

이산 시변 상태공간 모델을 위한 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기

An Optimal Fixed-lag FIR Smoother for Discrete Time-varying State Space Models

권보규*, 한수희
(Bo-Kyu Kwon^{1,*} and Soohye Han²)

¹The Department of Control and Instrumentation Engineering, Kangwon National University

²The Department of Electrical Engineering, Konkuk University

Abstract: In this paper, we propose an optimal fixed-lag FIR (Finite-Impulse-Response) smoother for a class of discrete time-varying state-space signal models. The proposed fixed-lag FIR smoother is linear with respect to inputs and outputs on the recent finite horizon and estimates the delayed state so that the variance of the estimation error is minimized with the unbiased constraint. Since the proposed smoother is derived with system inputs, it can be adapted to feedback control system. Additionally, the proposed smoother can give more general solution than the optimal FIR filter, because it reduced to the optimal FIR filter by setting the fixed-lag size as zero. A numerical example is presented to illustrate the performance of the proposed smoother by comparing with an optimal FIR filter and a conventional fixed-lag Kalman smoother.

Keywords: optimal state estimation, FIR (Finite Impulse Response), time-varying system, fixed-lag smoother, minimum variance, unbiased estimation

I. 서론

상태 추정의 실질적인 적용에 있어 고정 시간 지연 평활기 (fixed-lag smoother)는 필터(filter)의 성능을 개선하기 위하여 많이 사용되어 왔다. 특히 고정 시간 지연 평활 문제에서 고정 시간 지연 파라미터를 영으로 설정하면 필터링(filtering) 문제로 축소되기 때문에 필터링 문제의 확장 개념으로도 많이 연구되고 있다. 이러한 고정 시간 지연 평활기의 구조는 필터와 동일하게 무한 임펄스 응답(IIR: Infinite Impulse Response) 구조와 유한 임펄스 응답(FIR: Finite Impulse Response) 구조로 나눌 수 있다. 최근 많은 분야에서 응용되고 있는 칼만 필터나 고정 시간 지연 칼만 평활기는 IIR 구조의 대표적인 예로, 시스템이나 잡음의 정보가 정확하고 이들을 모두 알고 있는 경우 최적의 성능을 보장한다. 하지만 이러한 IIR 구조의 추정기들은 시스템이나 잡음 정보에 불확실성이 존재하거나 계산 오차가 발생하는 경우 초기시간부터 정보를 계속 누적적으로 사용하는 IIR 구조로 인해 추정 성능이 저하되거나 심지어 추정 오차가 발산하는 문제도 발생할 수 있다[1]. IIR 구조를 유지하며 발산 문제를 해결하기 위해 최근 측정 정보에 많은 가중치를 부여하는 지수 가중 칼만 필터나 평활기가 제안되었지만, 이 결과들은 지수 가중의 적용으로 인해 발생하는 최적성의 결여 문제를 가지고 있었다. 따라서 추정 오차의 발산 문제의 해결과 최적성 보장을 위해 FIR 구조의 추정기들이 제안되었다[2-11]. 제안된 FIR

구조의 추정기들은 최근의 유한한 입력과 출력 정보만을 사용하여 유한입출력 안정도가 보장되었으며, 시스템 불확실성이나 계산 오차 등에 강인성을 가지는 것도 입증되었다[4,6]. 또한, 제안된 FIR 추정기들은 다양한 성능지수를 최적으로 만족시키도록 설계되어 최근 유한 구간의 정보에 대해 최적성이 보장되도록 설계되었다.

이러한 FIR 구조의 추정기에 대한 연구들 중, 고정 시간 지연 평활기에 대한 연구도 다양하게 이루어져 왔다[5-10]. [5]의 연구에서는 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기가 선형 시불변 시스템에 대해 추정오차의 공분산을 최소화하도록 설계되었다. 제안된 평활기는 최근의 유한한 정보만을 사용하여 IIR 구조에서 발생할 수 있는 성능 저하나 발산 문제에 대한 안정성과 최적성을 보장하였다. 하지만 제안된 최적 고정 시간 지연 평활기의 설계 시 초기 상태의 공분산을 무한대로 가정하여 유도하여 최적성에 대한 명료성이 결여되었으며, 시스템 행렬의 역행렬을 사용하도록 설계되어 시스템 행렬이 특이행렬인 경우 적용할 수 없는 문제가 존재하였다. 이러한 단점을 극복하기 위해 초기 조건에 대한 어떠한 가정도 필요하지 않고 시스템 행렬의 역행렬을 사용하지 않는 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기들이 최소 분산, H_{∞} 최대 우도, 그리고 최소최대 등의 다양한 성능지수를 만족하도록 설계되었다[6-9]. 하지만, 이상의 연구 결과들은 선형 시불변 시스템에 대한 것으로 실질적인 응용에서 많이 나타나는 선형 시변 시스템에 대한 연구는 많지 않았다. 선형 시변 시스템에 대해서는 [10]에서 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기가 제안되었으나 이 연구에서도 무한대 값을 가지는 초기상태에 대한 가정과 시스템 행렬의 역행렬을 사용하는 설계의 문제가

* Corresponding Author

Manuscript received July 24, 2013 / revised October 21, 2013 / accepted October 28, 2013

권보규: 강원대학교 공학대학 제어계측공학과(bkkwon@kangwon.ac.kr)
한수희: 건국대학교 공과대학 전기공학과(shhan@konkuk.ac.kr)

존재하였다. 이 문제에 대해 비록 필터의 결과이지만 선형 시변 시스템에 대해 어떠한 상태 조건의 가정을 사용하지 않고 시스템 행렬이 특이행렬인 경우에도 적용할 수 있는 최적 FIR 필터가 최근 [11]에서 제안되었다. 하지만 제안된 최적 FIR 필터는 시스템의 입력을 고려하지 않고 설계되어 피드백 제어 시스템으로의 적용을 할 수 없었다. 또한, 이러한 필터의 설계는 평활기 설계 문제로 확장할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대한 최적 FIR 필터 문제를 평활기 문제로 확장하고 입력을 고려한 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기를 제안하고자 한다. 제안하는 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기는 최근 시스템의 입출력 정보의 선형 조합으로 나타나며, 최소 분산 성능지수와 비편향 조건을 만족하도록 설계된다. 또한, 비편향 조건으로부터 어떠한 초기 상태에 대해서도 영향을 받지 않지 않도록 설계되며, 시스템 행렬의 역행렬이 설계과정에서 사용되지 않는다. 제안하는 평활기는 시스템 입력을 고려하여 설계되기 때문에 피드백 제어 시스템에 적용이 가능하며, 고정 지연 시간을 영으로 두어 최적 FIR 필터로 축소되기 때문에 기존의 어떠한 최적 FIR 추정기들 보다 일반적인 해를 제공한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II 장에서는 이산 선형 시변 시스템에 대해 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기가 제안되고, III 장에서는 고정 시간 지연 칼만 평활기, 그리고 최적 FIR 필터와의 비교 모의 실험을 통해 제안된 평활기의 우수성을 입증한다. 마지막으로 IV 장에서 본 논문의 결론을 제시한다.

II. 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기

먼저 다음과 같이 상태방정식 및 출력방정식으로 표현되는 이산 시변 선형 상태 공간 모델에 대해 고려해 보자.

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k \omega_k \quad (1)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (2)$$

여기서, $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $y_k \in \mathfrak{R}^q$, $u_k \in \mathfrak{R}^p$ 는 각각 시스템의 상태변수와 출력, 그리고 입력 벡터이다. (A_k, C_k) 는 가관측성을 가지며, 초기시간 k_0 의 상태인 x_{k_0} 는 \bar{x}_{k_0} 를 평균으로하고 P_{k_0} 를 분산으로 갖는 랜덤 변수로 가정한다. 시스템 잡음 $w_k \in \mathfrak{R}^p$ 와 측정잡음 $v_k \in \mathfrak{R}^q$ 는 모두 영-평균을 가지는 백색 가우시안 잡음으로 상호 연관이 없으며, 두 잡음 모두 초기상태 x_{k_0} 와도 연관이 없다고 가정한다. 또한, w_k 와 v_k 의 분산은 각각 $Q_k \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ 와 $R_k \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ 로 모두 양한정 행렬로 가정한다.

제안하는 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기는 상태공간 모델 (1)과 (2)에 대해 최근 유한 구간의 입력과 출력의 선형 조합의 구조를 가지고, 추정오차의 공분산을 최소화시키며, 비편향 조건이 만족되도록 설계된다. 따라서 평활기의 유도를 위해 먼저 최근 입출력 정보와 추정 상태의 관계를 알아야 한다. 이를 위해 시간 $k-h$ 에서 추정할 상태인 x_{k-h} 를 최근 유한구간 $[k-N, k]$ 의 정보를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{k-h} &= A_{k-h-1} x_{k-h-1} + B_{k-h-1} u_{k-h-1} + G_{k-h-1} \omega_{k-h-1} \\ &= A_{k-h-1} A_{k-h-2} x_{k-h-2} + A_{k-h-1} B_{k-h-2} u_{k-h-2} \\ &\quad + A_{k-h-1} G_{k-h-2} \omega_{k-h-2} + B_{k-h-1} u_{k-h-1} \\ &\quad + G_{k-h-1} \omega_{k-h-1} \\ &= \dots \\ &= \Phi_{k-h-1, k-N} x_{k-N} + N_{k-1} U_{k-1} + M_{k-1} W_{k-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 h 는 고정 시간 지연이며, $\Phi_{i,j}$, N_{k-1} , M_{k-1} , U_{k-1} , 그리고 W_{k-1} 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\Phi_{i,j} = A_i A_{i-1} \dots A_{j+1} A_j \quad (i \geq j) \quad (4)$$

$$N_{k-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-h-1, k-N} B_{k-N} & \Phi_{k-h-1, k-N+1} B_{k-N+1} \\ \dots & \Phi_{k-h-1, k-h-1} B_{k-h-2} & B_{k-h-1} & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$M_{k-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-h-1, k-N} G_{k-N} & \Phi_{k-h-1, k-N+1} G_{k-N+1} \\ \dots & \Phi_{k-h-1, k-h-1} G_{k-h-2} & G_{k-h-1} & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$U_{k-1} = \begin{bmatrix} u_{k-N}^T & u_{k-N+1}^T & \dots & u_{k-1}^T \end{bmatrix}^T$$

$$W_{k-1} = \begin{bmatrix} \omega_{k-N}^T & \omega_{k-N+1}^T & \dots & \omega_{k-1}^T \end{bmatrix}^T$$

다음으로 상태방정식 (1)과 출력방정식 (2)로부터 최근 유한 구간 $[k-N, k]$ 에서 출력을 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\begin{aligned} y_{k-N} &= C_{k-N} x_{k-N} + v_{k-N} \\ y_{k-N+1} &= C_{k-N+1} A_{k-N} x_{k-N} + C_{k-N+1} B_{k-N} u_{k-N} \\ &\quad + C_{k-N+1} G_{k-N} \omega_{k-N} + v_{k-N+1} \\ y_{k-N+2} &= C_{k-N+2} \Phi_{k-N+1, k-N} x_{k-N} + C_{k-N+2} A_{k-N+1} B_{k-N} u_{k-N} \\ &\quad + C_{k-N+2} A_{k-N+1} G_{k-N} \omega_{k-N} + C_{k-N+2} B_{k-N+1} u_{k-N+1} \\ &\quad + C_{k-N+2} G_{k-N+1} \omega_{k-N+1} + v_{k-N+2} \\ &\vdots \\ y_{k-1} &= C_{k-1} \Phi_{k-2, k-N} x_{k-N} + C_{k-1} \Phi_{k-2, k-N+1} B_{k-N} u_{k-N} \\ &\quad + C_{k-1} \Phi_{k-2, k-N+1} G_{k-N} \omega_{k-N} + \dots \\ &\quad + C_{k-1} B_{k-2} u_{k-2} + C_{k-1} G_{k-2} \omega_{k-2} + v_{k-1} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 결합하면 다음과 같이 간단한 형태로 나타낼 수 있으며,

$$Y_{k-1} = \tilde{C}_k x_{k-N} + \tilde{B}_k U_{k-1} + \tilde{G}_k W_{k-1} + V_{k-1} \quad (8)$$

여기서 Y_{k-1} 와 V_{k-1} 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$Y_{k-1} = \begin{bmatrix} y_{k-N}^T & y_{k-N+1}^T & \dots & y_{k-1}^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$V_{k-1} = \begin{bmatrix} v_{k-N}^T & v_{k-N+1}^T & \dots & v_{k-1}^T \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

또한, \tilde{C}_k , \tilde{B}_k , \tilde{G}_k 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k-N} \\ C_{k-N+1} \Phi_{k-N, k-N} \\ C_{k-N+2} \Phi_{k-N+1, k-N} \\ \vdots \\ C_{k-1} \Phi_{k-2, k-N} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\tilde{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{k-N+1}B_{k-N} & 0 \\ C_{k-N+2}\Phi_{k-N+1,k-N+1}B_{k-N} & C_{k-N+2}B_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{k-1}\Phi_{k-2,k-N+1}B_{k-N} & C_{k-1}\Phi_{k-2,k-N+2}B_{k-N+1} \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & C_{k-1}B_{k-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\tilde{G}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{k-N+1}G_{k-N} & 0 \\ C_{k-N+2}\Phi_{k-N+1,k-N+1}G_{k-N} & C_{k-N+2}G_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{k-1}\Phi_{k-2,k-N+1}G_{k-N} & C_{k-1}\Phi_{k-2,k-N+2}G_{k-N+1} \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & C_{k-1}G_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

제안하고자 하는 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기는 다음과 같이 최근 유한 구간 $[k-N, k]$ 내의 측정값 Y_{k-1} 과 입력값 U_{k-1} 의 선형 조합의 구조를 가지도록 설계되며,

$$\hat{x}_{k-h|k} = H_k Y_{k-1} + L_k U_{k-1}, \quad (14)$$

여기서 평활기 이득행렬 H_k 와 L_k 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$H_k = [H_{N,k} \quad H_{N-1,k} \quad \dots \quad H_{1,k}], \\ L_k = [L_{N,k} \quad L_{N-1,k} \quad \dots \quad L_{1,k}].$$

식 (3)과 (8)의 결합을 통해 다음과 같은 선형 모델을 얻을 수 있으며,

$$\begin{bmatrix} Y_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{N,k} & 0 \\ \Phi_{k-h-1,k-N} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-N} \\ x_{k-h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ N_{k-1} \end{bmatrix} U_{k-1} \\ + \begin{bmatrix} \tilde{G}_k \\ M_{k-1} \end{bmatrix} W_{k-1} + \begin{bmatrix} V_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

이를 식 (14)에 대입하여 다음과 같이 최근 입출력 정보와 추정 상태 사이의 관계 수식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k-h|k} &= [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} Y_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} + L_k U_{k-1} \\ &= [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} \tilde{C}_k & 0 \\ \Phi_{k-h-1,k-N} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-N} \\ x_{k-h} \end{bmatrix} \\ &\quad + [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} \tilde{B}_k \\ N_{k-1} \end{bmatrix} U_{k-1} + L_k U_{k-1} \\ &\quad + [H_k \quad -I] \begin{bmatrix} \tilde{G}_k \\ M_{k-1} \end{bmatrix} W_{k-1} + H_k V_{k-1} \end{aligned} \quad (16)$$

$$= (H_k \tilde{C}_k - \Phi_{k-h-1,k-N}) x_{k-N} + x_{k-h} + (H_k \tilde{B}_k - N_{k-1} + L_k) U_{k-1} + (H_k \tilde{G}_k - M_{k-1}) W_{k-1} + H_k V_{k-1}$$

제안하는 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기는 비편향 제약 조건이 만족되어야 하므로, 식 (16) 양변에 기대값을 취하여 다음의 수식을 얻을 수 있으며,

$$E[\hat{x}_{k-h|k}] = (H_k \tilde{C}_k - \Phi_{k-h-1,k-N}) E[x_{k-N}] + E[x_{k-h}] + (H_k \tilde{B}_k - N_{k-1} + L_k) U_{k-1}, \quad (17)$$

비편향 제약조건인 $E[\hat{x}_{k-h|k}] = E[x_{k-h}]$ 로부터 다음과 같은 제약 조건을 구할 수 있다.

$$H_k \tilde{C}_k = \Phi_{k-h-1,k-N} \quad (18)$$

$$L_k = -H_k \tilde{B}_k + N_{k-1} \quad (19)$$

이제 제약 조건 (18)와 (19)를 식 (16)에 대입함으로써 다음과 같이 추정시간 $k-h$ 에서의 상태 추정오차 e_{k-h} 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_{k-h} &= \hat{x}_{k-h|k} - x_{k-h} \\ &= H_k \tilde{G}_k W_{k-1} - M_{k-1} W_{k-1} + H_k V_{k-1} \end{aligned} \quad (20)$$

평활기 이득행렬 L_k 는 시스템 정보와 이득행렬 H_k 에 의존하므로 평활기 설계에서 상태추정 오차의 공분산을 최소화시키는 H_k 만 구하면 된다. 따라서, 최적 유한 임펄스 응답 고정지연 평활기의 문제는 다음과 같이 추정 오차의 공분산으로 표현되는 비용함수를 최소화하고, 제약조건 (18)과 (19)를 만족하는 최적 필터 이득 H_k 를 구하는 최적화 문제가 된다.

$$\begin{aligned} &\min_{H_k} E[e_{k-h}^T e_{k-h}] \\ &\text{subject to} \\ &H_k \tilde{C}_k = \Phi_{k-h-1,k-N} \\ &L_k = -H_k \tilde{B}_k + N_{k-1} \end{aligned} \quad (21)$$

이제 최적 필터이득 H_k 를 구해보자. 먼저 계산의 편의를 위해 이동구간 필터 이득 H_k 를 다음과 같이 분해하고

$$H_k^T = [h_{k,1} \quad h_{k,2} \quad \dots \quad h_{k,n}] \quad (22)$$

M_{k-1} 행렬의 i 번째 열벡터를 $\beta_{k,i}$ 로 정의하면, i 번째 추정 오차 $e_{k,i}$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} e_{k-h,i} &= \hat{x}_{k-h|k,i} - x_{k-h,i} \\ &= h_{k,i} \tilde{G}_k W_{k-1} - \beta_{k,i} W_{k-1} + h_{k,i}^T V_{k-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $1 \leq i \leq n$ 이다. 식 (23)과 같은 i 번째 추정오차의 정의로부터 i 번째 추정오차의 분산은 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\begin{aligned} E[e_{k-h,i}^2] &= (h_{k,i}^T \tilde{G}_k - \beta_{k,i}^T)^T Q_k (h_{k,i}^T \tilde{G}_k - \beta_{k,i}^T) \\ &\quad + h_{k,i}^T R_k h_{k,i} \end{aligned} \quad (24)$$

이 식으로부터 i 번째 추정오차의 분산은 오직 평활기 이득 행렬의 i 번째 열 벡터에만 영향을 받는 사실을 알 수가 있다. 또한, $\Phi_{k-h-1, k-N}$ 행렬의 i 번째 열 벡터를 $\alpha_{k,i}$ 로 정의하면 i 번째 비편향 제약조건을 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\tilde{C}_k h_{k,i} = \alpha_{k,i} \quad (25)$$

이 식과 시간 k 에서 비편향 제약조건으로부터 정의된 라그랑지 승수 λ_k 를 이용하면, 비편향 제약조건을 포함한 i 번째 비용함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[e_{k-h,i}^2] &= (h_{k,i}^T \tilde{G}_k - \beta_{k,i}^T)^T Q_k (h_{k,i}^T \tilde{G}_k - \beta_{k,i}^T) \\ &\quad + h_{k,i}^T R_k h_{k,i} + \lambda_{k,i}^T (\tilde{C}_k^T h_{k,i} - \alpha_{k,i}) \\ &= h_{k,i}^T (\tilde{G}_k Q_k \tilde{G}_k^T + R_{N,k}) h_{k,i} \\ &\quad - \beta_{k,i}^T Q_k \tilde{G}_k^T h_{k,i} - h_{k,i}^T \tilde{G}_k Q_k \beta_{k,i} \\ &\quad + \beta_{k,i}^T Q_k \beta_{k,i} + \lambda_{k,i}^T (\tilde{C}_k^T h_{k,i} - \alpha_{k,i}) \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $\lambda_{k,i}$ 는 라그랑지 승수 λ_k 의 i 번째 열벡터이다.

식 (26)의 비용함수를 두 변수 $h_{k,i}$ 와 $\lambda_{k,i}$ 에 대해 최소화하기 위해서는 다음과 같은 두 조건을 만족해야 하며,

$$\frac{\partial E[e_{k-h,i}^2]}{\partial h_{k,i}} = 0, \quad \frac{\partial E[e_{k-h,i}^2]}{\partial \lambda_{k,i}} = 0 \quad (27)$$

이 조건으로부터 임펄스 응답 평활기의 i 번째 최적 이득 열벡터 $h_{k,i}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_{k,i} &= (\tilde{G}_k Q_k \tilde{G}_k^T + R_k)^{-1} \left(\tilde{G}_k Q_k \beta_{k,i} - \frac{1}{2} \tilde{C}_k \lambda_{k,i} \right) \\ &= \Pi_k^{-1} \left(\tilde{G}_k Q_k \beta_{k,i} - \frac{1}{2} \tilde{C}_k \lambda_{k,i} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 $\Pi_k = \tilde{G}_k Q_k \tilde{G}_k^T + R_k$ 이며, 이 행렬은 양한정(positive definite) 행렬이기 때문에 항상 역행렬이 존재한다. i 번째 평활기 최적 이득 행렬 $h_{k,i}$ 는 식 (25)와 같은 i 번째 비편향 조건을 만족해야 하므로, 식 (28) 양변에 \tilde{C}_k^T 를 곱하여 다음과 같은 수식을 얻을 수 있으며,

$$\tilde{C}_k^T h_{k,i} = \tilde{C}_k \Pi_k^{-1} \left(-\tilde{G}_k Q_k \beta_{k,i} - \frac{1}{2} \tilde{C}_k \lambda_{k,i} \right) = \alpha_{k,i}, \quad (29)$$

이 식으로부터 추정 오차의 공분산을 최소화하는 라그랑지 승수의 i 번째 열 벡터 $\lambda_{k,i}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lambda_{k,i} = 2(\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} [\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{G}_k \times Q_k \beta_{k,i} - \alpha_{k,i}] \quad (30)$$

여기서, 고려된 시스템 (1)-(2)에서 (A_k, C_k) 는 가관측성을 만족한다고 가정했기 때문에 식 (30)의 $\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k$ 의 역행렬은 항상 존재하게 된다. 이제 식 (30)에서 구한 i 번째 라그랑지 승수를 식 (28)에 대입하면, i 번째 최적 평활기 이득 행렬을 다음과 같이 구할 수 있으며,

$$\begin{aligned} h_{k,i}^T &= [\alpha_{k,i}^T - \beta_{k,i}^T Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k] (\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} \tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \\ &\quad + \beta_{k,i}^T Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

모든 $i(1 \leq i \leq n)$ 에 대해 최적 평활기 이득 행렬의 열벡터들을 결합함으로써 다음과 같은 최적 평활기 이득행렬 H_k 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} H_k &= (\Phi_{k-h-1, k-N} - M_{k-1} Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1}) (\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} \\ &\quad \times \tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} + M_{k-1} Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1} \end{aligned} \quad (32)$$

또한, 식 (19)와 같은 비편향 제약조건으로부터 평활기의 입력이득 행렬 L_k 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} L_k &= - \left\{ (\Phi_{k-h-1, k-N} - M_{k-1} Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1}) (\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} + M_{k-1} Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1} \right\} \tilde{B}_k + N_k \end{aligned} \quad (33)$$

이상 구한 최적 이득 행렬을 통해 다음과 같이 이산 시변 시스템에 대한 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기를 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k-h|k} &= H_k Y_{k-1} + L_k U_{k-1} \\ &= \left\{ (\Phi_{k-h-1, k-N} - M_{k-1} Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1}) (\tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} \tilde{C}_k)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{C}_k^T \Pi_k^{-1} + M_{k-1} Q_k \tilde{G}_k^T \Pi_k^{-1} \right\} (Y_{k-1} - \tilde{B}_k U_{k-1}) \\ &\quad + N_{k-1} U_{k-1} \end{aligned} \quad (38)$$

마지막으로 식 (38)에서 고정 시간 지연 h 를 0으로 두면, 기존 최적 FIR 필터[11]와 동일하게 되어 제한한 평활기가 최적 FIR 필터보다 더 일반적인 해를 제공할 수 있다.

III. 시뮬레이션

이 장에서는 제한한 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기와 칼만 평활기, 그리고 최적 FIR 필터와의 추정 성능을 시뮬레이션을 통해 비교함으로써 제한한 평활기의 추정 성능이 우수함을 보인다. 이를 위해 먼저 다음과 같은 이산 선형 시변 상태 방정식 모델에 대해 고려해 보자[11].

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1.54 + \delta_k & -0.738 \\ 0.01 \sin(0.01k) + 0.737 & -0.015 + \delta_k \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k \\ y_k &= [1 + 0.1 * \delta_k \quad 1 - 0.01k + 0.1 * \delta_k] x_k + v_k \end{aligned} \quad (39)$$

여기서 δ_k 는 모델 불확실성을 표현하기 위한 파라미터이며, 다음과 같이 주어진다.

$$\delta_k = \begin{cases} 0.1, & 40 \leq k \leq 90, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (40)$$

시스템 잡음 및 측정 잡음의 분산은 각각 $Q_k = 0.01$ 와 $R_k = 0.02$ 로 각각 설정되었으며, 시스템 및 칼만 평활기의 초기 상태는 $x_0 = [0 \ 0]^T$ 으로 설정되었다. 또한, FIR 구조의 이동구간 크기는 $N = 7$ 으로 설정되었으며, 고정 지연 시간 $h = 2$ 로 설정되었다.

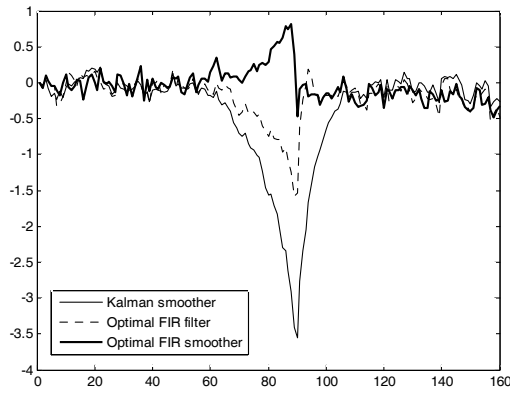


그림 1. 각 추정기의 상태 추정 오차 (상태1).
 Fig. 1. The estimation errors of the proposed smoother, the optimal FIR filter and fixed-lag Kalman smoother (state 1).

그림 1은 시스템의 실제 상태(상태1)와 각 추정기에 의한 추정 결과 사이의 오차를 나타낸다. 이 결과를 살펴보면, 모델 불확실성이 존재하는 $40 \leq k \leq 90$ 구간에서 제안한 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기의 결과가 가장 작은 추정 오차를 가져 모델 불확실성에 대해 비교된 두 추정기보다 강인한 특성을 가지는 것을 알 수 있다. 또한, 불확실성이 사라진 이후에도 다른 두 추정기 보다 실제 상태에 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서 이 시뮬레이션을 통해 제안한 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기가 FIR 구조에 의해 IIR 구조보다 강인성과 수렴성을 가지며, 최적 FIR 필터보다도 좋은 추정 성능을 가지는 것을 확인할 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 이산 선형 시변 시스템에 대해 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기를 제안하였다. 제안된 평활기는 최근의 유한 정보만을 사용하는 FIR 구조를 가지고 추정 오차의 공분산을 최소화 하도록 설계되었다. 또한, 시스템 행렬의 역행렬을 사용하지 않으며, 설계 과정에서 비편향 제약 조건이 고려되었고, 이를 이용하여 시스템의 초기 상태 및 다른 어떠한 상태 정보를 사용하지 않도록 설계하였다. 또한, 제안된 평활기는 시스템 입력을 고려하여 설계하여 피드백 제어 시스템에도 적용 가능하다.

제안된 평활기의 FIR 구조로 인해 유한 입출력 안정도 관점에서 안정하여 IIR 평활기에서 발생할 수 있는 발산 문제를 근원적으로 해결할 수 있으며, 고정 시간 지연 칼만 평활기와의 비교 모의 실험을 통해 시스템이나 잡음의 불확실성에 대해 강인하며, 불확실성이 사라진 이후 빠른 수렴성을 가지는 것을 보였다. 또한, 과거 제안된 최적 FIR 필터와의 비교를 통해 보다 좋은 추정 성능을 가지는 것도 보였다. 특히 제안된 최적 고정 시간 지연 FIR 평활기는 시변 시스템 모델에 대해 설계되었으며, 고정 지연 시간을 영으로 두므로써 최적 FIR 필터로 축소되게 되어 과거 이산 선형 시스템에 대해 설계된 최적 FIR 추정기 보다 일반적인 해를 제공한다.

REFERENCES

[1] R. J. Fitzgerald, "Divergence of the Kalman filter," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, pp. 736-747, Dec.

1971.
 [2] A. H. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, pp. 558-563, Oct. 1968.
 [3] A. M. Bruckstein and T. Kailath, "Recursive limited memory filtering and scattering theory," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, pp. 440-443, May 1985.
 [4] W. H. Kwon, P. S. Kim, and S. H. Han, "A receding horizon unbiased FIR filter for discrete-time state-space models," *Automatica*, vol. 38, no. 3, pp. 545-551, 2002.
 [5] O. K. Kwon, W. H. Kwon, and K. S. Lee, "FIR filters and recursive forms for discrete-time state-space models," *Automatica*, vol. 25, no. 5, pp. 715-728, Sep. 1989.
 [6] B. K. Kwon, S. H. Han, O. K. Kwon, and W. H. Kwon, "Minimum variance FIR smoothers for discrete-time state space models," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 8, pp. 557-560, Aug. 2007.
 [7] C. Ahn and S. Han, "New H_{∞} FIR smoother for linear discrete-time state-space models," *IEICE Transactions on Communications*, E91.B, pp. 896-899, 2010.
 [8] S. Han and W. H. Kwon, "L2-E FIR smoothers for deterministic discrete-time state space signal models," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 927-932, May 2007.
 [9] S. Han, B. K. Kwon, and W. H. Kwon, "Minimax FIR smoothers for deterministic continuous-time state space models," *Automatica*, vol. 45, no. 6, 2009.
 [10] W. H. Kwon, K. S. Lee, and O. K. Kwon, "Optimal FIR filters for time-varying state-space models," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, no. 6, pp. 1011-1021, Nov. 1990.
 [11] B. K. Kwon, "An optimal FIR filter for discrete time-varying state space models," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 12, pp. 1183-1187, Dec. 2011.

권보규



2002년 인하대학교 전자공학과(공학사). 2005년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학석사). 2008년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사). 2008년~2010년 삼성중공업 산업기술연구소 책임연구원. 2010년~현재 강원대학교 공학대학 제어계측공학과 조교수. 관심분야는 추정 및 제어 이론, 로봇틱스/로봇 제어, 컴퓨터 기반 제어 시스템 설계 등.

한수희



1998년 서울대학교 전기공학부(공학사). 2000년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학석사). 2003년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학박사). 2003년~2007년 서울대학교 제어계측신기술연구소 연구원. 2007년~2008년 강원대학교 로봇 S/W 연구센터 책임연구원. 2009년~현재 건국대학교 전기공학과 부교수. 관심분야는 컴퓨터 기반 제어시스템 설계 도구, 분산 제어 시스템, 시간 지연 시스템.