌 때 (가)의 톱니 1개는 $\frac{1}{30}$바퀴 돌게 된다. 그리고 (가) 톱니바퀴가 1바퀴 돌 때 30개의 톱니가 돌아가므로 맞물려 돌아가는 (나)는 톱니 수가 20개이므로 1바퀴 반을 돌게 된다. 따라서 (가) 톱니바퀴의 톱니 1개가 $\frac{1}{30}$바퀴 돌 때 (나) 톱니바퀴의 톱니 1개는 $\frac{1}{20}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{40}$바퀴 돌게 된다. 그러면 (가) 톱니바퀴가 4바퀴 도는 동안 (가)의 톱니 1개는 $\frac{1}{30}\times 4=\frac{4}{30}$바퀴 돈 것이 되고, (나)의 톱니 1개는 $\frac{3}{40}\times 4=\frac{3}{10}$바퀴 돈 것이 된다. 그런데 문제에서 요구하는 것은 톱니 1개가 돌아가는 바퀴 수를 구하는 것이 아니라, 톱니바퀴 전체가 돌아갈 때의 바퀴 수를 구하는 것이기 때문에 톱니 1개의 바퀴 수에 각각의 톱니 수를 곱해 주어야 한다. 따라서 (가) 톱니바퀴가 4바퀴 돌았다는 의미는 (가)의 각 톱니가 $\frac{4}{30}$바퀴만큼 돌았다는 것이고 이러한 톱니가 30개이므로 $\frac{4}{30}\times 30=4$바퀴가 된다. 그리고 (가) 톱니바퀴가 4바퀴 도는 동안에 (나) 톱니바퀴의 톱니 1개는 $\frac{3}{10}$바퀴만큼 돌았다는 것이고 그러한 톱니가 20개 있으므로 $\frac{3}{10}\times 20=6$바퀴가 되며, 이것은 문제에서 요구하는 답이 된다.

두 번째 방법으로 배율 인수를 이용하는 것을 들 수 있다(Margaret & Mary, 2011). 배율 인수를 이용한 전략의 설명을 돕기 위해 앞서 제시한 '연필 값 문제'를 해결해 보도록 하자. 문제에서 구하고자 하는 상황에서 연필의 수는 원래 주어진 연필의 수에 $\frac{5}{12}$를 곱한 것이므로, 연필의 가격 또한 원래 주어진 연필의 가격에 $\frac{5}{12}$를 곱하여 구할 수 있다. 즉, $5=12\times\frac{5}{12}$이므로 $\square=2400\times\frac{5}{12}=1000$이 되는 것이다.

이제 [문제 1]을 이와 같은 방법으로 해결하여 보자. 문제에서 (가) 톱니바퀴는 톱니의 수가 30개이므로 톱니 1개당 회전수는 $\frac{1}{30}$이 되고 (가) 톱니바퀴가 4회전을 했다는 이야기는 톱니 1개당 회전수에 120을 곱한 것이므로, (나) 톱니바퀴 또한 원래 주어진 톱니 1개당 회전수 $\frac{1}{20}$회전에 120을 곱해서 (나) 톱니바퀴가 회전한 수를 구할 수 있다. 즉, $\frac{1}{20}\times 120=6$ 회전이 되는 것이다.

세 번째 방법으로 비례식을 이용하는 것을 들 수 있다. [문제 1]에서 비례식 $30:20=4:\square$로는 원하는 답을 왜 얻을 수 없으며, 비례식 $30:20=\square:4$로 얻은 답은 왜 옳은지 살펴보자. 두 비례식에서 사용된 30과 20은 톱니의 개수이고 4와 □는 회전수이다. 두 비례식에 있는 $4:\square$와 $\square:4$는 단순히 순서만 바꾼 것처럼 보이지만 사실은 다음의 내용을 내포하고 있다. 톱니의 개수와 톱니바퀴의 회전수는 정비례하지 않기 때문에 비례식을 세울 수 없지만(즉, $30:20\neq 4:\square$), 톱니의 회전수와 톱니바퀴의 회전수는 정비례하므로 $\frac{1}{30}:\frac{1}{20}=4:\square$라는 비례식을 세울 수 있다. 이 식을 적당한 자연수비로 나타내면 $20:30=4:\square$가 되고 이것은 $30:20=\square:4$와

같다. 따라서 $30:20=\square:4$에서 $\square=\dfrac{8}{3}$을 얻는 것은 [문제 1]과 상관없는 수의 나열에 의한 식이며 결과이다. 그러나 비례식 $30:20=\square:4$에서 얻은 6은 옳은 것이다. 이렇듯 비례식 개념은 정비례와 밀접한 관계가 있다.

나. 비례식 지도방안

[문제 1]을 비례식이 아닌 앞에서 제시한 다른 방법으로 풀 수 있지만, 실제로 학생이 하고자 한 것은 비례식을 세워서 문제를 해결하는 것이었기 때문에 비례식에 대한 보다 명확한 이해를 위해서 학생들에게 어떤 내용을, 어떤 순서로 가르쳐야 하는지에 대한 이해가 필요하다. 비례식과 관련된 학습 요소에는 두 양을 비교하는 방법, 비와 비율, 비와 비율의 표현, 비의 값, 비와 분수의 차이, 정비례와 반비례, 비례식의 정의와 성질, 연비, 비례배분 등이 있다. 현재 교과서에서는 비와 비율을 특별히 구분하지 않고 사용하고 있으며, 경우에 따라 동일한 것으로 사용하고 있다. 따라서 비례식의 의미를 배울 때, 사용되는 개념이 어디에서 출발한 개념인지 알기 어렵다. 따라서 비례식 지도와 관련된 학습 요소를 다음과 같은 순서와 내용으로 구성할 것을 제안한다. 이는 현재 교과서와 지도서의 내용에 결함이 있다는 것이 아니라 다음과 같은 순서와 내용으로 구성을 한다면, 학생들이 조금 더 잘 이해할 수 있다는 측면에서의 제안이라고 볼 수 있다. 다만, 전체적 흐름을 제시하는 것이기 때문에 구체적인 학년과 차시를 특별하게 제시하지는 않기로 한다.

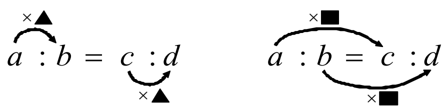
첫째, 현재 교과서와 지도서에는 서로 다른 두 수의 크기를 비교하는 상황—학생 수 1명과 공책 수 4권을 비교한다—을 따로 제시하면서 비를 도입하고 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 소개하고 있다. 비와 비율을 소개한 이후에는 경우에 따라서 비를 이용하기도 하고, 비율을 이용하기도 한다. 그러면 비와 비율은 기존에 배운 것과는 별개의 개념이 되므로 두 양을 비교하는 방법을 이야기하여 비와 비율이 어디서부터 비롯된 것인지 알게 하고 난 후, 비와 비율의 차이를 언급하는 것이 더 나을 것으로 판단된다. 두 양을 비교하는 방법에는 단순비교, 덧셈비교, 그리고 곱셈비교가 있다. 단순비교는 a, b가 있을 때 'a가 b보다 크다' 또는 '같다' 또는 '작다'로 비교하는 방법이고, 덧셈비교는 a가 b보다 얼마나 큰지로 비교하는 방법이며, 곱셈비교는 a가 b의 몇 배인지로 비교하는 방법으로 이것이 우리가 다루고자 하는 비례식의 기본 개념인 비 또는 비율과 관계되어 있다. 비와 비율에 대한 이해가 선행되었다면, 비와 비율은 사실 다른 의미를 갖는다는 것을 이야기 해 주어야 한다. 예를 들어 "100명의 관중 중 30명이 모자를 썼다"와 "관중 중 100에 30명은 모자를 썼다"는 그 의미가 다르다. 관중이 200명일 때를 생각해 보면 의미의 차이를 더욱 분명히 구분할 수 있다. 이때, 전자는 '비'이고 후자는 '비율'인 것이다.

둘째, 현재 교과서에는 『학생 수 1명과 공책 수 4권을 비교하기 위하여 비로 나타냅니다. 이것을 $1:4$라 쓰고 1 대 4라고 읽습니다. $1:4$는 공책 수 4를 기준으로 하여 학생 수 1을 비교한 것입니다. 이것을 4에 대한 1의 비 또는 1의 4에 대한 비라고 합니다. 또는 간단하게 1과 4의 비라고도 합니다.』와 같이 비를 약속하면서 다르게 읽는 방법 위주로 제시하고 있다. 이와 같은 방법으로 지도한다면, $a:b$가 $\dfrac{a}{b}$로 나타내어지는 근거를 찾을 수가 없으므로 학생들은 암기에 의존하거나, 자신들의 생각을 암기한 내용에 맞추어 구성해 낼 수 밖에 없다. 따라서 다음과 같이 학생들이 비와 비율의 의미를 이해할 수 있도록 하는 표현 방법을 제시하는 방향으로 내용이 전개되어야 한다. 먼저, "a는 b의 몇 배인가"에서 a와 b의 관계를 "a와 b의 비" 또는 "b에 대한 a의 비" 또는 "a의 b에 대한 비"라 하고, "$a:b$"로 나타낸다는 것을 안내한다. 여기서 a를 '전항', b를 '후항'이라고 한다. 다음으로 비 $a:b$는 "a는 b의 몇 배인가"의 관계라고 했기 때문에 이것을 식으로 나타내어 $a=b\times\square$에서

$\square=\frac{a}{b}$ 와 같이 나타낼 수 있으며, “a는 b의 몇 배인가”라는 문장의 뜻에서 b는 기준량이 되고 a는 비교하는 양이 된다. 특히, “b에 대한 a의 비”에서 b를 단위 즉, 1로 보았을 때 a는 얼마인가를 나타내는 실수를 ‘$a:b$의 비의 값’이라고 한다. 즉, 기준량 b를 1로 보았을 때 비교하는 양 a의 값을 뜻한다. 비의 값 측면에서 $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$이다. 이와 같은 과정으로 비와 비율의 표현 방법에 대해서 안내를 하게 되면 비와 비율을 차이를 자연스럽게 이해할 수 있으나, 다음과 같이 설명해 줄 수도 있다. 비 $4:2$와 비 $8:4$는 같은 것이 아니지만, 비율의 의미에서 본다면 $4:2$와 $8:4$는 같다. 때문에 도형의 닮음에서 우리가 사용하는 닮음비는 실제로는 비가 아니라 비율인 것이다. 한편, 교과서(교육과학기술부, 2011d)에 “가장 작은 자연수의 비로 나타내시오.”라는 표현이 제시되는데, 여기에서의 ‘비’도 실제로는 비율의 개념이 적용되는 것이다. 왜냐하면, $\frac{1}{30}:\frac{1}{20}$과 $20:30$은 비의 의미가 아니라 비율의 의미로서 같기 때문이다.

셋째, 비례식의 의미와 관련하여 현재 교과서에서는 정비례를 비례식 뒤에 배우도록 구성되어 있는데, 이러한 순서로는 비례식의 의미를 제대로 이해하기 어렵다. 비례식에 대한 올바른 이해를 위해서는 정비례에 대한 내용을 먼저 지도하고 개념 사이의 정비례 관계를 파악하는 기회를 제공한 후, 비례식의 정의와 성질을 지도하는 것이 바람직하다. 비례란 규칙적으로 변화하는 두 양 사이의 곱셈적 관계를 말하며, 이는 비의 불변(invariance of ratio)을 의미하는 정비례와 곱의 불변(invariance of product)을 의미하는 반비례로 구분된다(Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992). 즉, 정비례는 x의 값이 n배가 되면 y의 값도 n배가 되며, $\frac{y}{x}$가 항상 일정한 관계이고, 반비례는 x의 값이 n배가 되면 y의 값이 $\frac{1}{n}$배가 되며, xy가 항상 일정한 관계이다.

두 개념 A, B에 속하는 수량 정보를 각각 a, b와 c, d라 하자. A, B가 정비례하고 수량 정보들의 비율이 같을 때에만 $a:b=c:d$ (또는 $a:c=b:d$)로 쓸 수 있다. 이것은 <그림 2>와 같이 나타낼 수 있다.



<그림 2> 비례식의 관계

비례식에 대한 위 정의에 의해 다음과 같은 성질을 얻을 수 있다.

$a:b=c:d$ 이면, $b\times c=a\times d$ 이다.
즉, 비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱은 같다.

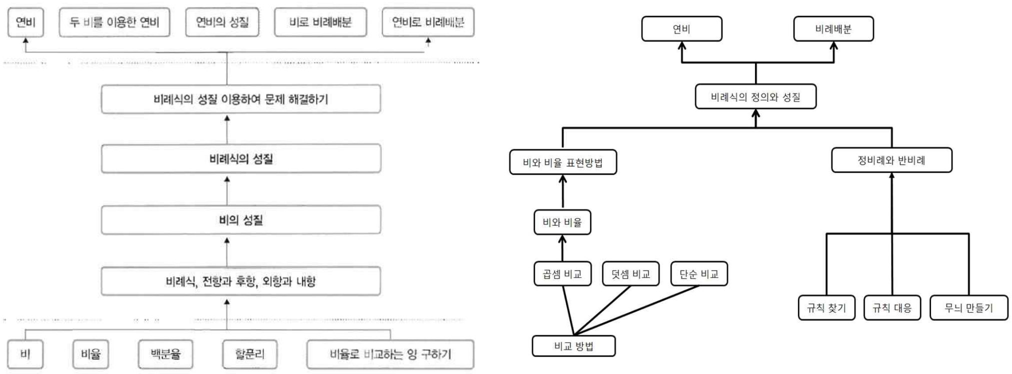
이와 같이 비례식의 성질을 얻고 나면 비와 분수의 차이를 더 잘 이해할 수 있다는 장점이 있다. 앞에서 비와 비율의 다양한 표현 방법에 대해서 학습하고 난 후, 학생들은 비와 분수를 같은 것으로 여기게 된다. 그러나 비와 분수는 여러 가지 측면에서 다르다(강지형 외, 1999).

넷째, 현행 교과서처럼 비례식을 '외항의 곱과 내항의 곱은 같다.'는 성질을 이용하여 해결할 경우, 연비는 암기해야 하는 또 다른 내용이 된다. 따라서 연비에 대한 지도는 비례식의 정의에 의해서 지도되어야 하고, 비례식의 정의에 의한 지도는 자연스럽게 연비와 비례배분에 대한 이해로 연결된다. 연비란 셋 이상의 비를 $A:B:C=8:12:15$와 같이 나타낸 것으로 비례식의 성질이 아니라 정의를 사용하여 구할 수 있는 것이다. 연비를 구하는 원리를 구체적인 예를 통해 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{array}{l} A:B=2:3 \\ B:C=4:5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} A: & B: & C \\ 2 & :3 & \\ & 4 & :5 \end{array} \quad \underset{(\text{비례식의 정의 적용})}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} A:B:C \\ 8:12:15 \end{array}$$

비례배분이란 전체를 주어진 비에 따라 나누는 것을 의미한다. 비례배분의 지도는 나눗셈에서 출발하여야 한다. 비례배분의 지도 방법을 예를 통해 살펴보자. 만약에 '색종이 45장을 각 모둠 학생 수에 따라 나누어 주려고 합니다. (가)모둠은 7명, (나)모둠은 8명입니다. 각 모둠에 몇 장을 나누어 주어야 합니까?(교육과학기술부, 2011e, p.137)'라는 문제가 제시되었다고 하자. 나누어 주는 방법이므로 나눗셈의 원리에 의해 한 명당 3장씩 나누어 주거나, (가)모둠에는 $3\times7=21$장, (나)모둠에는 $3\times8=24$장씩 나누어 주면 된다. 이것을 비례배분으로 해결하면, $(\text{가})\text{모둠}:(\text{나})\text{모둠}=7:8$ 이므로 (가)모둠에는 $45\times\frac{7}{7+8}=3\times7=21$장, (나)모둠에는 $45\times\frac{8}{7+8}=3\times8=24$장의 색종이를 나누어 주면 된다.

본 연구에서 제안하는 비례식 지도와 관련된 학습 요소의 구조도를 제시하면 <그림 3>의 오른쪽과 같으며, 현재 교육과정 구성과 비교할 수 있도록 하기 위해 왼쪽에 현재 지도서 비례식 단원에 제시되어 있는 흐름도를 함께 제시하였다.



<그림 3> 비례식 지도와 관련된 학습 요소 흐름도 비교

앞에서 제시한 것처럼 비례식을 이해하기 위해서는 두 양을 비교하는 방법, 비와 비율, 비의 표현, 비의 값, 비와 분수의 차이, 정비례와 반비례 등에 대한 개념의 명확한 이해가 바탕이 되어야 한다. 그러나 현행 교육과정에서는 5학년 2학기에서 두 양을 비교하는 방법과 비와 비율에 대해서 지도를 하고 있으나, 두 가지 개념을 혼동하여 사용하고 있다. 그리고 6학년 1학기에 비례식을 학습할 때에도 비례식이 무엇인가에 대한 논의 없이 '비

율이 같은 두 비를 등식으로 나타낸 식'을 비례식으로 약속하여 도입하고 있다. 그리고 '외항의 곱과 내항의 곱이 같다'는 비례식의 성질을 귀납적 방법으로 소개하며, 그 다음부터 비례식 관련 모든 문제에 이 성질을 적용하여 해결한다. 그리고는 6학년 2학기에 정비례와 반비례를 처음으로 제시하고 있다. 이것은 비례식은 무엇인가에 대한 구체적인 논의를 방해하는 교육과정 구성이라고 할 수 있다. 비례식에 대한 명확한 이해를 돕기 위해서는 비와 비율을 보다 명확하게 구분하여 배우고 난 후, 이를 토대로 정비례와 반비례에 대해서 학습하고 그 이후에 비례식을 배울 수 있도록 해야 할 것이다. 이는 비례 문제를 통해 곱셈적 추론 과정을 충분히 경험하도록 한 후 비례식을 소개하도록 하는 것이 바람직하다고 한 엄선영, 권혁진(2011)의 의견과도 일맥상통한다.

Ⅲ. 결론 및 제언

본 연구에서는 톱니바퀴 관련 문제해결 과정에서 나타나는 한 학생의 오류가 있는 풀이를 통해 오류의 원인에 대해 살펴보고, 교육과정과 교과서 측면에서 오류를 분석하는 과정을 통해 학생이 오류를 줄일 수 있도록 하기 위한 바람직한 지도방안은 어떤 것이 있는지 살펴보았다. 톱니바퀴 관련 문제가 비례식에서 흔히 접할 수 있는 문장제와 유사한 구조와 형태를 지니고 있었기 때문에 학생은 다른 해결 방법이 있음에도 불구하고 비례식을 이용하여 문제를 해결하였다. 이 과정에서 학생은 비례식이 성립하는 상황인지 아닌지 따져보지 않고 주어진 수를 적당히 나열하여 비례식을 세웠기 때문에 오류를 범하게 되었다. 학생이 범한 오류의 분석과 그 원인을 진단하고 바람직한 지도방안을 모색하는 과정을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 주어진 문제를 해결하는 데에는 꼭 한 가지 방법만 존재하는 것은 아니다. 본 연구에서 학생의 오류에 대한 처방으로 제시한 단위 비율이나 배율 인수를 활용하는 것은 4학년 때 이미 경험한 방법이다. 그럼에도 불구하고 학생들이 이러한 방법들을 고려하지 않은 것은 주어진 하나의 문제에 대해서 접근이 용이한 하나의 방법으로 지도하는 것에서 비롯된 것이라 본다. 따라서 교사는 문제를 해결함에 있어 하나의 해결 방법만이 아니라 여러 가지 다양한 방법을 이용하여 문제를 해결할 수 있도록 안내해야 할 것이다.

둘째, 톱니바퀴 관련 문제를 해결하는 과정에서 학생은 교육과정에서 이미 비례식을 학습하였고 비례식을 이용하여 여러 가지 교과서 문제를 쉽게 해결하였기 때문에, 문제에서 주어진 상황이 비례식이 성립하는 상황인지 아닌지 따져보지 않고 주어진 수를 적당히 나열하여 비례식을 세우는 오류를 범하였다. 현행 교육과정 하에서 기술되고 있는 교과서에는 한 가지 개념이나 연산을 알고 나면, 그 개념이나 연산을 익힐 수 있는 최상의 조건이나 문제만으로 구성되어 있다. 이것은 '학생들은 교과서에 제시된 다양한 연산의 의미를 비교 분석하면서 이해하고 연계하기보다는 주어진 문제 유형과 관련하여 효율적인 알고리즘을 쉽게 받아들이고 간단하게 적용하는 수준에 머물기 쉽다'는 방정숙, 김재화(2006)의 언급과 같이 많은 문제점을 지니고 있다. 일례로 받아 올림(받아 내림)이 없는 덧셈(뺄셈) 문제를 해결하고 이후 받아 올림(받아 내림)이 있는 덧셈(뺄셈) 문제를 해결할 때에는 오류를 범하지 않던 학생들이 이러한 문제들이 섞여서 제시되는 경우, 어려움을 보이는 경우를 들 수 있다. 비례식에서도 마찬가지이다. 현행 교육과정 하에서 구성된 수학 교과서에는 비례식 단원에서 정비례와 관련된 문제만 제시하고 있다. 따라서 학생들은 주어진 문제가 정비례 상황인지, 반비례 상황인지를 따져보지 않고 주어진 수들을 임의로 나열하여 비례식을 세워서 문제를 해결하는 수준에 머무르게 된다. 따라서 수학 교과서나 수학 익힘책에서 제시하는 문제는 학생들을 다양한 문제 상황에 노출되도록 구성하여 학생들이 명확하게 개념을 이해할 수 있도록 구성되어야 할 것이다.

셋째, 정비례를 배우지 않은 학생이 문제해결에 사용한 방법이 비례식임을 감안하면 교육과정이 체계적으로 재구성되어야 한다. 교육과정의 내용이 학생들에게 적절한 학습 기회를 적절한 시기에 제공하고 있는지 비판적으로 검토해 보고 학생들의 문제해결능력을 균형 있게 발전시킬 수 있도록 비례식과 관련된 교육과정 내용을

선정 및 조직하여야 한다. 즉, 현행 교육과정에서 비례식과 관련된 개념들이 제시되는 순서를 변경하여 비례식을 배우기 전에 두 양을 비교하는 방법, 비와 비율, 비의 표현, 비의 값, 비와 분수의 차이, 정비례와 반비례와 같은 순서로 지도하고, 비례식을 학습하고 난 후 연비, 비례배분을 지도하도록 해야 할 것이다.

지금까지 살펴본 바를 바탕으로 앞으로의 교육과정과 교과서 개발 및 수업을 위한 시사점을 제안하면 다음과 같다. 실제 수업을 함에 있어서 학생의 수준과 지도의 적정 속도는 반드시 고려되어야하기 때문에 학교 수학에서 다루는 교육과정은 교수학적 변환을 거치지 않을 수 없다는 점은 인정한다. 그러나 아무리 교사의 교수학적 변환을 강조하더라도 교육과정에 제시되는 여러 가지 개념에 관한 내용과 순서는 논리적이어야 한다. 따라서 현행 교육과정 하에서 구성되어 있는 수학 교과서의 내용 체계를 정리하여 그것이 올바른지 따져보는 것이 필요할 것으로 보인다. 더 나아가 정은실(2003)이 주어진 대로 비례식을 세울 수 있는 문제 유형의 교과서 구성이 갖는 문제점을 언급하였으나, 여전히 개선되지 않는 것으로 보아 연구의 결과를 공유하는 제도적 장치도 마련되어야 할 것으로 보인다.

학생의 오류와 관련된 연구는 학생의 수준, 의사소통 능력, 문제를 대하는 태도 등에 따라서 다른 결과를 얻게 된다. 그런 측면에서 볼 때, 본 연구를 가능하게 하는 데 연구대상자의 역할도 크다고 볼 수 있다. 연구자가 이러한 연구대상자를 만나는 것은 쉽지 않은 일인 바, 학생들의 문제해결을 지속적으로 관심 있게 지켜보는 것이 연구자에게는 필요하다.

감사의 글

이 논문의 원인 진단과 개선 방안에 대한 기술내용은 심사과정을 통해서 많은 개선이 이루어졌으며, 이는 논문의 질을 높이는데 일조하였습니다. 이 논문의 저자들은 심사위원들께 진심으로 감사드립니다.

참 고 문 헌

강지형 · 김수환 · 라병소, · 박성택 · 이의원 · 이정재 · 정은실 (1999). 7차 교육과정에 의한 초등수학교육. 서울: 동명사.

교육과학기술부 (2011a). 수학 교과서 3-2. 서울: 두산동아 ㈜

교육과학기술부 (2011b). 수학 교과서 4-1. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011c). 수학 교과서 5-2. 서울: 두산동아 ㈜

교육과학기술부 (2011d). 수학 교과서 6-1. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011e). 수학 교과서 6-2. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011f). 수학 익힘책 6-1. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011g). 수학 지도서 4-1. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011h). 수학 지도서 5-2. 서울: 두산동아 ㈜

교육과학기술부 (2011i). 수학 지도서 6-1. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011j). 수학 지도서 6-2. 서울: ㈜ 천재교육

교육과학기술부 (2011k). 수학과 교육과정. 교육과학기술부고시 제 2011-361 호.

구미애 (1999). 초등 수학 교과의 혼합 연산을 적용하는 문제 만들기에서 나타나는 오류 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

김부미 (2006). 수학적 오 개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

김선옥 (2002). 초등학교 학생의 수학 오류 분석 및 교정을 통한 효과적인 교수·학습 지도 방안 : 초등학교 3-가 단계를 중심으로. 진주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

김수미 (2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. 학교수학, 5(2), 209-221.

김현주 (2006). 중학교 3학년 학생들의 도형 문장제 해결 과정에서 나타나는 오류 분석. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

박지연·박영희 (2012). 초등학교 5학년 학생들의 문제해결 과정의 타당성 검토 활동에 관한 사례연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 51(3), 265-280.

방정숙·김재화 (2006). 초등학교 6학년 학생들의 소수 계산 오류와 선행지식 간의 연결 관계 분석 및 지도방안 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 45(3), 275-294.

성창근·이광호 (2012). 비례 문제해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석. 수학교육학연구, 22(3), 331-352.

송순희·오정연 (1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 36(1), 11-22.

유익승·한인기 (2011). 대수식의 기하학적 해석을 통한 문제해결에 대한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(2), 451-472.

엄선영·권혁진 (2011). 학업성취도에 따른 초등학교 6학년 학생들의 비례 추론 능력 및 전략 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(3), 537-556.

이기석·이두호 (2010). 무리함수의 가역성에 대한 학생들의 오개념 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(30), 709-730.

이종희 (2002). 수학적 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 교과교육학연구, 6(2), 23-36.

전영배·노은환·최정숙·김대의·정의창·정찬식·김창수 (2009). 미분 문제해결 과정에서의 오류 분석. 한국학교수학회논문집, 12(4), 545-562.

전영배·노은환·김대의·정찬식·김창수·강정기·정상태 (2010). 미지수가 2개인 연립일차부등식의 문제해결 과정에서 발생하는 오류 분석 및 지도방안 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(3), 543-562.

정은실 (2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. 수학교육학연구, 13(3), 247-265.

주홍연·권혁진 (2012). 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 시각화의 구성 요소 및 활용에 관한 분석. 대한수학교육학회지, 14(1), 1-28.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 296-333. NY: Macmillan.

Clayton, G. A. Wilson, B, Scott, K. B. & Dorough, L. (1990). *Successful Mathematics Teaching for Middle-School*. Washington, D. C.: Office of educational Research and Improvement. ED 316-432.

Margaret S. Smith. & Mary Kay Stein. (2011). 5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions. 방정숙 역 (2013). 효과적인 수학적 논의를 위해 교사가 알아야 할 5가지 관행, 서울: 경문사.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School* Mathmetics. Reston, VA: Author.

Tirosh, D. (2000). Enhancing Prospective Teacher's Knowledge of Children's Conceptions: The Case of Division of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.

A Study on the Analysis and Correction of Error for the Gearwheel-involved Problem

Roh, Eun Hwan†
Department of Mathematics, Chinju National University of Education,
3, Jinnyangho-ro 369beon-gil, Jinju-si, Gyeongsangnam-do, 660-756, Korea.
E-mail : idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr

Jeong, Sang Tae
Sacheon Yongsan Elementary School, 223-31, Samsangro,
Sacheon-si, Gyeongsangnam-do, 664-170, Korea.
E-mail : sangtaejeong01@gmail.com

Kim, Min Jeong
Sacheon Jeongdong Elementary School, 25, Daegok 1-gil,
Jeongdong-myeon, Sacheon-si, Gyeongsangnam-do, 664-931, Korea.
E-mail : catchmin@hanmail.net

Recently a student's mathematical thinking and problem-solving skills are emphasized. Nevertheless, the students solved the problem associated with a given type of problem solving using mechanical algorithms. With this algorithm, It's hard to achieve the goal that are recently emphasized. Furthermore It may be formed error or misconception. However, consistent errors have positive aspects to identify of the current cognitive state of the learner and to provide information about the cause of the error. Thus, this study tried to analyze the error happening in the process of solving gearwheel-involved problem and to propose the correct teaching method. The result of student's error analysis, the student tends to solve the gear-wheel problem with proportional expression only. And the student did not check for the proportional expression whether they are right or wrong. This may be occurred by textbook and curriculum which suggests only best possible conditioned problems. This paper close with implications on the discussion and revision of the concepts presented in the curriculum and sequence related to the gearwheel-involved problem as well as methodological suggested of textbook.

* ZDM Classification : D7
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : Gearwheel-involved problem, Problem solving, Error analysis, Teaching method
† Corresponding author