

출력 제약된 Pure-Feedback 시스템의 적응 신경망 제어

Adaptive Neural Control for Output-Constrained Pure-Feedback Systems

김 봉 수, 유 성 진*

(Bong Su Kim¹ and Sung Jin Yoo^{1,*})

¹School of Electrical and Electronics Engineering, Chung-Ang University

Abstract: This paper investigates an adaptive approximation design problem for the tracking control of output-constrained non-affine pure-feedback systems. To satisfy the desired performance without constraint violation, we employ a barrier Lyapunov function which grows to infinity whenever its argument approaches some limits. The main difficulty in dealing with pure-feedback systems considering output constraints is that the system has a non-affine appearance of the constrained variable to be used as a virtual control. To overcome this difficulty, the implicit function theorem and mean value theorem are exploited to assert the existence of the desired virtual and actual controls. The function approximation technique based on adaptive neural networks is used to estimate the desired control inputs. It is shown that all signals in the closed-loop system are uniformly ultimately bounded.

Keywords: adaptive neural control, barrier lyapunov function, non-affine, pure-feedback systems

I. 서론

현실적인 시스템을 고려했을 때, 제약조건은 정지 전압 (stoppage), 포화도(saturation), 시스템의 사양 또는 성능 등을 나타낸다. 이러한 제약조건(constraint)을 만족시키지 못한다면, 결과가 기준에 미치지 못한 성능을 낼 뿐만 아니라 시스템 자체에 손상을 입히기도 한다. 이러한 현실적인 제약조건에 의해, 제약조건을 만족시키는 동시에 추종 성능까지 얻기 위한 방법의 일환으로 배리어 르아프노브 함수(BLF: Barriere Lyapunov Function)를 이용한 안정도 증명 방법이 제시되었다. BLF는 어떤 유한한 경계점에 다다르게 되면 무한대로 증가하는 르아프노브 함수를 지칭하고, 이는 폐루프(closed loop) 시스템에서 BLF가 유계되도록 제어 입력을 설계하여 결과적으로 상태변수가 주어진 제약조건에 위배되지 않도록 만든다. 현재 이에 관한 연구가 활발하게 이루어지고 있다[1-5]. 출력에만 제약조건이 존재하는 경우[1]와 모든 상태변수에 제약조건이 존재하는 경우[2]에 대한 연구가 진행되었고, 이를 기반으로 일부의 상태변수에만 제약조건이 존재하는 경우[3]에 대해서도 연구되었다. 출력의 제약조건에 추가적으로, 입력에도 제약조건이 붙은 시스템에 대한 제어 기법[4]과 전환 시스템(switched system)에서의 제어 기법[5]도 개발되었다. 그러나 이러한 연구들은 모두 strict-feedback 시스템에 한해서 진행되었고, pure-feedback 시스템에 대해서는 이루어지지 않고 있다.

Pure-feedback 시스템은 가상제어기로 이용되는 변수들이 비-어파인(nonaffine) 형태를 취하고 있기 때문에 strict-feedback 시스템보다 더 일반적인 형태의 시스템의 표현이 가능하다. 반면에 비-어파인 형태로 인해 적응 신경망 제어 방식을 이용하여 가상 제어기를 설계하고, 제어 입력을 안정화하는데 어려움이 따른다. 따라서 이상적인 제어기가 존재한다는 것을 증명하고 명백하게 드러내 보일 필요가 있다. 이를 위하여 음함수 정리(implicit function theorem)와 평균값 정리(mean value theorem)를 사용하여 이를 증명한다. 최근에는 pure-feedback 시스템에 적응 신경망 제어 기법을 사용한 연구결과[6,7]가 제시되었고, ISS (Input-to-State Stability)를 사용한 제어 기법[8]도 개발되었다. 그러나 이러한 연구는 비-어파인 형태의 출력변수에 제약조건이 있는 시스템에는 적용될 수 없다.

본 논문에서는 출력변수의 제약조건이 있는 시스템의 제어에 관한 연구를 pure-feedback 시스템으로 확장하고자 한다. 음함수 정리와 평균값 정리를 사용하여 이상적인 가상 제어기가 존재함을 확인하고, 신경망을 이용한 함수 예측 기법을 이용하여 설계된 가상 제어기를 추정한다. 결과적으로 시스템의 모든 신호가 유계되어 있음을 증명하고, 시뮬레이션을 통해 제안한 제어기의 성능을 검증한다.

II. 문제 제기

1. 시스템 모델

본 논문에서는 (1)과 같은 상태변수의 제약조건이 있는 pure-feedback 시스템을 다룬다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(\overline{x}_i(t), x_{i+1}(t)), 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(\overline{x}_n(t), u) \\ y(t) &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

* Corresponding Author

Manuscript received October 9, 2013 / revised November 16, 2013 / accepted November 18, 2013

김봉수, 유성진: 중앙대학교 전자전기공학부

(kbsu12@cau.ac.kr/sjyoo@cau.ac.kr)

* 이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업입(No. 2012R1A1A1001440).

여기서 $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$, $i = 1, \dots, n$, $u \in R$, 그리고 $y \in R$ 는 각각 시스템의 상태 변수들과 제어 입력, 출력을 나타내고, $f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})$ 와 $f_n(\bar{x}_n, u)$ 는 미지의 비선형 함수를 나타낸다. 상태변수 y 은 $|y| < k_c, \forall t \geq 0$ 와 같이 제약된다고 가정된다. 여기서 k_c 은 제약 유계를 나타내는 양수이다.

본 논문의 제어 목적은 미지의 비선형 함수를 가진 출력 변수에 제약조건이 있는 시스템 (1)의 출력 신호 y 가 기준 신호 y_r 을 추종하는 신경망 기반 적응 제어기를 설계하는 것이다.

가정 1: 양수인 모든 k_c 에 대해서, $|y_r| \leq A_0 < k_c$ 와 $|y_r^{(i)}| < Y_i, i = 1, \dots, n$ 을 만족하는 상수 $A_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 이 모든 $t \geq 0$ 에서 존재한다. 여기서 $y_d^{(i)}(t) = d^i y / dt^i$ 는 기준 신호의 시간 미분항이다.

(1)의 pure-feedback 시스템을 제어하는데 있어 다음의 정의를 이용한다.

$$g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})}{\partial x_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$g_n(\bar{x}_n, u) = \frac{\partial f_n(\bar{x}_n, u)}{\partial u}.$$

또한 편의를 위해 $u = x_{n+1}$ 라고 정의한다.

가정 2: $g_i(\cdot), i = 1, \dots, n$ 의 부호는 알려지고, 다음의 두 조건을 만족하는 $0 < g_{i0} \leq g_{i1} < \infty$ 인 상수 g_{i0}, g_{i1} 가 존재한다. (i) $|g_i(\bar{x}_i, x_{i+1})| > g_{i0}, i = 1, \dots, n, \forall (\bar{x}_i, x_{i+1}) \in R^i \times R$; (ii) $|g_i(\bar{x}_i, x_{i+1})| \leq g_{i1}, i = 1, \dots, n, \forall (\bar{x}_i, x_{i+1}) \in \Omega_{x_{i+1}}, \Omega_{x_{i+1}} \in R^{i+1}$ 는 콤팩트 집합(compact set)이다.

가정 3: $|\dot{g}_i(\cdot)| \leq g_{id}, \forall \bar{x}_n \in \Omega_{x_n} \subset R^n$ 을 만족하는 상수 $g_{id} > 0$ 이 존재한다.

보조정리 1: (평균값 정리) 함수 $f: R^n \rightarrow R$ 가 열린 집합 S 에서 연속적이고 미분 가능하며, 집합 S 안의 두 점 x, y 사이의 직선 구간을 $L(x, y) \subset S$ 이라 가정한다. 이 때, $L(x, y)$ 안에서 아래의 식을 만족하는 한 점 z 가 존재한다.

$$f(y) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=z} (y-x)$$

2. RBFNN 구조

본 논문에서는 radial 기저함수 신경망(RBFNN: Radial Basis Function Neural Networks)을 이용하여 연속인 함수 $\Xi(\nu): R^q \rightarrow R$ 를 (2)와 같이 추정하였다.

$$\Xi_{NN}(\nu) = W^T \Phi(\nu) \quad (2)$$

여기서 입력 벡터는 $\nu \in \Omega_\nu \subset R^q$, 가중치 벡터는 $W = [w_1, w_2, \dots, w_l]^T \in R^l$ 그리고 $l > 1$ 은 신경망 구조의 노드 수를 나타낸다. 기저함수는 $\Phi(\nu) = [\psi_1(\nu), \dots, \psi_l(\nu)]^T$

과 같이 나타내어 질 수 있고, 이 때의 $\psi_i(\nu)$ 는 (3)과 같은 일반적인 가우시안 함수의 형태를 가진다.

$$\psi_i(\nu) = \exp \left[\frac{-(\nu - \mu_i)^T (\nu - \mu_i)}{\eta^2} \right], \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (3)$$

여기서 $\mu_i = [\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{iq}]^T$ 는 평균을 뜻하며, η 는 가우시안 함수의 너비를 나타낸다.

범용 근사화 성질(universal approximation property)을 이용하면, $\Omega_\nu \subset R^q$ 의 콤팩트 집합 내부에서 임의의 연속인 함수 $\Xi(\nu)$ 는 (4)와 같이 근사화가 가능하다.

$$\Xi(\nu) = W^* T \Phi(\nu) + \epsilon, \quad \forall \nu \in \Omega_\nu \quad (4)$$

이때의 W^* 는 이상적인 가중치 벡터이고, ϵ 은 $\forall \nu \in \Omega_\nu$ 영역에서 $|\epsilon| \leq \epsilon^*$ 의 조건을 만족시키는 근사화 오차이다. 여기서 ϵ^* 는 양의 상수이다.

III. 적응 신경망 시스템

1. 제어기 설계

본 논문에서는 backstepping 기법[9-11]에 기반을 두어 제어기를 설계한다. 제어기 설계를 위해 다음과 같은 좌표 변환 식을 이용한다.

$$z_1 = y - y_r$$

$$z_i = x_i - \alpha_{i-1}$$

여기서 $i = 2, \dots, n$ 이고 α_{i-1} 는 각각의 설계 단계에서 설계될 가상 제어기이다. 제안된 제어 시스템의 설계과정은 n 단계로 구성된다. 각 단계에서 가상 제어기가 설계되고 마지막 n 단계에서 실제 제어기 u 가 설계된다.

단계 1: $z_1 = y - y_r$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, x_2) - \dot{y}_r \quad (5)$$

가정 2로부터, $\partial f_1(x_1, x_2) / \partial x_2 > g_{10} > 0, \forall (x_1, x_2) \in R^2$ 임을 알 수 있다. 그리고 $h_1 = -\dot{y}_r$ 이라고 정의하면, h_1 은 y_r 에 대한 함수이기 때문에 $\partial h_1 / \partial x_2 = 0$ 이라는 결과를 얻어낼 수 있다. 따라서 $\partial [f_1(x_1, x_2) + h_1] / \partial x_2 > g_{10} > 0$ 이므로, x_2 를 가상 입력으로 생각하면, $f_1(x_1, \alpha_1^*) + h_1 = 0$ 이 되도록 만드는 이상적인 제어 입력 $x_2 = \alpha_1^*(x_1, h_1)$ 이 존재한다.

평균값 정리를 이용하면, (6)과 같은 관계를 가지는 $0 < \lambda_1 < 1$ 이 존재함을 알 수 있다.

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, \alpha_1^*) + g_{\lambda_1} (x_2 - \alpha_1^*) \quad (6)$$

여기서 $g_{\lambda_1} = g_1(x_1, x_{\lambda_1}); x_{\lambda_1} = \lambda_1 x_2 + (1 - \lambda_1) \alpha_1^*$ 이고 가정 2는 g_{λ_1} 에 대해서도 유효하다[6].

(5)에 (6)를 대입하면 (7)이 된다.

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, x_2) + h_1 = g_{\lambda_1} (x_2 - \alpha_1^*) \quad (7)$$

$\alpha_1^*(x_1, v_1)$ 을 근사하기 위해 RBFNN을 적용하면 (8)과 같다.

$$\alpha_1^* = W_1^{*T} \Phi_1(\nu_1) + \epsilon_1 \quad (8)$$

여기서 $\nu_1 = [x_1, y_r]^T \in \Omega_{\nu_1} \subset R^2$.

첫 번째 가상제어기를 (9)와 같이 제안한다.

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 + \widehat{W}_1^T \Phi_1(\nu_1) - d_1 \frac{z_1}{k_b^2 - z_1^2} \quad (9)$$

여기서 $c_1, d_1 > 0$ 는 설계상수들이고 k_b 는 오차의 유계를 나타내며 $k_c > A_0 + k_b$ 의 조건을 만족하는 양수이다. \widehat{W}_1 는 W_1^* 의 예측치이고 (10)의 적응 법칙으로 학습된다.

$$\dot{\widehat{W}}_1 = -\Gamma_1 \frac{z_1}{k_b^2 - z_1^2} \Phi_1 - \sigma_1 \Gamma_1 \widehat{W}_1 \quad (10)$$

여기서 $\Gamma_1 > 0$ 은 학습 이득이고 $\sigma_1 > 0$ 은 σ -modification을 위한 매개변수이다.

첫 번째 르아프노브 함수를 (11)와 같이 정의하자.

$$V_1 = \frac{1}{2} \log \frac{k_b^2}{z_1^2 - k_b^2} + \frac{g_{\lambda_1}}{2} \widehat{W}_1^T \Gamma_1^{-1} \widehat{W}_1 \quad (11)$$

여기서 $\widehat{W}_1 = \widehat{W}_1 - W_1^*$ 이고, \log 는 자연 로그 (natural logarithm)를 의미한다.

(7)-(10)을 이용하면 V_1 의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\frac{c_1 g_{\lambda_1} z_1^2}{k_b^2 - z_1^2} + \frac{g_{\lambda_1} z_1 z_2}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{g_{\lambda_1} z_1 \epsilon_1}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{d_1 g_{\lambda_1} z_1^2}{(k_b^2 - z_1^2)^2} \\ & + \frac{g_{\lambda_1}}{2} \widehat{W}_1^T \Gamma_1^{-1} \widehat{W}_1 - g_{\lambda_1} \sigma_1 \widehat{W}_1^T \widehat{W}_1. \end{aligned} \quad (12)$$

단계 2: 두 번째 오차의 $z_2 = x_2 - \alpha_1$ 의 도함수는 (13)과 같다.

$$\dot{z}_2 = f_2(\overline{x}_2, x_3) - \dot{\alpha}_1 \quad (13)$$

단계 1과 유사하게 정리하면, 평균값 정리에 의해, (14)를 만족하는 $0 < \lambda_2 < 1$ 가 존재한다.

$$f_2(\overline{x}_2, x_3) = f_2(\overline{x}_2, \alpha_2^*) + g_{\lambda_2} (x_3 - \alpha_2^*) \quad (14)$$

여기서 $g_{\lambda_2} = g_2(\overline{x}_2, x_{\lambda_2})$; $x_{\lambda_2} = \lambda_2 x_3 + (1 - \lambda_2) \alpha_2^*$ 이다.

결과적으로, (15)와 같다.

$$\dot{z}_2 = g_{\lambda_2} (x_3 - \alpha_2^*) \quad (15)$$

두 번째 가상 제어기를 (16)과 같이 정의하자.

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 + \widehat{W}_2^T \Phi_2(\nu_2) \quad (16)$$

여기서 $c_2 > 0$ 는 설계상수이고 \widehat{W}_2 는 W_2^* 의 예측치이고 (17)의 적응 법칙으로 학습된다.

$$\dot{\widehat{W}}_2 = -\Gamma_2 \Phi_2 z_2 - \sigma_2 \Gamma_2 \widehat{W}_2 \quad (17)$$

여기서 $\Gamma_2 > 0$ 와 $\sigma_2 > 0$ 는 설계 상수이다.

두 번째 르아프노브 함수를 (18)과 같이 정의하고,

$$V_2 = \frac{1}{2g_{\lambda_2}} z_2^2 + \frac{1}{2} \widehat{W}_2^T \Gamma_2^{-1} \widehat{W}_2, \quad (18)$$

여기서 $\widehat{W}_2 = \widehat{W}_2 - W_2^*$.

(15)에 의한 V_2 의 도함수는 (19)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{g_{\lambda_1} z_1 z_2}{k_b^2 - z_1^2} + z_2 (x_3 - \alpha_2^* + \frac{g_{\lambda_1} z_1}{k_b^2 - z_1^2}) - \frac{g_{\lambda_2}}{2g_{\lambda_2}} z_2^2 \\ & + \widehat{W}_2^T \Gamma_2^{-1} \widehat{W}_2 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 $\alpha_2^* - \frac{g_{\lambda_1} z_1}{k_b^2 - z_1^2}$ 를 근사하기 위해 RBFNN을 적용하면

(20)과 같다.

$$\alpha_2^* - \frac{g_{\lambda_1} z_1}{k_b^2 - z_1^2} = W_2^{*T} \Phi_2(\nu_2) + \epsilon_2 \quad (20)$$

여기서 $\nu_2 = [\overline{x}_2, \partial \alpha_1 / \partial x_1, \phi_1]^T$; $\phi_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \widehat{W}_1} \dot{\widehat{W}}_1$ 이다.

이 때, (19)에 (16), (17), (20)을 대입하면, (21)와 같다.

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{g_{\lambda_1} z_1 z_2}{k_b^2 - z_1^2} - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 - \epsilon_2 z_2 - \frac{g_{\lambda_2}}{2g_{\lambda_2}} z_2^2 - \sigma_2 \widehat{W}_2^T \widehat{W}_2 \quad (21)$$

단계 i ($3 \leq i \leq n-1$): $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$ 의 도함수는 $\dot{z}_i = f_i(\overline{x}_i, x_{i+1}) - \dot{\alpha}_{i-1}$ 이다. $h_i = -\dot{\alpha}_{i-1}$ 라고 정의하면, $\partial h_i / \partial x_{i+1} = 0$ 이고 $\partial [f_i(\overline{x}_i, x_{i+1}) + h_i] / \partial x_{i+1} > g_{i0} > 0$ 이므로, $f_i(\overline{x}_i, \alpha_i^*) + h_i = 0$ 를 만족하는 $x_{i+1} = \alpha_i^*(\overline{x}_i, h_i)$ 가 존재한다.

평균값 정리에 의해, 함수 $f_i(\cdot)$ 는 (22)로 정의된다.

$$f_i(\overline{x}_i, x_{i+1}) = f_i(\overline{x}_i, \alpha_i^*) + g_{\lambda_i} (x_{i+1} - \alpha_i^*) \quad (22)$$

여기서 $g_{\lambda_i} = g_i(\overline{x}_i, x_{\lambda_i})$; $x_{\lambda_i} = \lambda_i x_{i+1} + (1 - \lambda_i) \alpha_i^*$ 이다. 따라서 $\dot{z}_i = g_{\lambda_i} (x_{i+1} - \alpha_i^*)$ 이다. α_i^* 을 근사하기 위해 RBFNN을 적용하면, (23)과 같다.

$$\alpha_i^* = W_i^{*T} \Phi_i(\nu_i) + \epsilon_i \quad (23)$$

여기서 $\nu_i = [\overline{x}_2, \partial \alpha_{i-1} / \partial x_1, \dots, \partial \alpha_{i-1} / \partial x_{i-1}, \phi_{i-1}]^T$; Ω_i

$\subset R^{2i}$, $\phi_{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k)}} y_r^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \widehat{W}_k} \dot{\widehat{W}}_k$ 이다.

i 번째 가상 제어기를 (24)와 같이 제안한다.

$$\alpha_i = -c_i z_i + \widehat{W}_i^T \Phi_i(\nu_i) - z_{i-1} \quad (24)$$

여기서 $c_i > 0$ 는 설계상수이고 \widehat{W}_i 는 W_i^* 의 예측치이고 (25)의 적응 법칙으로 학습된다.

$$\dot{\widehat{W}}_i = -\Gamma_i \Phi_i z_i - \sigma_i \Gamma_i \widehat{W}_i \quad (25)$$

여기서 $\Gamma_i > 0$ 와 $\sigma_i > 0$ 는 설계 상수이다.

i 번째 르야프노브 함수는 (26)와 같이 정의하자.

$$V_i = \frac{1}{2g_{\lambda_i}} z_i^2 + \frac{1}{2} \widehat{W}_i^T \Gamma_i^{-1} \widehat{W}_i \quad (26)$$

여기서 $\widetilde{W}_i = \widehat{W}_i - W_i^*$.

(23)-(25)에 의한 V_i 의 도함수는 (27)과 같다.

$$\dot{V}_i \leq z_i z_{i+1} - z_i z_{i-1} - c_i z_i^2 - \epsilon_i z_i - \frac{g_{\lambda_i}}{2g_{\lambda_i}^2} z_i^2 - \sigma_i \widehat{W}_i^T \widehat{W}_i \quad (27)$$

단계 n : z_n 의 도함수는 $\dot{z}_n = f_n(\bar{x}_n, u) - \alpha_{n-1}$ 이다. 평균값 정리에 의해 함수 $f_n(\cdot)$ 는 (28)로 정의된다.

$$f_n(\bar{x}_n, u) = f_n(\bar{x}_n, u^*) + g_{\lambda_n}(u - u^*) \quad (28)$$

여기서 $g_{\lambda_n} = g_n(\bar{x}_n, x_{\lambda_n})$; $x_{\lambda_n} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n) u^*$ 이다.

따라서 $\dot{z}_n = g_{\lambda_n}(u - u^*)$ 이고 u^* 을 근사하기 위해 RBFNN을 적용하면, (29)와 같다.

$$u^* = W_n^{*T} \Phi_n(\nu_n) + \epsilon_n \quad (29)$$

여기서 $\nu_n = [\bar{x}_n, \partial \alpha_{n-1} / \partial x_1, \dots, \partial \alpha_{n-1} / \partial x_{n-1}, \phi_{n-1}]^T$;

$\phi_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(k)}} y_r^{(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \widehat{W}_k} \widehat{W}_k$ 이다.

실제 제어기 u 를 (30)과 같이 제안한다.

$$u = -c_n z_n + \widehat{W}_n^T \Phi_n(\nu_n) - z_{n-1} \quad (30)$$

여기서 $c_n > 0$ 는 설계상수이고 \widehat{W}_n 는 W_n^* 의 예측치이고 (31)의 적응 법칙으로 학습된다.

$$\dot{\widehat{W}}_n = -\Gamma_n \Phi_n z_n - \sigma_n \Gamma_n \widehat{W}_n \quad (31)$$

여기서 $\Gamma_n > 0$ 와 $\sigma_n > 0$ 는 설계 상수이다.

n 번째 르야프노브 함수를 (32)과 같이 정의하자.

$$V_n = \frac{1}{2g_{\lambda_n}} z_n^2 + \frac{1}{2} \widehat{W}_n^T \Gamma_n^{-1} \widehat{W}_n \quad (32)$$

여기서 $\widetilde{W}_n = \widehat{W}_n - W_n^*$. (28)-(31)에 의한 V_n 의 도함수는 (33)와 같다

$$\dot{V}_n \leq -z_n z_{n-1} - c_n z_n^2 - \epsilon_n z_n - \frac{g_{\lambda_n}}{2g_{\lambda_n}^2} z_n^2 - \sigma_n \widehat{W}_n^T \widehat{W}_n \quad (33)$$

정리 1: 출력 제약조건을 가지는 pure-feedback 시스템 (1), 제안한 적응 신경망 제어기 (9), (16), (24), (30) 그리고 학습 법칙 (10), (17), (25), (31)로 구성된 전체 폐루프 시스템을 고려하자. 그리고 모든 $t \geq 0$ 에 대해서 $\nu_i \in \Omega_i \subset \mathcal{R}^i$, $i = 1, \dots, n$ 인 콤팩트 집합이 존재한다고 가정한다. 이

때, 전체적인 시스템의 신호들이 균일하고 궁극적으로 유계 되도록 하는 설계 매개변수들이 존재하고, 이 매개변수들을 적당히 조절함에 따라 출력신호의 추종 오차는 충분히 줄어든다.

증명: 제어된 폐루프 시스템의 안정도를 증명하기 위해

르야프노브 함수 $V = \sum_{k=1}^n V_k$ 로 정의하자. 그때,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{c_1 g_{\lambda_1} z_1^2}{k_b^2 - z_1^2} + \frac{g_{\lambda_1} z_1 z_2}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{g_{\lambda_1} z_1 \epsilon_1}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{d_1 g_{\lambda_1} z_1^2}{(k_b^2 - z_1^2)^2} \\ & + \frac{g_{\lambda_1}}{2} \widehat{W}_1^T \Gamma_1^{-1} \widehat{W}_1 - g_{\lambda_1} \sigma_1 \widehat{W}_1^T \widehat{W}_1 \\ & - \sum_{k=2}^n c_k z_k^2 - \sum_{k=2}^n \epsilon_k z_k - \sum_{k=2}^n \frac{g_{\lambda_k}}{2g_{\lambda_k}^2} z_k^2 \\ & - \sum_{k=2}^n \sigma_k \widehat{W}_k^T \widehat{W}_k \end{aligned}$$

영의 부등식(Young's inequality)을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -\frac{g_{\lambda_1} z_1 \epsilon_1}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{d_1 g_{\lambda_1} z_1^2}{(k_b^2 - z_1^2)^2} \leq \frac{g_{11}}{2} \epsilon_1^{*2} + \left(\frac{g_{11}}{2} - d_1 g_{10}\right) \frac{z_1^2}{(k_b^2 - z_1^2)^2} \\ & -g_{\lambda_1} \sigma_1 \widehat{W}_1^T \widehat{W}_1 \leq -\frac{g_{10} \sigma_1 \|\widehat{W}_1\|^2}{2} + \frac{g_{11} \sigma_1 \|W_1^*\|^2}{2} \\ & -\epsilon_k z_k \leq \frac{\epsilon_k^{*2}}{2} + \frac{z_k^2}{2} \\ & -\sigma_k \widehat{W}_k^T \widehat{W}_k \leq -\frac{\sigma_k \|\widehat{W}_k\|^2}{2} + \frac{\sigma_k \|W_k^*\|^2}{2} \end{aligned}$$

위의 부등식과 $-\frac{g_{\lambda_k}}{2g_{\lambda_k}^2} z_k^2 \leq \frac{g_{kd}}{2g_{k0}^2} z_k^2$ 을 이용하고 $d_1 = \frac{g_{11}}{2g_{10}}$

을 정의하면 V 의 도함수는 (34)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{c_1 g_{10} z_1^2}{k_b^2 - z_1^2} - \frac{g_{10} \sigma_1 \|\widehat{W}_1\|^2}{2} + \frac{g_{1d}}{2} \|\Gamma_1^{-1}\| \|\widehat{W}_1\|^2 \\ & + \frac{g_{11}}{2} \epsilon_1^{*2} + \frac{g_{11} \sigma_1 \|W_1^*\|^2}{2} \\ & - \sum_{k=2}^n c_k z_k^2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{z_k^2}{2} + \frac{g_{kd}}{2g_{k0}^2} z_k^2\right) \\ & - \sum_{k=2}^n \frac{\sigma_k \|\widehat{W}_k\|^2}{2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\sigma_k \|W_k^*\|^2}{2} + \frac{\epsilon_k^{*2}}{2}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

과 같이 정리된다.

V 의 도함수에서 사용되는 매개변수를 다음과 같이 선정한다.

$$c_1 = \frac{\xi_1}{g_{10}}, c_k = \frac{1}{2} + \frac{g_{kd}}{2g_{k0}^2} + \frac{\xi_k}{g_{k0}}, \sigma_1 = \frac{1}{g_{10}}(g_{1d} \|\Gamma_1^{-1}\| + g_{11} \eta)$$

여기서 $\xi_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $\eta > 0$ 는 상수이다.

매개변수들을 (34)에 대입하면 (35)과 같다.

$$\dot{V} \leq -\beta V + \delta \quad (35)$$

여기서

$$\beta = \min[2\xi_1, \dots, 2\xi_n, \eta\lambda_{\min}(\Gamma_1), \sigma_2\lambda_{\min}(\Gamma_2), \dots, \sigma_n\lambda_{\min}(\Gamma_n)]$$

$$\delta = \frac{g_{11}\sigma_1\|W_1^*\|^2}{2} + \frac{g_{11}\epsilon_1^{*2}}{2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{\sigma_k\|W_k^*\|^2}{2} + \frac{\epsilon_k^{*2}}{2} \right).$$

$\rho := \delta/\beta > 0$ 을 정의하면, (35)는

$$0 \leq V(t) < \rho + (V(0) - \rho)e^{-\beta t}, \forall t \geq 0$$

를 만족하므로, 시간이 지남에 따라 z_i 와 \widehat{W}_i 가 궁극적으로 균일하게 유계된다(UUB: Uniformly Ultimately Bounded). 또한 설계 변수들 β 을 조절함에 따라 추종 오차는 임의적으로 작아질 수 있다.

IV. 모의 실험

제안된 제어기의 성능을 검증하기 위해 다음과 같은 pure-feedback 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1^3 - x_1}{x_1 + x_1^4} + x_2 + \frac{1}{2} \sin x_2$$

$$\dot{x}_2 = e^{-x_2^2} \sin x_2 + u + \frac{2}{5} \sin u$$

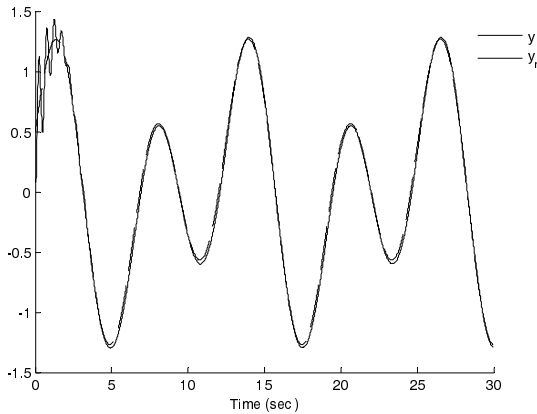


그림 1. 추종 제어 결과 (실선: y , 점선: y_r).
Fig. 1. Tracking result.

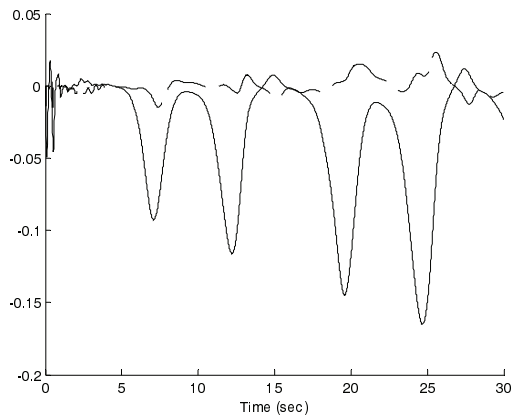
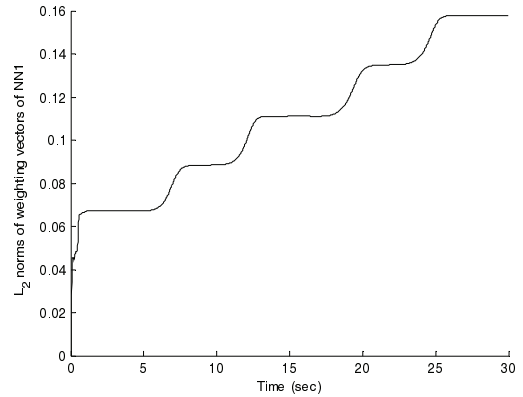


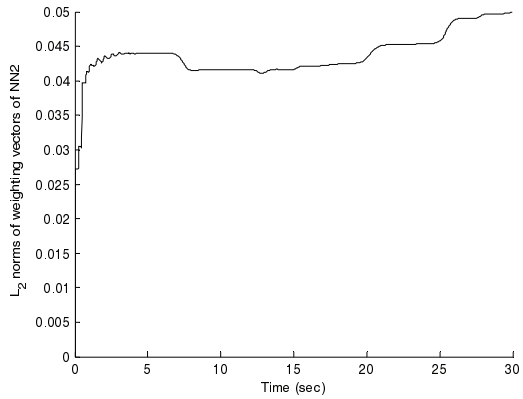
그림 2. RBFNN의 출력 (실선: $\widehat{W}_1^T \Phi_1$, 점선: $\widehat{W}_2^T \Phi_2$).
Fig. 2. Output of RBFNN.

상태변수들의 초기조건은 $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0$ 이고 상태변수 x_1 의 제약조건은 $k_c = 2$ 다. 제안한 제어 시스템을 위한 매개변수는 $c_1 = 10, c_2 = 7, k_b = 0.49, d_1 = 1.5, \sigma_i = 0.01, \Gamma_i = 0.0005 (i = 1, 2)$ 를 사용한다. 또한 기준신호 y_r 은 $y_r = 0.9 \sin(t) + 0.5 \cos(t/2)$ 로 주어진다.

그림 1의 결과로부터 본 논문에서 제안한 시스템이 기준신호를 잘 추종한다는 것을 보여준다. 그림 2는 RBFNN의 출력을 나타낸다. 그림 3에서는 신경망 제어에서 가중치의



(a) $\|\widehat{W}_1\|$.



(b) $\|\widehat{W}_2\|$.

그림 3. 가중치의 크기.

Fig. 3. L_2 norm of weighting vectors of RBFNN.

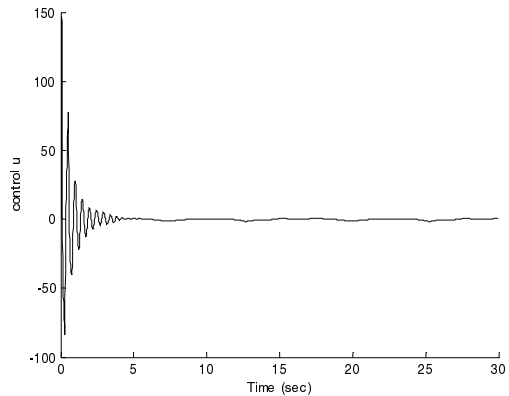


그림 4. 제어 입력 u .
Fig. 4. Control input.

L2 크기를 보여주며, 유계되어 있음을 확인 할 수 있다. 그림 4는 시스템의 제어 입력을 나타낸다.

V. 결론

본 논문에서는 출력변수에 제약조건을 가진 pure-feedback 시스템의 적응 신경망 제어 기법을 제안하였다. 출력변수의 제약조건을 만족시키기 위하여 BLF를 이용하였고, 이 과정에서 발생한 비선형 함수와 시스템의 비선형 함수를 적응 신경망 제어 기법을 이용하여 근사화하였다. 라이프노브 안정도 증명에 기반을 둔 제안된 제어기를 설계함으로써 시스템의 모든 신호들이 유계됨을 확인하였다. 마지막으로 본 논문에서 제안한 시스템의 성능 검증을 위해 모의실험을 수행하였다.

REFERENCES

- [1] K. P. Tee, S. S. Ge, and E. H. Tay, "Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems," *Automatica*, vol. 45, no. 4, pp. 918-927, Apr. 2009.
- [2] K. P. Tee and S. S. Gee, "Control of nonlinear systems with full state constraint using a barrier Lyapunov function," in *Proc. of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference*, pp. 8618-8623, Dec. 2009.
- [3] K. P. Tee and S. S. Gee, "Control of nonlinear systems with partial state constraints using a barrier Lyapunov function," *International Journal of Control*, vol. 84, no. 12, pp. 2008-2023, Dec. 2011.
- [4] Y. M. Li, T. S. Li, and X. J. Jing, "Indirect adaptive fuzzy control for input and output constrained nonlinear systems using a barrier Lyapunov function," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, DOI: 10.1002/acs.2410, 2013.
- [5] B. Niu and J. Zhao, "Tracking control for output-constrained nonlinear switched systems with a barrier Lyapunov function," *International Journal of Systems Science*, vol. 44, no. 5, pp. 978-985, May 2013.
- [6] S. S. Ge and C. Wang, "Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 38, pp. 671-682, 2002.
- [7] D. Wang and J. Huang, "Adaptive neural network control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form," *Automatica*, vol. 38, pp. 1365-1372, Jan. 2002.
- [8] C. Wang, D. J. Hill, S. S. Gee, and G. Chen, "An ISS-modular approach for adaptive neural control of pure-feedback systems," *Automatica*, vol. 42, pp. 723-731, May 2006.
- [9] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic, *Nonlinear and Adaptive Control Design*, Hoboken, NJ: Wiley, 1995.
- [10] J. H. Shin, "Robust adaptive fuzzy backstepping control for trajectory tracking of an electrically driven non-holonomic mobile robot with uncertainties" *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 10, pp. 902-911, 2012.
- [11] J. Y. Choi, "Exponential stability of predictor feedback for discrete-time linear systems with input delays," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 19, no. 7, pp. 583-586, 2013.



김 봉 수

2013년 중앙대학교 전기전자공학과 학사. 2013년~현재 동 대학원 석사 과정. 관심 분야는 비선형 적응 제어 및 지능 제어 이론.



유 성 진

2003년 연세대학교 전기전자공학과 학사. 2005년 동 대학원 석사. 2009년 동 대학원 대학원 박사. 2009년~2010년 미국 UIUC 박사 후 연구원. 2011년~현재 중앙대 전자전기공학부 조교수. 관심 분야는 비선형 적응 제어, 분산 적응 제어, 및 지능 제어 이론. 시간 지연 시스템, 대규모 시스템, 로봇 시스템.