한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 3, 359-384, September 2014

GeoGebra를 활용한 교수 · 학습이 과학고등학교 수학영재들의 인지적 측면에 미치는 영향[1)]

김무진[2)] · 이종학[3)] · 김원경[4)]

본 연구는 고등학교 수학영재를 대상으로 한 GeoGebra 기반 수학영재 교수・학습 자료를 개발하여 수업에 적용해보고, 이 과정에서 나타나는 수학영재들의 인지적 특성을 알아보는 데 있다. 실험 수업에 적용하기 위해 개발한 GeoGebra를 활용한 수학영재 교수・학습 자료는 기본도형의 작도, 슬라이더 도구를 이용한 애니메이션 만들기(함수의 그래프, 도형의 자취, 정적분, 고정점의 탐구, 매개변수 곡선 그리기 등), 이차곡선 탐구 등이며, 14차시 분량의 주제 탐구형으로 구성되었다. 그리고 개발한 자료를 적용하여 B과학고등학교 수학 동아리반 학생 14명을 연구 대상으로 약 4주간 동안 GeoGebra를 활용한 수업을 진행한 결과, 수업에서 수학영재들은 다양한 창의적 사고, 직관과 통찰, 논리적 사고, 수학적 추론 능력, 사고의 유연성 등의 인지적 특성을 나타냈다.

주요용어: 과학고등학교, 수학영재교육, GeoGebra, 창의적 사고.

I. 서론

정부는 창의적 인재 육성을 통한 국가경쟁력 강화라는 국가 차원의 목표와 개인의 잠재적 능력의 계발이라는 영재학생 차원의 목표를 실현하기 위해 2007년 제 2차 영재교육진흥종합계획(2008～2012년)을 발표하였다(교육인적자원부, 2007). 이 계획의 중점 추진 내용은 초・중・고등학생들 중에서 1%를 영재 교육 대상자로 선정하고, 공적인 영재기관별로 특성화된 영재 교육을 제공하기 위해 각 학교급별에 적합한 영재 교육기관의 확대, 그리고 영재교육 담당교원의 전문성 신장, 영재교육 프로그램의 다양화, 교수・학습 자료의 체계적 개발 등이다. 또한 2013년에 발표된 제 3차 영재교육진흥종합 계획(2013～2017년)에서는 영재교육의 질적 수준을 제고하기 위해 영재교육기관의 운영 내실화, 수요자 중심의 영재교육과정 운영, 우수교원 확보 및 지원 강화 등에 중점을 두고, 그 세부 시행 계획의 하나로 학생들의 흥미, 요구, 경험과 수준을 고려한 창의 융합형 사이버 영재교육 콘텐츠를 대상별(초, 중, 고), 영

1) 본 논문은 김무진의 2013년 석사학위논문인『GeoGebra를 활용한 고등학교 수학영재 교수·학습 자료의 개발 및 적용 효과』의 일부임.

2) 한국교원대학교대학원(superjin1@hanmail.net)
3) 대구교육대학교(mathro@dnue.ac.kr)
4) 한국교원대학교(wonkim@knue.ac.kr)

역별(수학, 과학, 발명, 인문사회, 예술 등), 수준별(기초, 심화)로 다양하게 개발하여 확충・보급하기로 하였다(교육과학기술부, 2013). 이와 같은 영재교육진흥정책에 따라 최근 들어 영재교육은 양적, 질적으로 매우 빠르게 확대되고 있고, 이에 따라 수학영재교육도 도입기를 거쳐 질적인 측면에서의 도약기에 들어섰다고 말할 수 있다.

수학 영재는 지적능력, 과제 집착력, 창의성 등이 또래의 일반 학생들에 비해 높은 성취수준을 갖고 있으며 특히 수학 문제를 창의적으로 해결할 수 있는 잠재력을 가지고 있다. 따라서 수학 영재들에게 교과서 중심의 지식 편중 학습, 입시 위주의 교수・학습은 가급적 지양되어야 하고, 학생 개개인의 수준에 적합한 콘텐츠를 제공하여 학생 중심의 자기주도적 교수·학습을 수행하는 것이 필요하다.

지금까지 수학 영재 교수・학습 자료는 한국교육 개발원 영재교육센터, 각 대학 부설 영재교육원, 연구 시범학교 등에서 독자적으로 개발하여 온 것이 일반적인 추세이다. 그러나 대상 학생의 수준에 적합하고, 새로운 분야에 도전해 보면서 수학의 심미성과 성취감을 느끼고 창의적인 지식 생산자로서의 역할을 수행할 수 있게 해주는 수학 영재 교수・학습 자료의 다양한 형태에서의 개발이 지속적으로 필요한 것도 주지의 사실이다.

수학 영재 교수・학습 자료의 개발을 위한 한 형태로 최근 들어 수학 교수·학습 과정에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 영재학생들의 인식론적 어려움을 경감시키거나 수학적 사고력을 신장시키고자 하는 연구들이 수행되었다. 이에 황우형과 차순규(2002)는 컴퓨터의 시각화 기능이 학생들로 하여금 추상적인 수학 내용을 직관적으로 사고하게 할 수 있을 뿐만 아니라 수학적인 경험을 제공할 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 줄 수 있다고 하였다. 또한, 이상희, 이종학과 김원경(2012)은 GeoGebra가 학생들로 하여금 대수적 표현과 기하적 표현을 동시에 경험하게 함으로써 고등학교 해석·기하 단원에서 표상 간의 연결을 통해 인식론적 어려움을 완화시켜 줄 수 있다고 하였다. 그리고 강문봉(2009)은 수학 문제에 주어진 조건을 변경해서 문제를 해결하는 경우, 즉 What if not 인 경우에 그 결과를 추론해 보고, 이를 소프트웨어로 확인하는 과정에서 '왜 그렇게 되는지'를 생각해 봄으로써 수학적 사고력이 신장될 수 있다고 하였다.

학교수학의 여러 영역 중에서 평면기하에 대한 연구는 중등학교 수학영재교육에서 매우 중요한 역할을 하고 있고 그 필요성은 날로 증대되고 있다(강숙희, 장영숙, 박숙희 정태회, 임희준, 2000). 평면도형의 교수・학습에서 컴퓨터 프로그램을 활용하면 평면도형에 대한 시각화를 바탕으로 학습자 스스로 수학적 지식을 추론하고 그 사실을 확인하는 능동적 학습환경이 제공 될 수 있다(NCTM, 1989). 이에 본 연구에서는 고등학교 수학 영재 학생들을 대상으로 GeoGebra를 활용한 평면기하 영역의 주제 중심의 수업의 과정에서 수학 영재들의 인지적 특성이 어떻게 나타나는지를 분석해보고자 한다.

Ⅱ. 문헌 연구

1. 수학 영재의 특성

이경화(2001)는 수학 영재는 "이미 상당 수준의 수학적 사고력 또는 창의력, 과제집착력, 문제 해결력 등을 갖추고 있으며 별도의 판별 절차를 통하여 선발되는 소수의 학생"이라고 하면서, 폭넓은 의미의 영재로 '수학 우수학생'을 "해당 학급에서 비교적 수학 성취가 높은

학생, 수학에 관심을 가지며 수학 학습에 비교적 성공적이고 적극적인 학생"이라고 정의하였다. 또한 Sheffield(1999)는 능력, 동기, 신념, 경험, 기회는 고정적인 것이 아니고, 영재교육은 타고난 재능을 양성하고 발달시키는데 그 목적이 있으므로 기존의 영재성에 대한 소극적 정의를 확대할 필요가 있음을 주장하면서, 인구 대비 특정 비율에 속하는 폐쇄적인 정의인 '재능 있는(gifted or talented)'이 아닌 '유망한(promising)'의 용어로 영재를 정의하였다. 이것은 수학적으로 유망한 아동을 "미래의 리더와 문제 해결자의 잠재력을 가지고 있는 아동"으로 정의한 것이다.

수학영재의 특성을 나타내는 영재성과 관련하여 Garafalo(1993)는 수학 영재아들이 영재성의 모든 특성을 보여주고 있지는 않지만, 또래들과 비교했을 때 문제해결을 찾고자 갈망하는 높은 과제 집착력, 높은 집중력, 우수한 기억력 등과 같은 부수적인 특성들을 포함한다고 하였다(최남광, 2008). 반면에 황동주(2006)는 수학 영재성을 예언할 수 있는 행동 특성을 일반적인 수학 정신 능력, 수학적 능력, 수학과 연결성, 정보수집과 처리 능력과 수학적 성향의 하위 요인으로 분류하였다. 여기서 일반적인 수학정신 능력은 이해와 적용능력, 추론능력, 속도와 능숙한 과정, 흥미와 소질의 요소를 포함한다. 이때, 이해와 적용능력은 수학영재 학생들의 언어 이해력(Greenes, 1981)과 공식에 대한 수학적 기억력(House, 1987; Krutetskii, 1976)과 증명방법에 대한 기억들을 포함한다. Feldhusen(1990)은 수학 영재들은 복잡한 형태의 추론 기술과 분석적이고 연역적이며 효과적인 귀납적인 추론 능력을 가지고 있으며 이런 추론 능력은 수학에서 높은 사고 능력과 관련이 있다고 주장한다.

수학적 능력은 직관적 통찰능력, 정보의 조직화 능력, 추상화 능력, 공간화와 시각화능력, 일반화 및 적용 능력, 수학 창의성과 같은 하위 영역을 포함한다. 직관적 통찰능력이란 주어진 정보나 조건들 사이의 관계나 구조의 핵심을 직감적으로 파악하고 문제 해결의 결정적 단서를 떠오르게 하는 능력이다. 정보의 조직화 능력은 주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고, 문제 해결의 전략을 사용할 수 있도록 분류, 조직을 하는 능력이며(Ficici, 2003), 추상화 능력은 패턴과 사고의 추상화를 찾는 능력, 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고능력(House, 1987)을 말한다. 공간화와 시각화 능력은 추상적인 수학적 관계를 시각화하거나 주어진 공간적 정보를 머리로 가시화하여 파악하는 능력이다(Ficici, 2003).

더불어 김상훈(2007)과 허수진(2010)은 수학 영재 학생들의 인지적 행동 특성을 직관적 통찰, 논리적 사고, 구조 파악, 수학적 추론, 일반화 및 적용, 반성적 사고, 유연성으로 분류한다. 이 때, 직관적 통찰은 주어진 정보나 조건들 사이의 관계나 구조의 본질적인 핵심을 직감적으로 파악해내며, 문제 해결의 결정적 단서를 순간적으로 떠오르게 하는 특성이다. 또한, 논리적 사고는 문제 해결과 이해과정에 있어서 그 정당성을 뒷받침할 수 있는 근거를 제시하는 것이며, 구조 파악은 주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고 문제 해결 전략을 사용할 수 있도록 분류하고 조직하는 특성이다. 수학적 추론은 유추, 귀납, 연역 등의 방법을 통해 추측해내는 능력이고, 일반화 및 적용은 수학적인 문제를 해결하는 과정에서 수나 문자, 기호로 표현된 수적, 공간적 대상이나 관계, 공식 등을 빠르고 광범위하게 조작하여 일반화시키고, 더 나아가 얻은 결과를 유사하거나 다른 상황의 새로운 문제에까지 확장하여 적용하는 능력을 말하며, 반성적 사고는 문제를 이해한 내용이나 문제 해결방법과 해결 결과에 대한 오류에 대해 결과나 오류가 나온 원인이나 궁극적인 결과를 주의 깊게 고려하는 것을 가리킨다. 유연성은 대안적인 접근방법을 사용하는 능력을 말한다.

2. 수학 영재 교수・학습 자료

Samara와 Curry(1990)는 영재를 위한 교수・학습 자료는 영재의 행동 특성을 유도해낼 수 있는 자료이어야 함을 강조하면서 영재를 위한 자료의 특징은 개념이나 지식의 전달에 초점을 맞추기 보다는 사고력 및 문제 해결력과 산출물에 초점을 맞추어야 한다고 하였다. 영재에게 창의적인 문제 해결 능력을 키워주기 위해서는 하나의 현상이나 과제에 대해 다양한 관점을 제시하고 다양한 매체를 활용함으로써 살아있는 교육이 될 수 있도록 하는 자료이어야 한다. 또한 영재들이 선택할 수 있는 여지를 많이 제공하는 것이어야 하며 모든 것을 주어진 대로 받아들이고 지시대로만 과제를 수행하지 않고 학생들 나름대로 소재, 주제, 해결 방법들을 결정하여 문제를 해결할 수 있는 것이 바람직하다. 이에, 최종현(2004)은 수학 영재 교수・학습 자료 개발의 방향을 다음과 같이 제시하였다.

첫째, 전통적인 학습경험에 비하여 수준이 보다 높고 정교하며 내용이 보다 깊이 있고 추상적이어야 한다.

둘째, 영재를 위한 교수・학습 자료는 단순히 내용을 재생해 내는 주입식 과정이 아니라 창의적 사고를 생산해 내는 과정이어야 한다.

셋째, 영재를 위한 교수・학습 자료는 학생의 흥미와 관심에 따라 학습자 자신이 학습 내용을 결정하는 주체가 되도록 하여야 한다.

넷째, 영재를 위한 교수・학습 자료는 학습자에게 모든 지식과 정보에 대한 비판적인 사고력을 가지고 반성적인 질문을 하여 이에 대한 논리적인 답변을 하는 활동을 하여야 한다.

다섯째, 기존의 아이디어에 도전하는 새로운 아이디어로 산출물을 만들도록 격려하는 내용이어야 한다.

일반적으로 수학 영재 교수・학습 자료의 유형은 문제 해결형, 주제 중심형, 과제 중심형, 연구형(R&E)로 나눌 수 있다.

문제 해결형은 이미 학습한 내용에 대한 통합 및 이를 심화・발전시킬 기회를 제공하고 보다 창의적이고 다양한 문제 해결 전략의 개발, 수학에 대해 이해의 촉진과 확장, 지적 호기심 및 도전 의식의 자극을 통한 수학적 재능을 개발하는데 초점을 둔 교수・학습 자료를 말한다.

주제 탐구형은 교과 내용과 연계된 과제에 대해 학생이 주체가 되어 다양한 사고활동과 독창적인 탐구활동을 통해 새로운 문제 해결 전략의 일반화 및 수학적 원리・법칙의 창안과 확장에 초점을 둔 교수・학습 자료를 말한다.

과제 개발형은 주어진 과제(또는 연구 문제)에 대하여 개인 또는 2~4인의 모둠별로 그 과제를 수행하면서 보고서와 같은 산출물을 생산해 내는 방식을 말한다.

연구형(R&E)은 새로운 주제에 대해 연구 논문과 같이 서론, 본론 결론의 형식으로 개발한 교수・학습 자료를 말한다.

3. 선행 연구의 고찰

지금까지 수학 영재 교수・학습 자료는 한국교육 개발원 영재교육센터, 각 대학 부설 영재교육원, 연구 시범학교 등에서 주로 개발되어 왔다. 이외에 GeoGebra를 포함하여 테크놀

로지를 활용한 영재 학습 자료의 개발에 대한 연구들을 살펴보면 다음과 같다.

박윤미(2004)는 대학 부설 영재교육원 학생들을 대상으로 GSP 프로그램의 실질적인 활용 방안과 테크놀로지 기반 수업에서 요구하는 교수학습의 방법론적인 측면을 제시하였다.

김상훈(2007)은 주제탐구형 자료 개발의 준거에 따라 영재 학생들의 수학적 능력 함양의 측면에서 작도 기반의 수학 영재 교육 프로그램을 개발하였다.

최한나(2009)는 삼각형의 외심·내심에 대한 GeoGebra 학습 자료를 개발하고 이를 수업에 적용한 결과 학생들의 다양한 경험, 학습도구와의 상호작용, 능동적인 활동 등이 지식의 구성에 중요한 영향을 미친다는 것에 비추어 볼 때 수학 교수·학습에 있어서 컴퓨터 활동은 구성주의의 실현에 중요한 요소임을 제시하였다.

김민영(2010)은 초등수학 영재들의 수학적 사고력 신장을 위해서 GSP를 활용한 영재 프로그램을 개발하였다.

박태형(2011)은 로고(LOGO)를 활용한 프로그래밍 학습 자료를 통해 영재들의 수학적 창의성 신장 효과에 대해서 알아보았다.

고윤아(2011)은 고등학생을 대상으로 GeoGebra를 활용한 수업이 학생들의 흥미를 불러일으킬 수 있을 뿐만 아니라 학생들에게 정확한 시각적 데이터를 제공하는 장점을 지니며, GeoGebra는 그래프 그리기, 자료의 조직, 수학적 개념의 이해나 문제 해결을 위한 효과적인 도구로서 역동적이고 다양화된 수업을 가능하게 하는 적절한 수학 탐구형 소프트웨어라고 주장하였다.

성해석(2011)은 복소평면과 만델브로 집합을 이용한 복소수 지도방안의 연구에서 복소수의 사칙연산을 좌표평면상에서 GeoGebra를 이용하여 기하학적으로 먼저 이해하고, 이를 바탕으로 대수적인 법칙을 알 수 있다고 제시했으며, 만델브로 집합을 GeoGebra를 이용해 구성함으로써 반성적 사고를 통한 문제해결력을 향상시킬 수 있음을 밝혔다.

이명기(2012)는 작도를 내용으로 하는 GeoGebra 기반의 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하면서, 대수와 기하적 대상을 동시에 다룰 수 있는 GeoGebra의 영재 교육적 효과를 주장하였다.

이상희(2012)는 GeoGebra를 활용한 부등식 영역의 최대-최소 학습지도의 연구에서 최댓값 또는 최솟값을 구하기 위해 좌표 표현 함수를 이용해서 목적함수의 식을 작성하는 활동을 통해 학생들은 구하려는 목적 함숫값이 부등식 영역의 각 점의 x, y 두 좌표로 결정되는 값임을 명확히 인식할 수 있게 되었으며, 그래프 그리기 기능에 의해 학생들의 등고선에 대한 이해가 과정수준에서 대상수준으로 발전되는 것을 촉진할 수 있었다고 하였다.

정자욱(2012)은 GeoGebra를 이용한 미적분 수업의 질적 사례연구에서 GeoGebra를 활용한 수업은 미분의 개념과 정적분의 개념의 이해에 역동적, 시각적으로 도움을 주어 학생들이 개념을 이해하는 데는 도움을 줄 수 있지만, 극한을 구하는 방법과 정적분을 계산하는 방법을 익히는 데에는 지필수업이 보다 효과적이라고 하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. GeoGebra를 활용한 영재 교수·학습 자료의 개발

본 연구에서는 고등학교 수학 영재 수업을 위해 먼저 그에 필요한 교수·학습 자료를 개

발하였다. 이에 GeoGebra를 활용한 교수・학습 자료를 개발하기 위하여 다음과 같은 사항을 고려하였다.

첫째, 주제 탐구형 교수・학습 자료를 제시한다. 단순한 그래프 그리기 기능을 이용한 자료나 대수적 계산을 확인하는 자료와 같이 단순히 수학적 개념의 확인을 위한 자료 등은 학습자 중심의 교수・학습 자료의 개발을 목적으로 하는 본 연구에는 부합하지 않으며 이런 자료들로는 학습자의 수학적 사고력과 창의력을 기대하기 어렵기 때문이다.

둘째, 지식을 자기 주도적으로 구성할 수 있는 자료를 제시한다. 지식은 능동적으로 인식하는 주체에 의해 구성되어 진다는 구성주의 학습 원리는 이와 같은 자료의 필요성을 말해준다고 할 수 있다.

셋째, 논리적 사고력과 문제 해결력을 신장시킬 수 있는 자료를 제시한다. 이를 위해서는 기본학습 뿐만 아니라 심화학습으로 연결될 수 있는 주제가 선정되어야 하고 여러 영역의 개념이 복합적으로 적용될 수 있는 학습자료 개발이 요구된다.

넷째, 수학 학습에 긍정적인 태도를 기를 수 있는 자료를 제시한다. 학습자들의 흥미와 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있는 과제를 선정하고 구성하도록 해야 한다. 이를 위해 실생활과 관련된 학습 자료를 제시하거나 수학적 모델링 등을 통해 수학에 대한 긍정적인 태도와 학습자의 자신감과 성취감을 불러일으킬 수 있다.

2. 영재 교수・학습 자료의 수업 적용

1) 연구 대상

본 연구에서는 개발한 영재 교수・학습 자료를 수업에 적용하기 위해 B광역시 소재 B과학고등학교 수학심화교과 동아리 소속 1・2학년 각 7명 씩 총 14명을 연구 대상으로 선정하였다. 이들은 이미 고등학교 수학과 교육과정을 모두 선행 학습한 학생들로써 수학적 소양이 풍부하고, 성취 능력이 뛰어난 학생들이다. 또한 대다수의 학생들은 중학교 3년 동안 지역교육청, 과학교육원, 과학고 영재교육원에서 영재 교육을 이수했으며, 과학고등학교 입학시 수학・과학 면접 및 창의성 시험에서 우수한 성적으로 합격한 학생들로서, 특히 B과학고등학교 내에서도 수학교과의 성취 능력이 뛰어난 학생들이다.

2) 수업 방법

수업은 연구자의 지도하에 2, 4주째 토요일 동아리 활동시간(1일 3차시의 수업이 이루어졌고, 1차시는 50분임)을 이용하여 5주간 동안 총 14차시가 진행되었다. 연구자는 학생들에게 Geogebra의 기본 기능, 수학적 주제의 이론적 배경, 새로운 주제에 대한 기초 개념. 그래프 그리기 절차 등을 지도하였고, 가급적 학생들로 하여금 스스로의 활동과 관찰을 통해 곡선의 성질을 탐구하고, 토론을 통해 작도 방법 등을 찾도록 하였다.

3. 자료수집 및 분석

1) 수업 관찰 자료

본 연구에서는 수학 영재 학생들의 인지적 행동 특성 중에서 수학적 사고력 면의 향상에 효과가 있는지를 알아보기 위하여, 수업 중에 나타난 학생들의 행동 특성, 학생들이 제출한 활동지, 과제물로 제출한 GeoGebra 파일 등의 자료를 수집하였다. 이들 자료는 김상훈(2007)의 문제해결 과정의 인지적 특성 분석틀과 허수진(2010)의 분석틀을 수정·보완한 <표 Ⅲ-1>의 인지적 특성 틀을 바탕으로 분류되고 분석되었다.

<표 Ⅲ-1> 영재 학생들의 인지적 특성

인지적 특성	특성 설명
직관적 통찰	주어진 정보나 조건들 사이의 관계나 구조의 본질적인 핵심을 직감적으로 파악해내며, 문제 해결의 결정적 단서를 순간적으로 떠오르게 하는 특성
논리적 사고	문제 해결과 이해과정에 있어서 그 정당성을 뒷받침할 수 있는 근거를 제시하는 특성
구조 파악	주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고, 문제 해결 전략을 사용할 수 있도록 이를 분류하고 조직하는 특성
수학적 추론	유추, 귀납, 연역 등의 방법을 통해 추측해내는 능력
일반화 및 적용	수학적인 문제를 해결하는 과정에서 수나 문자, 기호로 표현된 수적, 공간적 대상이나 관계, 공식 등을 빠르고 광범위하게 조작하여 일반화시키고, 더 나아가 얻은 결과를 유사하거나 다른 상황의 새로운 문제에까지 확장하여 적용하는 능력
반성적 사고	문제를 이해한 내용이나 문제 해결방법과 해결 결과에 대한 오류에 대해 결과나 오류가 나온 원인이나 궁극적인 결과를 주의 깊게 고려하는 특성
유연성	대안적인 접근방법을 사용하는 능력

2) 학생 면담 자료

본 연구에서는 학생들의 인지적 특성을 보다 면밀하게 분석하기 위하여 연구 대상 학생 중에서 학업성취도, 수업 참여정도, 개인의사 등을 고려하여 3명을 선정하여 개별 면담을 실시하였다. 면담은 학생들이 수업에 집중할 수 있도록 수업 사이의 휴식시간이나 수업 후에 이루어졌다. 면담 학생들의 특성은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 면담 대상의 특성

학생	학년(성별)	학업 성취 수준 (중학교 영재원 이수)	특성
A	1(남)	중상 (1,2학년)	·중학교 영재원 교육으로 GSP를 이용한 기본작도 가능. ·소프트웨어의 이해와 창의적인 적용능력이 우수함. ·고등학교 전 과정 선행학습. ·창의적 문제해결력 우수함.
B	2(남)	상 (1,2학년)	·과제집착력이 우수함. ·소프트웨어 이해 능력이 우수함. ·고1,2 수학R&E를 계속할 만큼 수학에 대한 열의가 높음. ·대수학에 대한 관심과 열의가 매우 높음.
C	2(여)	상 (1,2,3학년)	·자기 주도적으로 문제를 설정하고 해결하는 것을 즐김. ·수학적 요소 파악이 빠름. ·컴퓨터 사용능력이 우수함.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 영재 교수・학습 자료의 개발

본 연구에서는 수학 영재 교수・학습 자료의 개발 방향에 따라 GeoGebra를 활용한 수학적 주제 13개를 <표 Ⅲ-3>과 같이 개발하였다. 그리고 13개의 주제 중에서 GeoGebra를 소개하고 기본적인 다각형을 작도하는 주제 1, 슬라이더 도구로 매개변수 곡선을 그리는 주제 9, 정다각형 사이클로이드를 그리고 일반화하는 주제 12, 이차곡선에 대한 수학적 모델링을 다루는 주제 13을 2차시로 하여 총 14차시의 수업을 진행하였다.

<표 Ⅲ-3> 개발된 수학 영재 교수・학습자료 주제 및 차시

순	영역	주제	내용	차시
1	기하	도형의 작도	GeoGebra 소개와 다각형의 작도	1-2
2	해석	여러 가지 함수의 그래프	여러 가지 기본함수 그래프와 평균값 정리	3
3	기하/해석	삼각함수의 그래프	슬라이더 도구로 sin, cos, tan의 그래프 그리기	4
4	기하/해석	사이클로이드	슬라이더 도구를 이용한 Cycloid 곡선 그리기	
5	해석	정적분과 구분구적법	구분구적법을 이용한 함수의 정적분	5
6	해석	부동점의 탐구	스프레드시트를 활용한 부동점 존재의 탐구	
7	조합	드무아브르-라플라스정리	통계적·수학적 확률의 차이를 시각화하기	6
8	조합	이항·포아송·정규분포	이항분포,포아송분포,정규분포의 그래프	
9	기하/해석	Hypocycloid/Epicycloid	슬라이더 도구로 매개변수 곡선 그리기	7-8
10	기하/해석	로그나선의 그래프	매개변수 곡선, 스프레드시트로 그래프 탐색	9
11	기하	정다각형의 회전과 자취	수학적모델링-정다각형 바퀴를 위한 도로설계	10
12	기하	정다각형 사이클로이드	정다각형 사이클로이드 그리기와 일반화	11-12
13	기하/해석	이차곡선	수학적모델링-이차곡선과 슛팅포인트	13-14

2. 각 차시별 수업 분석에서 나타난 수학 영재의 인지적 특성 분석

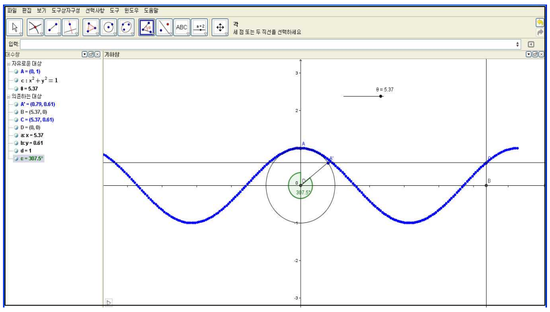
1) 1~3차시에 나타난 수학영재들의 인지적 특성

연구대상 학생들은 중학교 때 영재원 또는 학교수업을 통해 GSP를 접해왔거나 직접 작도해본 경험이 많았으며, GeoGebra의 직관적인 인터페이스로 기본도형의 작도를 어려워하지 않았다. 또한 기본함수들의 입력과 각 함수들에 대한 평균변화율과 순간변화율의 관계를 직접 조작을 통해 확인할 수 있는 데 대해서 호기심을 보였으며, 특히 GeoGebra의 슬라이더 기능을 통해 변수 변화에 따른 접선의 기울기를 관찰할 수 있는 것을 흥미로워 했다. 반면에 1~3차시에서 수학영재들은 GeoGebra에 대한 유용성을 확인하고 호기심을 보이기는 했지만, 특별한 인지적 특성은 드러나지 않았다.

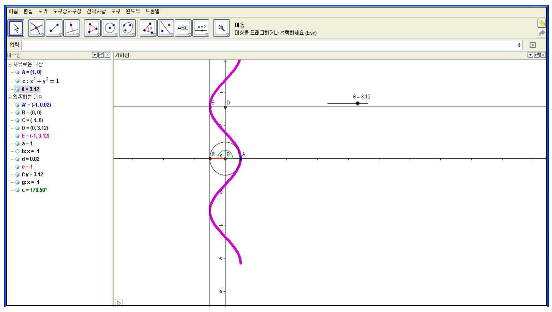
2) 4~6차시에 나타난 수학영재들의 인지적 특성

<활동 1>에서는 작도를 하기 전에 아이디어를 찾는 방법으로 예시 자료를 학생들과 함께 다루었다. 대부분의 학생들은 삼각함수의 정의와 원 위의 회전하는 점의 회전각의 크기를 라디안으로 나타내어 이것을 x축 좌표로 나타내고, 회전하는 점의 y좌표가 $y=\sin x$ 그래프의 y좌표가 된다는 것을 예시그림을 통해 파악할 수 있었으며, 따라서 필요한 GeoGebra의 메뉴와 명령어만을 질문하였다. 이는 중학교 영재원 등의 수업을 통해 GSP를 이용한 그래프의 작도 경험이 도움이 되었다고 판단된다.

<활동 1>에서 학생 스스로 작도가 제대로 되었는지 확인하는 작업을 가지도록 지도하였으며, 개인별 작도과정을 살펴보기 위해 '보기-구성단계 내비게이션 바' 또는 '보기-구성단계'를 이용하여 확인하였다. <활동 1>의 작도과정을 참고하여 제시한 <활동 2>의 $[-2\pi, 2\pi]$에서 $y=\cos x, y=\tan x$의 그래프를 그려보고, 각 함수의 대칭성을 찾는 과제에서는 $y=\tan x$의 그래프는 단위원에서의 직각삼각형의 높이와 닮음인 관계를 이용하여 작도할 수 있었다. $y=\cos x$의 그래프인 경우는 단위원에서의 직각삼각형의 밑변 길이가 cos 값이 됨을 이해하고 있었으며, $y=\sin x$ 그래프와 같이 단위원의 오른쪽에 그려지기 위해서는 x축 아랫부분으로 그래프를 그려 반시계방향으로 90° 회전이동하면 된다는 아이디어와 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$를 이용해 회전 시작점을 $(0,1)$에서 하면 된다는 아이디어가 학생들로부터 도출되었다. 대부분 학생이 <활동 2>를 쉽게 해결하였는데, 분석 대상인 학생 A, B, C가 제출한 파일 결과는 [그림 Ⅲ-1]과 [그림 Ⅲ-2]와 같다.



[그림 Ⅲ-1] 학생 A, C의 코사인함수의 그래프



[그림 Ⅲ-2] 학생 B의 코사인함수의 그래프

4차시의 두 번째 교수・학습 자료인 사이클로이드 곡선을 그리기에 앞서 제시한 <과제 1>의 반지름 r인 한 원이 직선 위를 굴러갈 때, 원 위의 한 점이 그리는 자취의 방정식을 14명 중에서 11명이 암기하고 있었으며, 암기하고 있지 못한 1학년 학생 3명은 그림을 제시해 주자 곧바로 유도하여 식으로 표현하였다. <과제 1>의 결과에 대한 토론을 통해 학생들이 사이클로이드의 작도 방법을 찾도록 지도하였는데, 학생들의 토론 내용은 다음과 같다.

학생A : 원이 굴러가게 한다는 것은 결국 슬라이더 도구에 의해서 만들어진 변수에 애니메이션 기능을 부여하면 될 것 같아.

학생C : 원이 직선 위를 움직이게 하려면 원의 위치가 변해야 하는 데 이것을 어떻게 표현하면 될까?

학생B : 원의 위치가 바뀐다는 것은 결국 원의 중심이 이동했다는 것이므로 슬라이더 도구를 이용해 표현한 변수를 이용해 원의 중심의 좌표를 만들면 원이 굴러가게 하는 것처럼 보이지 않을까? 그런데 원이 굴러가는 속도와 원 위의 점이 회전하는 속도를 같게 표현할 수 있을까?

학생C : 슬라이더 도구를 이용해 만든 변수를 원의 중심좌표가 바뀌는 것과 원 위의 점의 회전에 사용하면 되지 않을까?

학생D : 나도 그렇게 생각했는데, 결국 원이 굴러간다는 것을 원의 중심이 이동하는 것으로 하면 되고, 원 위의 점의 회전도 같은 변수를 쓰면 될 것 같은데.

학생C : 아 그럼, 원의 중심이 오른쪽으로 각의 변화량만큼 이동하는 동안, 원 위의 한 점이 같은 각의 변화량만큼 회전하게 하면 될 것 같아.

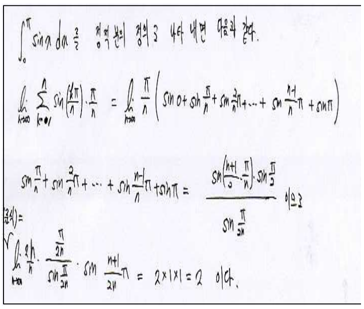
학생D : 그러면 되겠네. 결국 사이클로이드의 매개변수 식에서 변수의 역할이 핵심이네. 그런데 선생님, 자취를 남기게 되는 점은 처음 점이 각의 변화량만큼 회전한 점인데 점을 회전시키는 명령어는 뭔가요?

연구자 : 도구상자에서 [주어진 크기의 각]메뉴를 이용하거나 '회전[대상, 각, 점(회전의 중심좌표)]'를 입력창에 규칙에 맞게 입력하면 된단다.

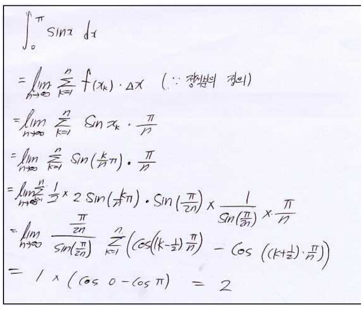
위의 토론내용에서 알 수 있듯이 대부분의 수학영재들은 두 학생 B, D와 같이 <과제 1>에서 완성된 작품의 반복관찰을 통하여 사이클로이드를 표현하기 위한 핵심을 파악해 내고, 원의 회전을 이용해 자취를 나타내기 위한 전략을 수립하고 변수의 기능을 정확히 파악하여 문제해결을 위해 조직하는 인지적 특성을 보였다.

<과제 1>에 대해 매개변수 관계식에 대해 알고 있던 학생들은 단순히 매개변수 곡선을 이용해 바로 그래프로 나타내기 위한 명령어가 무엇이냐는 질문을 했으며, 학생들 간의 토론을 통해 그린 사이클로이드 곡선과 매개변수 곡선식을 이용한 그래프가 일치함을 이해하고 매개변수의 역할에 대해 명확히 이해하게 되었다는 반응을 보였다. <과제 1>의 매개변수 식으로 사이클로이드 곡선을 표현하는 명령어는 '곡선[$\theta-\sin(\theta), 1-\cos(\theta), \theta, 0, 2\pi$]'이다.

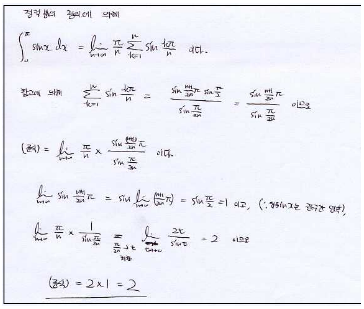
분석 대상 학생인 A, B, C는 토론 결과를 통해 거의 유사한 파일을 만들어서 제출하였는데, 5차시 과제 중 <과제 2>는 학생들에게 $y=\sin x$ $[0,\pi]$에서 정적분 값을 직접 구분구적법으로 계산해보게 한 후, GeoGebra를 이용해 표현하게 하는 내용이다. 다음 [그림 Ⅲ-3]에서 [그림 Ⅲ-5]는 세 학생 A, B, C가 계산하여 제출한 내용이다.



[그림 Ⅲ-3] 사인함수의 정적분 풀이(학생 A)



[그림 Ⅲ-4] 사인함수의 정적분 풀이(학생 B)



[그림 Ⅲ-5] 사인함수의 정적분 풀이(학생 C)

위의 [그림 Ⅲ-3]에서 [그림 Ⅲ-5]의 풀이와 같이 세 학생 A, B, C는 구분구적법의 정의를 이용하여 문제를 해결하였다. 하지만 세 학생 모두 식의 계산으로서 문제를 해결하였고, 그래프를 이용하여 표현하지 않았다. 다음은 풀이를 제출한 세 학생 A, B, C와 연구자의 면담내용의 일부이다.

연구자 : 이 문제의 어려운 점은 없었니?
학생B : 정적분과 무한급수와의 관계를 이용해 그림을 그리지 않고 바로 식을 유도하려 했는데 처음에는 사인값의 유한합을 계산하기 어려워 힘들었는데 선생님께서 주신 힌트로 쉽게 풀 수 있었어요.
연구자 : 왜 그래프를 안 그리고 바로 계산할 수 있었니?
학생C : 이런 문제는 정적분과 무한급수 공식을 적용시키면 바로 할 수 있어요.
연구자 : 그럼 이런 문제는 그래프를 그려보지 않고 해결이 가능하다는 말이니?
학생C : 꼭 그렇다고 할 수는 없지만 대부분 해결할 수 있을 것 같아요.
연구자 : 그렇다면 직사각형들의 개수가 무한히 커짐에 따라 구하고자하는 정적분 값과 직사각형들의 넓이의 합의 차이는 어떻게 되니?
학생B : 당연히 0에 가까워지죠.
연구자 : 어떻게 그렇게 단언할 수 있지?
학생B : 교과서에 그렇게 나와 있어요.

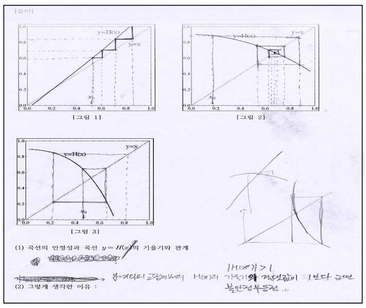
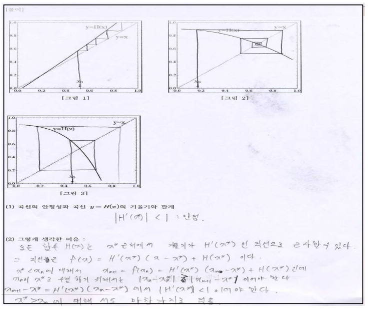
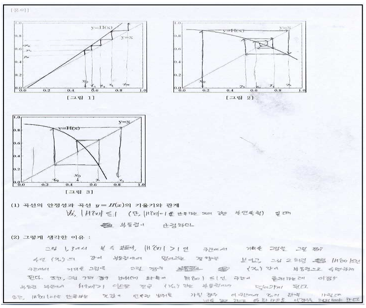
위의 면담에서 학생들은 공식에 의해 곧바로 정적분과 무한급수가 같아진다는 것을 알고 있었다. 그렇지만 직사각형의 개수가 늘어날수록 차이가 줄어드는 것은 이론적으로 알고 있었으나 실제로 오차를 계산해보거나 보다 오차를 줄일 수 있는 방법에 대해서는 알고 있지 못했다. 이에 Geogebra를 이용해 정적분 값과 상합과 하합의 차이가 직사각형의 개수가 늘어날수록 줄어든다는 것을 확인하도록 지도하였다.

명령어가 복잡하지 않아 모든 학생이 적분가능함수들에 대한 정적분 값을 쉽게 찾을 수 있었고, 슬라이더 도구를 활용해 상합과 하합의 차이가 줄어든다는 것을 시각적으로 확인할 수 있어 인상 깊었다고 수업 후 면담에서 이야기하였다. 그렇지만 수학 영재들 중에 몇몇은 뭔가 허전하다는 반응도 보였다. 즉, 이것만으로는 구분구적법의 중요성과 그래프를 그려봄으로써 상합과 하합을 찾아보아야 할 이유를 설명하지는 못했다.

다시 말해 <과제 2>를 통해 지필에서 시각적으로 다소 표현하기가 힘든 '리만적분 가능성'을 GeoGebra의 적분 기능을 이용해 손쉽게 설명해 줄 수 있었다. 그렇지만 정적분의 계산 기능과 연습에 있어서는 실제 $y=\sin x\,,[0,\pi]$의 정적분 계산은 계산이 복잡한데 비해, 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra는 간단히 시각적 결과만 알려줄 뿐이어서 효과적인 지도방법이 아님을 알 수 있다. 구분구적법을 통한 적분지도는 적분단원에서 중요한 주제중의 하나인 만큼 GeoGebra를 이용해 원리를 설명하였다면 지필환경에서 설명한 것에 대한 어려움을 해소할 수 있을 뿐만 아니라 시각적 지도효과로 인해 구분구적법의 과정을 오랫동안 인지하도록 할 수 있다고 판단하였다. 그래서 구분구적법을 이용하여 해결할 수 있는 문제 <과제 2>의 (ⅳ)를 제시함으로써 GeoGebra를 이용한 시각적 효과를 기억하도록 지도하였다.

<과제 2>-(ⅳ)를 해결하기 위한 아이디어를 찾기 위해서 분석 대상인 세 학생 A, B, C는 GeoGebra를 이용해 그래프를 그려보면서 극댓값을 가지는 x값이 포함되는 직사각형의 왼쪽, 오른쪽 높이가 직사각형의 개수에 따라 변한다는 사실을 발견하고 증명법을 손쉽게 찾아내었다.

5차시 과제 중 <과제 3>은 스프레드시트를 이용한 부동점을 찾는 과정을 GeoGebra를 이용해 표현하는 것이다. 이 기능은 엑셀의 시트기능과 유사한 스프레드 시트창의 반복기능을 사용하는 것으로써 비교적 단순한 기능이지만 시각적 효과는 뛰어나다. GeoGebra로 표현하기에 앞서 수학적 원리를 찾기 위한 문제를 제시하고 그것을 GeoGebra를 이용해 표현하도록 하였는데, 다음 [그림 Ⅲ-6]에서 [그림 Ⅲ-8]은 세 학생 A, B, C가 제출한 풀이과정이다.

[그림 Ⅲ-6] 부동점풀이 (학생 A) [그림 Ⅲ-7] 부동점풀이 (학생 B) [그림 Ⅲ-8] 부동점풀이 (학생 C)

분석 대상 학생인 A, B, C가 <과제 3>에 대해 제출한 답안을 분석해보면 세 학생 모두 직관적 통찰력과 그래프의 위치관계를 파악하고 분류하여 문제 해결의 전략을 수립할 수 있도록 하는 구조파악의 인지적 특성을 보였다. 세 학생 모두 제시된 예시 그림의 풀이를 통해 곡선과 직선 $y=x$ 교점에 가까이 가기 위해서는, 시행착오를 통해 결국 부동점에서의 접선의 기울기의 절댓값이 1보다 작을 때, 안정부동점(stable fixed point)이 존재한다는 것을 추론해 내었다.

수업 이후에 진행된 면담에서 왜 그렇게 생각했는지에 대한 연구자의 물음에 대다수 학생들은 제시된 그래프 모양에서 곧바로 유추할 수 있었다고 답했으며, 이를 정당화하거나 일반화할 필요성이 있음을 생각했다고 말했다. GeoGebra의 스프레드시트 기능을 이용해 초기값의 위치와 접선의 기울기의 변화에 따라 안정부동점과 불안정부동점의 관계를 이해하고 이것을 일반화시키는 인지적 특성을 보여, GeoGebra의 시각화 기능을 통해 자신의 추론에 대해 정당화하고 자신감을 가지게 하는 장점을 얻을 수 있었다.

6차시의 과제 중 <과제 4>에서 GeoGebra의 기능 중에서 리스트 사용이 처음이기 때문에 자세한 명령어 설명을 통해 접근하는 것이 올바르다는 판단을 하였고, 기능의 사용에 중점을 두기 보다는 수학적 확률과 통계적 확률과의 차이를 주사위 시행을 통해 어떻게 보여주어야 할지에 대한 영재 학생들의 반응을 관찰하는 데 초점을 두었다.

수학영재들은 시행횟수가 늘어날수록 통계적 확률이 수학적 확률에 가까워진다는 '큰수의 법칙'에 대해 수학적으로 엄밀한 증명이 필요하다는 것을 느끼고, 어떤 흐름으로 증명이 되는 지 질문하였다. 증명의 개요를 설명한 뒤, 각자 개인별로 증명을 요약해서 정리해 보는 시간을 가졌는데,. 엄밀한 수학적 증명을 곧바로 도입하는 것 보다는 동기를 유발시킬 수 있는 소재에서 출발했다는 점에서 <과제 4>는 의미가 있다고 판단하였다.

6차시의 과제 중 <과제 5>는 이항분포와 포아송분포, 정규분포를 나타내는 확률분포함수를 이해하고 각 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있어야 해결이 가능하다. 따라서 이에 대한 선행학습 정도를 확인할 필요가 있었는데, 이 과정은 각 분포함수의 그래프를 그린 후

n과 p를 조정하면서 변하는 그래프의 특징을 파악하면서 관계를 추론하였고, 이에 대한 정당화를 위해 수학영재들은 자료의 검색을 통해 증명을 해보려고 하였다. 4~6차시에 나타난 영재 학생들의 인지적 특성을 요약하면 <표 Ⅲ-4>와 같다.

<표 Ⅲ-4> 4~6차시에서 나타난 영재 학생들의 인지적 특성

특성 / 활동	직관적 통찰	논리적 사고	구조 파악	수학적 추론	일반화 및 적용	반성적 사고	유연성
<활동 1>	○	○					
<활동 2>	○	○					
<과제 1>	○						
<과제 2>		○					
<과제 3>	○	○		○	○		
<과제 4>		○					
<과제 5>		○		○	○		

(1) 직관적 통찰

<활동 1>과 <활동 2>에서 수학영재들은 삼각함수의 정의와 라디안을 정확히 이해하고 단위원 위의 점이 회전 이동할 때 회전각의 크기를 x좌표로 하고, 단위원에서의 삼각형의 높이와 밑변, 닮음 직각삼각형의 높이가 각각 $\sin, \cos, \tan$ 값이 된다는 것을 직관적으로 파악하고 있었으며, 삼각함수의 공식 등에 의해 그 관계를 논리적으로 설명하려고 하였다.

<과제 1>의 사이클로이드를 그리는 탐구과제에서 학생들은 완성된 예시의 반복관찰을 통해 자취를 표현하기 위한 핵심적 요소가 무엇인지를 파악해내었다. <과제 3>에서는 안정부동점과 불안정부동점이 생기는 다양한 경우의 예를 손으로 그려보거나 컴퓨터를 이용해 나타내면서 함수와 $y=x$와의 교점에서의 접선의 기울기와 관련이 있다는 것을 직관적으로 파악해내었으며 이는 제출한 풀이지에서 확인할 수 있었다.

(2) 논리적 사고

<활동 1>과 <활동 2>에서는 삼각함수간의 관계식을 이용해 $y=\cos x$ 그래프가 사인그래프를 90° 만큼 회전 이동했다는 사실을 논리적으로 설명하면서 사인그래프와 코사인 그래프의 관계를 이해하였다.

<과제 2>에서는 정적분과 무한급수와의 관계를 이용해 $y=\sin x$의 $[0,\pi]$에서의 정적분 값을 논리적으로 정확히 설명하였고, 이를 GeoGebra를 이용해 확인함으로써 구분구적법의 원리를 학습하였다. <과제 2>-(ⅳ)의 문제를 해결함에 있어서 GeoGebra의 사용을 통한 해결방안을 모색하고 해결결과에 대한 논리적 증명을 제시하려고 하였다. <과제 3>에서 직관적 추론을 통해 함수와 직선의 교점에서의 접선의 기울기에 따라 안정부동점과 불안정부동점의 존재여부를 파악하고, 그 이유에 대해서 논리적으로 설명하였고, 자신의 풀이에 대한 정당성을 다시 한 번 GeoGebra를 통해 확인하려 하였다. <과제 4>에서는 통계적 확률과 수학적 확률의 정의를 이해하고 차이를 수식과 그래프로써 표현하였다. GeoGebra를 이용해 표현된 데이터들에 대해 그 차이를 설명할 수 있는 이론적 근거를 체비셰프 부등식, 큰 수의 법칙 등을 제시하였고 간단한 예를 통해 설명하려 하였다. <과제 5>에서는 이항분포와 포아송 분포에서 시행횟수와 확률에 따라 달라지는 대칭성과 정규분포로의 근사관계를 GeoGebra로 확인한 후, 각 확률 분포의 평균과 분산을 구하는 방법과 실제 실행횟수를 크게 할 때, 확률

밀도함수가 정규분포의 확률밀도함수가 되는 지에 대해 자료탐색과 개인적 연구를 통해 설명하려 하였다.

(3) 수학적 추론

수학영재들이 보인 인지적 특성 중 수학적 추론은 <과제 3>, <과제 4>, <과제 5>에서 나타났다. <과제 3>에서는 함수의 정의역의 초기 값과 함수 모양의 변화에 따라 함수와 직선의 교점에서의 접선의 기울기 변화를 케이스마다 관찰하여 귀납적 결과에 따라 연역적 결론을 추측했던 과정에서 수학적 추론 특성이 나타났다고 할 수 있다. <과제 5>에서는 시행횟수와 확률의 변화에 따라 이항분포와 포아송 분포가 정규분포에 어느 정도 가까워지는 지 관찰하고, 귀납적인 관찰로부터 시행횟수와 확률에 따라 좌우대칭성과 근사정도를 추론하는 과정에서 수학적 추론 특성이 나타났다고 할 수 있다.

(4) 일반화 및 적용

<과제 3>에서 귀납적 관찰로부터 얻은 수학적 추론을 이용해 일반적인 경우로 확장하여 다른 경우에도 적용할 수 있는지를 확인하는 과정과 <과제 5>에서 이항분포와 포아송 분포를 적용할 수 있는 다양한 예들을 수집하고 각 분포가 어떤 경우에 보다 잘 설명될 수 있는지 적용해보려는 과정에서 일반화 및 적용의 특성이 나타났다.

3) 7~9차시에 나타난 수학영재들의 인지적 특성

7~8차시의 <과제 6>인 Hypocycloid와 Epicycloid의 곡선 그리기에서 분석대상 학생 A, B, C를 포함한 대부분의 학생들이 큰 원에 대한 작은 원의 중심의 위치를 상대좌표로 표현하려는 경향을 나타내었다. 2학년인 영재학생들은 벡터를 이용해 작은 원의 위치좌표를 쉽게 구했으며, 1학년 학생들 중에서 몇몇은 벡터를 이용하기도 했으나 대다수의 1학년 학생들은 큰 원의 중심에 대한 작은 원의 중심좌표를 표현한 후에, 작은 원 위의 점을 다시 작은 원에 대한 매개변수 식을 표현하여 두 식을 더하는 방법으로 관계식을 이끌어 냈다.

대부분의 수학영재들은 GeoGebra에서 제공되는 슬라이더 기능을 이용하여 각의 회전변수를 설정하고, 설정한 변수를 이용하여 큰 원에서의 회전과 작은 원에서의 회전을 표현하려고 했다. 이는 앞서 학습한 삼각함수의 그래프 그리기, 사이클로이드의 작성 등의 영향으로 결국 중요한 변수는 각의 회전을 큰 원과 작은 원에 적용해야 한다는 것을 이해한 것으로서 수업 후 면담으로부터 알 수 있었다. 다음은 수업 이후에 세 학생 A, B, C와 나눈 면담내용의 일부이다.

연구자 : 이번 과제에서 가장 어려웠던 점은 무엇이었니?
학생B : 큰 원이 회전하면서 작은 원이 동시에 회전하기 때문에 두 원의 회전하기 위해 매개변수를 몇 개를 둬야하는 지에 대한 문제였습니다.
연구자 : 곡선의 개형을 그려보는 <과제 6>에서 어떤 도움을 받았니?
학생C : 만약 바로 그려보라고 요구했다면 다소 시간이 많이 걸렸을 것 같아요. <과제 6>에서 찾아내었던 매개변수 식에서 결국 중요한 것은 큰 원의 회전각의 크기와 작은 원의 회전각의 크기가 어떤 관계를 갖느냐는 것을 <과제 6>의 문제들을 해결하면서 알게 된 것 같아요.

연구자 : 앞 시간에 배운 슬라이더 예들이 <과제 6>의 해결에 도움이 되었니?
학생A : GeoGebra로 곡선을 그리기 전 <과제 6>의 사전 문제를 풀어볼 때, 즉 손으로 곡선을 유추해보고 관계식을 유도할 때, GeoGebra의 슬라이더 기능에서 각을 변수로 두고 각을 변화시킴으로써 두 원의 회전각을 설정한 변수로 하면 되겠다는 생각을 하게 되었어요.
연구자 : 직접적으로 도움 되었던 과제는 무엇이었니?
학생A : 처음에 배운 삼각함수그래프 그리기와 사이클로이드가 떠올랐던 것 같아요.

면담에서도 알 수 있듯이 <과제 6>은 앞선 과제에 비해 매우 표현하기가 어려운 과제였다. 회전각을 이중으로 표현한다는 것과 이것을 매개변수 하나로 표현해야 한다는 측면에서 복잡하고 어려운 과제였으나 <과제 6>을 해결한 수학영재는 벡터의 개념을 써서 작은 원의 중심의 위치좌표를 손쉽게 찾았고, 큰 원과 작은 원의 회전각의 관계를 알아냄으로써 문제를 해결하였다. GeoGebra로 작성하기 전에 매개변수 식을 유도한 후, GeoGebra로 표현하게 함으로써 매개 변수의 역할을 보다 쉽게, 보다 오랫동안 인지할 수 있도록 한 것이다.

<과제 6>을 수행함에 있어 분석 대상인 세 학생 A, B, C는 벡터를 이용하여 작은 원의 위치좌표를 쉽게 구할 수 있었고, 두 원의 회전각의 관계를 매개변수를 이용해 표현해야겠다는 구조파악능력, 손으로 직접 그려봄으로써 직관적인 통찰을 얻어 작도할 수 있었다는 결론을 얻었다.

9차시의 과제인 매개변수 곡선 또는 스프레드시트를 활용하는 <과제 7>을 해결하기 위해 대부분 학생들이 주어진 명령어를 사용하여 쉽게 작도하였고, 작도한 도형의 관찰을 통해 손쉽게 로그나선의 특징을 파악하였고, 접선 위의 새로운 점의 자취는 주어진 로그나선을 원점을 중심으로 시계방향으로 90° 회전한 도형 위의 점이라는 사실을 작도를 통해 쉽게 유추해내었다. 학생들은 작도된 그래프를 관찰하고 로그나선이 가지는 특징을 직관적으로 파악하였으며, 또한 회전변환을 통해 주어진 그래프를 회전한 후에도 구하고자 하는 문제의 답을 바로 추측할 수 있는 구조파악능력과 직관적 통찰력을 불러일으키는 데 GeoGebra가 도움을 주었다는 데 수업에 참여한 수학영재들의 대다수 의견이었다. 7~9차시에 나타난 수학 영재들의 인지적 특성을 요약하면 <표 Ⅲ-5>와 같다.

<표 Ⅲ-5> 7~9차시에서 나타난 영재 학생들의 인지적 특성

활동 \ 특성	직관적 통찰	논리적 사고	구조 파악	수학적 추론	일반화 및 적용	반성적 사고	유연성
<과제 6>	○	○		○			
<과제 7>	○	○		○			○

(1) 직관적 통찰

<과제 6>을 작도하기 전 Hypocycloid와 Epicycloid를 표현하는 관계식을 유도하였기 때문에 큰 원과 원 내부 또는 외부를 회전하는 작은 원의 회전각의 관계를 좀 더 쉽게 직관적으로 파악하는 모습을 보였다. 이전 차시까지 계속 사용해왔던 슬라이더 도구를 이용해 회전각의 변화를 결정하고 큰 원과 작은 원의 회전각의 크기를 유도하였던 장면과 벡터 또는 상대좌표를 이용해 작은 원의 좌표를 결정하는 핵심적 요소를 찾아내는 장면에서 이와 같은 특성을 보였다. <과제 7>에서는 로그나선의 그래프를 매개변수 식을 이용해 표현한 후, 곡

선 위의 한 점에서의 접선과 원점과 접점을 지나는 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 된다는 증명을 그래프에서 두 직선이 x축과 각각 이루는 각의 크기를 구하고 그 차이가 얼마인지 조사하면 된다는 수학영재들의 관찰에서 직관적 통찰력을 엿볼 수 있었다.

(2) 논리적 사고

<과제 6>에서 큰 원의 회전각과 작은 원의 회전각 사이의 관계를 논리적으로 정확히 유도하고 이를 통해 GeoGebra로 표현했으며, <과제 6>에서는 두 직선이 이루는 각의 크기를 접선의 기울기와 삼각함수 공식을 이용해 정확히 증명해내는 장면에서 엿볼 수 있었다.

(3) 수학적 추론

<과제 6>의 문제를 해결함에 있어서 작은 원의 반지름과 큰 원의 반지름을 각각 변화시키면서 그려지는 다양한 자취를 귀납적으로 관찰하고, 이를 크기간의 관계로 정리하여 하나의 연역적 성질을 정리하는 장면과 <과제 7>에서 곡선 위의 각 점에서 접선을 여러 번 작도해보고 주어진 조건을 만족하는 점의 자취가 곡선 위의 접점을 시계방향으로 90° 만큼 원점을 중심으로 회전한 도형의 자취라는 것을 추론해 내었다.

(4) 유연성

<과제 7>에서 찾아야 하는 점 Q의 자취를 작도함에 있어서 학생들은 매개변수 식을 사용해 간단히 곡선의 그래프를 나타내는 방법과 반복 기능을 이용하게 되는 두 가지 방법으로 GeoGebra를 이용해 표현하려 하였다. 두 번째 방법에서는 곡선 위의 각 점에 대한 좌표와 90° 만큼 회전한 좌표를 스프레드시트를 이용해 구하고 두 점을 선분으로 연결한 것을 이용해 자취를 표현하였다.

4) 10～12차시에 나타난 수학영재들의 인지적 특성

<과제 8>을 해결하기 위한 아이디어를 내보라는 요구에 몇몇 수학영재들의 아이디어는 원에 내접하는 정다각형을 회전시키는 것이었다. 하지만 직접 작도를 해본 결과 사이클로이드와 다르지 않다는 것을 곧 이해하고 어떤 점이 잘못되었는지 파악하였다. 따라서 자신이 학습한 지식과 다른 구조라는 것을 곧바로 파악하고 다른 방법으로 정다각형을 회전시켜야 한다는 결론을 얻었다.

그리고 수업에서 연구자의 부분적인 도움을 필요로 했지만 수학영재들은 문제 해결을 위해 필요한 요소가 정확히 무엇인지 파악했으며 자신의 작도 과정에서 잘못된 것은 없는 지 반성적 사고를 통해 점검하는 모습을 나타내었다. 각의 변화를 반영하는 정다각형의 기준점, 즉 정다각형의 중심과 함께 이동하면서 동시에 정다각형위의 나머지 점들을 회전시킬 수 있는 기준점이 필요하다는 연구자의 도움을 받아 몇 번의 시행착오를 거쳐 완성해내었다.

11차시와 12차시는 정다각형 사이클로이드를 GeoGebra를 이용해 작도해보고 정다각형의 도형의 길이와 면적과 사이클로이드의 길이와 면적간의 관계를 추측하고 이를 수학적으로 증명하는 데 목적이 있다.

<과제 9>를 학습한 후에, 두 팀으로 나누어 한 팀은 정다각형 사이클로이드를 이용해 사이클로이드의 길이를 구하는 과정을, 나머지 한 팀은 정다각형 사이클로이드 이용해 사이클

로이드의 넓이를 구하는 과정에 관한 연구보고서를 제출하도록 지도하였다. 두 과정 모두 미분과 적분, 삼각함수에 대한 상당한 지식과 증명의 기법이 필요하다고 판단하여 참고문헌을 소개하고, 연구 과정에 함께 참여하여 학생들과 함께 연구보고서를 작성하였다. 연구보고서 작성을 위해 정규수업 12차시를 포함해 연구보고서를 완성하고 제출하는 데 약 3주의 시간이 필요했다. 연구보고서 작성이 수학 영재 학생들의 인지적 특성 변화 혹은 정의적 특성 변화에 어떤 역할을 했는지 알아보기 위해 세 학생 A, B, C중에서 학생 A, B는 정다각형을 이용해 사이클로이드의 길이를 증명하는 팀에, 학생 C는 정다각형을 이용해 사이클로이드의 넓이를 증명하는 팀에 유의 배당하였다. 다음은 두 팀의 연구보고서 제출 후에 분석 대상 학생인 A, B, C와 면담 내용 중 일부이다.

연구자 : 연구보고서 작성에서 가장 힘든 점은 무엇이었니?
학생B : 일반화하는 데 가장 큰 어려움이 있었던 것 같습니다. 저희 팀에서는 앞서 배웠던 사이클로이드와 정다각형의 회전과 자취에 관한 내용을 참고로 해서 우선 쉬운 경우부터 차근차근 계산해보았으나 처음에는 정n각형에서 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우가 달라 어려움을 겪었습니다.
학생C : 학생 b가 이야기했던 점 이외에도 삼각함수 계산이라든지 식으로 표현하는 데 서툴러서 많은 어려움이 있었어요.
학생A : 참고문헌과 선생님의 도움이 없었더라면 다소 방향을 잡기가 어려웠을 것이란 생각을 했어요. 또, 제가 1학년이라 계산과정 등이 낯설고 힘들었어요.
연구자 : <과제 9>가 이번 연구보고서 수행에 어떤 도움을 주었니?
학생A : 특수한 경우부터 해보고 일반화시켜야겠다는 생각을 했어요.
학생B : 처음엔 그냥 GeoGebra 로 계산하면 될 것을 굳이 손으로 계산해야 하나라는 생각을 했어요. 하지만 직접 도형을 관찰하고 계산하는 과정을 통해 차츰 원리라는 것을 생각하게 된 것 같아요.
학생A : 좀 더 문제를 단순하게 생각하려고 했던 것 같아요. 정삼각형인 경우부터 손으로 그림을 그려보면서 원리를 찾으려 했던 것 같아요.
연구자 : 연구보고서 작성 시 GeoGebra는 어떤 도움을 주었니?
학생B : 이전 수업까지 배웠던 내용 때문인지 우선 머릿속에서 마치 프로그램을 실행하는 듯한 느낌을 받은 것 같아요.
학생C : 저도 같은 느낌이었어요. 우선 어떤 모양이 그려질지 마치 GeoGebra 화면을 제 머릿속에 넣어둔 것 같았어요.
학생A : 직접 만들어보지 않았다면 저 같은 경우는 상상하기가 힘들었을 것 같아요.

학생들과의 면담 내용에서도 알 수 있듯이 이번 과제는 일반계 학생들에게는 적용하기가 매우 어려운 내용이라는 것을 알 수 있었다. 하지만 <과제 9>와 같이 GeoGebra를 이용한 도입과 앞서 학습한 도형의 회전변환, 슬라이더 도구를 활용한 그래프의 작성 등이 연구보고서 작성에 기초가 되었다는 것을 알 수 있었으며, 특수한 사례에서 일반화를 추론하려는 귀납적 사고의 중요성을 알려주는 계기를 마련했다고 판단하였다. 10~12차시에 나타난 수학영재들의 인지적 특성을 요약하면 <표 Ⅲ-6>과 같다.

<표 Ⅲ-6> 10~12차시에서 나타난 영재 학생들의 인지적 특성

특성 / 활동	직관적 통찰	논리적 사고	구조 파악	수학적 추론	일반화 및 적용	반성적 사고	유연성
<과제 8>	○		○				
<과제 9>	○	○	○		○		

(1) 직관적 통찰

<과제 8>을 해결할 때 영재 학생들은 정다각형을 움직이기 위해서는 정다각형의 중심을 이동시켜야 하고 이를 변수로 표현하면 된다는 것을 직관적으로 이해하였고 이전 차시에서 학습했던 Cycloid, Hypocycloid, Epicycloid 등의 작도와 비교하면서 다른 점을 찾아내고 과제에서 요구하고자 하는 핵심이 어떤 것인지를 비교적 쉽게 찾아내었다. 또한 <과제 9>에서는 이미 사이클로이드에 관한 성질을 이해하고 정다각형 사이클로이드의 면적과 길이가 정다각형과 어떤 관계가 있을 것인지를 추측하여 직접 측정하는 장면을 통해 직관적 통찰력을 엿볼 수 있었다.

(2) 논리적 사고

<과제 9>를 해결하는 데 있어서 가장 핵심이 되는 인지적 특성이라고 할 수 있다. 사이클로이드가 가지는 넓이와 곡선의 길이에 대한 일반적인 성질을 먼저 증명하고 이를 바탕으로 정다각형 사이클로이드 역시 같은 성질을 가질 것이라는 추측에 대한 정당화를 위해 증명에 대한 필요성을 인식하고 팀별로 이를 증명하는 과정에서 이와 같은 인지적 특성이 나타났다고 할 수 있다.

(3) 구조파악

<과제 8>에서는 연구자의 일부 도움이 필요로 했지만 영재 학생들은 문제 해결을 위해 필요한 요소가 정확히 무엇인지 파악했으며 각의 변화를 반영하는 정다각형의 기준점, 즉 정다각형의 중심과 함께 이동하면서 동시에 정다각형 위의 나머지 점들을 회전시킬 수 있는 기준점이 필요하다는 정보를 이용해 문제를 해결할 수 있는 전략을 마련하였다. 또한 <과제 9>에서는 면담내용에서도 알 수 있듯이 일반화하는 데 어려움을 겪으면서도 정다각형의 변의 개수가 홀수인 경우와 짝수인 경우에 따라 다른 정보를 얻을 수 있음을 도형의 관찰과 증명을 통해 이해하고 문제를 해결하려고 하였다.

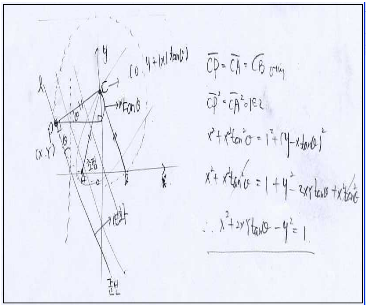
(4) 일반화 및 적용

<과제 9>의 목적은 GeoGebra를 이용한 귀납적 사실의 관찰을 통해 일반화할 수 있는 수학적 사고력과 논리적 사고력을 기르는 데 있다. 기존의 지식으로 알고 있던 사이클로이드의 길이와 면적에 관한 일반적 사실로부터 정다각형 사이클로이드에도 똑같이 적용될 수 있는 지를 알아보기 위해 GeoGebra를 이용해 각각의 성질을 알아보고 이를 수학적 증명을 통해 정리하려고 하였다. 이 과정에서 영재 학생들은 여러 도형(정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형 등)을 반복적으로 관찰하면서 일반적인 성질이 있을 것이라는 추측을 하게 되었고, 이를 수학적으로 증명하는 과정에서 기존의 사실을 이용해 유사하거나 새로운 문제에 적용하는 능력을 보였다고 할 수 있다.

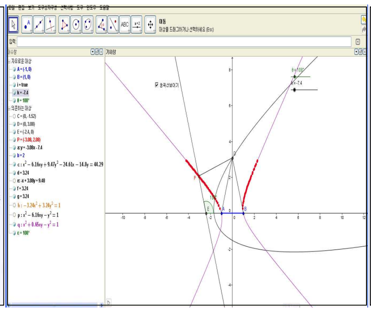
5) 13~14차시에 나타난 수학영재들의 인지적 특성

<과제 10>의 문제(1)을 해결하는 데 있어서 영재학생들은 관찰을 통해 슛팅포인트와 골포스트가 이루는 슛팅각은 작지만 골라인에 가까워질수록 증가하고 더 가까워지면 각이 다시 줄어든다는 것을 쉽게 이해하였다. 또한, 골대를 현으로 하는 원이 주어졌을 때, 슛팅포인트가 원 밖에 있으면 각이 작고 원의 내부에 있는 경우 더 커지는 것을 추론해내었다. 따라서 최적의 슛팅포인트는 선수가 달려가는 직선이 골대를 현으로 하는 원의 접선이 될 때의 접점이 됨을 쉽게 찾아내었다.

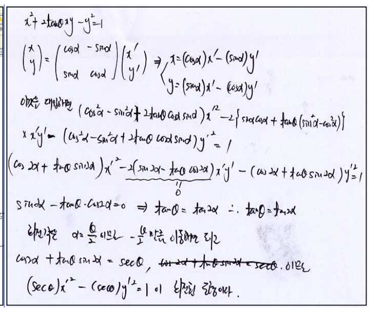
<과제 10>의 문제(3)에서 일정한 기울기를 갖는 직선을 y절편 값이 변하도록 애니메이션 기능을 주어 자취를 남기면 곡선으로 나타나지만 어떤 곡선인지를 명확하게 파악하기가 어렵다. 추측에 대한 정당성을 가질 수 있도록 학생들에게 논리적 계산에 의해 P의 자취의 방정식을 다시 구해보도록 지도하였다. 문제 (3)에서 구한 이차곡선이 표준형(xy 항이 없는 경우)이 아닌 일반형(xy 항이 있는 경우)이므로 이를 회전변환을 통해 표준형으로 고쳐보라고 지도하였다. 이에 학생들은 회전변환을 나타내는 행렬과 이차곡선의 일반형의 xy항의 계수가 0이 되는 회전각의 크기를 구하면 된다는 사실을 이용해 회전각의 크기를 찾았고, 이를 논리적으로 증명하였다. 문제 (3)에서 주축을 x축으로 하기 위해 회전할 각의 크기를 찾는 과정에 대한 학생 c가 제출한 풀이과정은 다음 [그림 Ⅲ-9]에서 [그림 Ⅲ-11]과 같다.



[그림 Ⅲ-9] 문제 (3)의 풀이(학생 C)



[그림 Ⅲ-10] 문제 (3)의 GeoGebra 결과(학생 C)



[그림 Ⅲ-11] 문제 (3)의 주축회전 풀이(학생 C)

<과제 10>의 문제(3)을 해결하는 데 있어서 영재 학생들은 주어진 문제 상황에서 다양한 상황들을 GeoGebra를 활용하여 변수로 설정하고 변화시켜봄으로써 새롭게 얻게 되는 자취를 시각적으로 확인하고 이것을 추측한 후, 논리적인 방법으로 식을 증명해내는 일련의 과정을 나타내었다. 또한, 자신이 작도한 자취와 증명을 통해 얻어낸 식의 일치여부를 확인함으로써 자신의 문제 해결 방법에 잘못된 점은 없는 지 다시 한 번 확인하는 반성적 사고의 태도를 보였다. 13~14차시에 나타난 수학 영재 학생들의 인지적 특성을 요약하면 <표 Ⅲ-7>과 같다.

<표 Ⅲ-7> 13~14차시에서 나타난 영재 학생들의 인지적 특성

활동 \ 특성	직관적 통찰	논리적 사고	구조 파악	수학적 추론	일반화 및 적용	반성적 사고	유연성
<과제 10>	○	○	○			○	

<과제 10>의 문제 (1)에서 제시된 문제 상황을 수학적 문제로 변환하여 파악하며, 원주각의 성질을 이용하여 최적의 슛팅포인트가 선수가 달려가는 직선이 골대를 현으로 하는 원의 접선이 될 때의 접점이 된다는 사실을 직관적으로 이해하고, 문제 상황에서 핵심적 요소가 무엇인지를 알아내어 구조화시키는 내용을 다루었다. 또한 문제 (3)에서 선수가 달려가는 직선이 x축과 수직인 상태에서 θ만큼 각을 이루며 움직일 때도 변하지 않는 성질을 관찰하고 이를 이용해 문제 해결 전략을 마련하였다. <과제 10>의 문제 (2)를 풀이할 때 GeoGebra를 이용해 직접 어떤 자취가 되는 지를 알아본 후 수학적으로 타당한지를 직접 논리적으로 계산하였고, 문제 (3)를 해결하는 경우에도 GeoGebra를 활용해 작도한 후 논리적 계산에 의해 자신의 추측이 정당화되는 지를 알아보는 논리적 사고를 나타내었으며, 회전변환을 이용해 직접 방정식을 구하여 자신의 추측에 대해 정당성을 부여함은 물론 작도의 과정에 오류가 있는 지를 점검하는 반성적 사고를 나타내기도 하였다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구의 목적은 고등학교 수학 영재 학생들을 대상으로 GeoGebra를 활용한 수학 영재 교수・학습 자료를 개발하여 실제 수업에 적용해보고 이 과정에서 나타나는 수학 영재 학생들의 반응과 적용 효과를 알아보는 데 있다. 본 연구의 결과를 정리하여 결론을 제시하면 다음과 같다.

수학 영재 교수・학습자료 자료의 차시별 학습영역은 GeoGebra 프로그램을 활용하여 기본도형의 작도, 슬라이더 도구를 이용한 애니메이션 만들기(함수의 그래프, 도형의 자취, 정적분, 고정점의 탐구, 매개변수 곡선 그리기 등), 과제학습이후 팀별 심화주제에 관한 보고서 작성하기로 이루어졌으며 1차시부터 14차시까지는 주제탐구형으로 수업이 진행되었다.

개발된 교수・학습 자료를 수학 영재학생들에게 적용하였을 때 나타난 인지적 특성은 주어진 정보나 조건들 사이의 관계나 구조의 본질적인 핵심을 직감적으로 파악해내고, 문제해결의 결정적 단서를 떠오르게 하는 특성인 직관적 통찰, 문제해결과 이해과정에 있어서 그 정당성을 뒷받침할 수 있는 근거를 제시하는 특성인 논리적 사고, 주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고, 문제 해결 전략을 사용할 수 있도록 이를 분류하고 조직하는 특성인 구조파악, 유추, 귀납, 연역 등의 방법을 통해 추측해내는 능력인 수학적 추론, 작도과정에서의 오류나 결과의 오류가 발견되었을 때 그 원인을 찾으려 하거나 결과에 대한 분석적 사고인 반성적 사고, 산출된 결과를 이용해 일반화하거나 유사한 상황에 적용하는 일반화 및 적용이다. 이와 같은 인지적 특성은 GeoGebra를 활용한 수학적 모델링 문제, 일반화 문제의 증명, 과제와 관련된 심화문제의 해결에서 보다 강하게 나타났다. 개발하여 적용된 교수・학습 자료를 활용한 수업이 거듭될수록 이러한 인지적 특성이 더욱 드러났으며 이러한 활동을 바탕으로 팀별로 연구 과제를 선정하고 창의적 보고서를 만들 수 있게 되었다. 교수・학습 자료의 적용 효과를 알아보기 위해 제출된 영재학생들의 창의적 산출물에 대한 전문가집단의 검토와 분석 결과 개발된 교수・학습 자료가 학생들의 다양하고 창의적인 사고를 촉진시

키는 데 도움을 주었을 뿐만 아니라 팀별 보고서를 작성하는 데 필요한 수학적 사고력의 향상에도 기여한 것으로 나타났다. 또한, 네 개의 창의적 보고서는 수학 영재 학생들의 창의적 사고는 물론 수학적으로 유의미한 요소를 담고 있는 것으로 평가하였다. 이상의 연구 결과를 바탕으로 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 고등학교 수학 영재들을 위한 교수·학습 자료는 지속적으로 개발되어야 한다. 현재 개발되어 있는 자료들은 대부분 중학교 학생 수준의 영재 자료가 대부분이다. 그러나 실제 현장에서는 고등학교 심화 수준 또는 그 이상의 교수·학습 자료를 필요로 한다. GeoGebra는 이들 수학 영재 교육 자료를 개발하고 적용하기에 매우 알맞은 프로그램이라 할 수 있으며 수학의 다양한 영역에서 심화된 주제를 이용하여 개발되어야 할 것이다.

둘째, 교수·학습 자료를 개발할 때에는 반드시 학생들의 수준 및 특성을 고려하여야 한다. 학생들의 흥미와 수준을 고려하여 제작하되 보다 높은 수준의 수학을 연구하기 위한 동기를 부여하고 연구의 기초를 마련해 줄 수 있는 자료가 되어야 할 것이다.

셋째, 개발된 자료가 영재 학생들의 수학적 사고력 신장에 도움이 되는지, 영재 학생들의 특성을 충분히 반영하였는지 분석할 수 있는 평가 기준이 마련되어야 한다. 본 연구에서는 선행연구에서 쓰였던 수학 영재 학생들의 인지적 특성을 알아보는 평가틀을 이용하였지만 개발된 자료가 수학 영재 학생들에게 적합한 자료인지 확인할 수 있는 객관적인 평가 기준이 마련되어야 할 것이다. 또한 적용 효과로서 영재학생들이 제출한 창의적 보고서에 대한 객관적인 평가 기준이 마련된다면 향후 각종 프로젝트형 과제 혹은 연구형 과제에서 보이는 영재학생들의 수학적 사고능력을 알아보는 데 도움이 될 수 있을 것이다.

참고 문헌

강문봉(2009). 컴퓨터를 활용한 수학적 사고력 신장 방안. 과학교육논총, 22(1), 37-53.
강숙희, 장영숙, 박숙희, 정태희, 임희준(2000). 영재 교수·학습자료 개발 연구. 한국교육개발원.
고윤아(2011). GeoGebra를 활용한 로그함수단원의 지도방안연구. 한국외국어대학교 석사학위논문.
교육인적자원부(2007). 제 2차 영재교육진흥종합 계획. 교육인적자원부.
교육과학기술부(2013). 제 3차 영재교육진흥종합 계획. 교육과학기술부.
김민영(2010). GSP를 이용한 영재 프로그램 개발: 기하평균을 중심으로. 제주대학교 석사학위논문.
김상훈(2007). 작도를 활용한 수학영재 교육 자료의 개발 및 적용. 한국교원대학교 석사학위논문.
박윤미(2004). 수학 영재교육에 있어서 GSP의 활용 방안. 창원대학교 석사학위논문.
박태형(2011). 로고프로그램을 활용한 수학영재교육 학습자료 개발연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
성해석(2011). 복소평면과 만델브로 집합을 이용한 복소수 지도방안. 충남대학교 석사학위논문.
송상헌(1996). 수학 영재 교육 프로그램을 위한 수학적 영재성의 정의와 판별의 이론적 고찰. 대한수학교육학회 논문집, 6(2), 271-294.
신혜미(2012). GeoGebra를 활용한 수학과 특별활동에 관한 연구. 한양대학교 석사학위논문.
양성현(2012). 수학 교수학습에서 GeoGebra의 역할과 활용 방안에 관한 연구. 성균관대학교 박사학위논문.
이경화(2001). 수학 영재 교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. 수학교육연구, 13(3), 365-381.
이근주, 조민식(2006). 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 추론능력 평가에 관한 연구. 한국학교수학회논문집, 9(4), 459-479.
이명기(2012). GeoGebra를 활용한 수학영재 교수학습 자료 개발 적용. 한국교원대학교 석사학위논문.
이상혁(2003). 고등학교 이차 곡선 지도를 위한 학습자료 개발. 석사학위 논문. 고려대학교.
이상희(2012). GeoGebra를 활용한 부등식 영역의 최대-최소 학습 지도. 한국교원대학교 석사학위논문.
이상희, 이종학, 김원경(2012). 부등식 영역의 최대.최소 문제에서 학생들의 수학적 사고에 GeoGebra가 미치는 영향, 교원교육, 28(4), 1-44.
정자욱(2012). GeoGebra를 이용한 미적분 수업의 질적 사례연구. 건국대학교 석사학위논문.
조완영, 권성룡(2000). 컴퓨터공학의 도입을 위한 수학교육연구의 방향. 수학교육, 39(2), 179-186.
최남광(2008). 중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
최상근(2008). 제 2차 영재교육진흥종합계획과 영재교수학습센터의 역할, 한국교육개발원 영재교육센터, newsletter, 5(1), 1-5.
최이정(2011). 공학적 도구 GeoGebra를 활용한 효과적인 수학 수업지도 방안. 숙명여자대학

교 석사학위논문.
최종현(2004). 주제탐구형 수학영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. 경인교육대학교 석사학위논문.
최종현, 송상헌(2005). 주제탐구형 수학영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. 학교수학, 7(2), 169-192.
최한나(2009). 동적기하환경과 중등기하탐구. 상명대학교 석사학위논문.
황동주(2006). 수학영재를 위한 행동특성 검사도구 개발. 한국학교수학회 논문집, 9(3), 405-424.
황우형, 차순규(2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례연구. 대한수학교육학회지. 41(3), 341-360.
허수진(2010). 택시기하를 활용한 수학영재 교수학습 자료의 개발 적용. 이하여자대학교 석사학위논문.
홍성관(2000). GSP를 활용한 대칭의 응용에 관한 지도방안에 관하여. 부산사대논문집, 39, 131-143.
Erhan S, H. Lingguo B. & Markus, H.(2009). Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra. MSOR Connections, 9(2). 24-26.
Feldhusen, J. F., Hoover, S. M., & Sayler, M. F.(1990). Identification of gifted students at the secondary level. Monroe, NY: Trillium.
Ficici, A.(2003). International teachers' judgment of gifted mathematics student characteristics (Doctoral Dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database(UMI No. 3118947).
Garofalo, J.(1993). Mathematical problem preferences of meaning-oriented and number-oriented problem solvers. Journal for the Education of the Gifted, 17 26-40.
Greenes, C.(1981). Identifying the gifted student in mathematics. Arithmetic Teacher, 28, 14-18.
Hohenwarter, M.,& Lavicza, Z.(2010). GeoGebra its community and future.
House, P. A.(1987). Providing opportunities for the mathematically gifted, K-12. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
Krutetskii, V. A.(1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press.
National Council of Teachers of Mathematics(1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author. 구광조, 오병승, 류희찬 공역(1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.
Samara, J. Curry, J.(1990). Writing units that challenge gifted students: A guide book for & by educators. MA: Maine Educators of the Gifted and Talented.
Sheffield, L. J.(1999). Developing Mathematically Promising Students. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Development of teaching and learning materials by using GeoGebra and it’s application effects for high school mathematically gifted students

Kim, Mu Jin[1)] · Lee, Jong Hak[2)] · Kim wonkyung[3)]

Abstract

The purpose of this study is inquire the reaction and adaptability of the math ematically gifted student, in the case of introduce learning materials based on G eoGebra in real class.

The study program using GeoGebra consist of 'construction of fundamental fi gures', 'making animation with using slider tools' (graph of a function, trace of a figure, definite integral, fixed point, and draw a parametric curve), make up th e group report after class. In detail, 1st to 15th classes are mainly problem-solv ing, and topic-exploring classes. To analyze the application effects of developed learning materials, divide students in four groups and lead them to make out th eir own creative products. In detail, guide students to make out their own repor t about mathematical themes that based on given learning materials. Concretely, build up the program to make up group report about their own topics in six we eks, after learning on various topics.

Expert panel concluded that developed learning materials are successfully stim ulate student's creativity in various way, after analyze of the student's activitie s. Moreover, those learning programs also contributed to the develop of the mat hematical ability to thinking that necessary to writing a report. As well, four cr eative products are assessed as connote mathematically gifted student's creative thinking and meaningful elements in mathematical aspects.

Key Words: Science high school, Mathematical gifted education, GeoGebra, Creative thinking.

Received August 22, 2014
Revised September 24, 2014
Accepted September 25, 2014

1) Korea National University of Education Graduate School of Education(superjin1@hanmail.net)
2) Daegu National University of Education(mathro@dnue.ac.kr)
3) Korea National University of Education(wonkim@knue.ac.kr)

[부록 1] 보고서에 대한 면담 내용

연구자: 짧은 시간에 결과 보고서를 제출하느라 힘들었지?
학생 B: 처음에는 어디서부터 시작해야할지 어떤 결과를 만들어야 되는지 몰라 좀 헤맸던 것 같아요. 그런데 팀원들과 계속된 토론을 통해 차츰 방법과 내용을 알게 된 것 같아요.
연구자: 혼자보다는 팀으로 과제를 해결했던 것이 앞으로 다양한 연구를 해나가는 데 많은 도움이 될 거야. 그럼 각 조별로 고민했던 점 또는 힘들었던 점들에 대해 이야기를 해볼까?
학생 A: 저는 1학년이라 선배님들과는 달리 R&E보고서 작성의 경험이 없어 사실 참 많이 막막했어요.
연구자: 선생님하고 수업하면서 가장 힘들었던 점이나 좋았던 점은 없니?
학생 A: 사실 저는 지금까지 수학 문제를 많이 풀거나, 선행위주의 공부만 해왔는데 GeoGebra를 활용한 다양한 주제의 수학문제를 관찰하고 분석하고 풀어냈다는 점이 참 신기했어요. 중학교 때 GSP를 이용해 기본적인 작도를 해봤는데요. 그냥 따라하는 식이 대부분이었는데 선생님하고 수업할 때는 주제와 관련된 다양한 문제를 풀어 보면서 좀 더 깊이 있게 공부한 것 같아요. 그런데 말이죠. 처음 배우면서 가장 힘들었던 것은 완성된 예시를 보면서 수학적으로 분석하고 작도방법을 찾아내던 것이었어요. 하지만 다양한 예를 통해 반복적으로 관찰하면서 점점 익숙했던 것 같아요.
학생 B: 수업의 흐름이 다소 빠른 감도 좀 있었기는 한데요. 처음 몇 시간동안 기능연습을 하고 나서부터는 따라갈 수 있었던 것 같아요. 처음에는 선생님께서 계속 완성된 예시를 보여주면서 작도할 수 있는 방법에 대해 토론해보라는 것이 말이 안되는 것이라 생각했어요. 그런데 기능을 좀 배우고부터는 수학적인 핵심요소를 파악하려 했던 것 같아요. 어떤 수학적 문제를 볼 때 핵심적 요소가 무엇인지, 어떤 부분이 가장 중요한 본질인지를 찾으려는 습관이 든 것 같아요.
학생 C: 저는 GeoGebra 의 많은 기능에 놀랐던 것 같아요. 다양한 명령어의 쓰임새를 익히는 것이 좀 힘들었긴 해요. 그래도 선생님이 주신 다양한 주제를 통해 많이 배운 것 같아요. GeoGebra로 표현되는 다양한 주제를 배우면서 수학 문제를 보는 눈이 좀 달라진 것 같아요. 좀 더 음....분석적인 면을 배웠다고 해야 하는지. 아니면 수학적 모델링 같은 것을 하면서 다른 소재들을 GeoGebra를 이용해 좀 더 표현해볼 수 없을까라는 생각이 많이 났어요.
연구자: 우리가 앞서 공부했던 내용들이 주제를 공부하는 데 도움이 됐니?
학생 A: 마주치는 문제들을 일단 분석하고 추측하고 GeoGebra로 표현하려고 노력했어요. GeoGebra를 이용해서 선생님한테 배웠던 기능이외에도 더 많은 기능을 알았더라면 더 많은 문제들을 연구해볼 수 있겠단 생각을 했어요.
학생 B: 저는 특히 기억에 남는 것이 있는데요. 정다각형 사이클로이드와 최적의 슛팅포인트 찾기였는데요. 앞에 것은 팀별로 책을 찾아보면서 직접 증명해봤다는 것에 뿌듯했어요. 선생님의 도움이 많이 필요하긴 했지만 그래도 저희가 완성할 수 있었다는 것에 보람을 느꼈어요. 최적의 슛팅포인트를 찾는 문제에서는 실생활과 관련된 문제를 분석해보는 것이 재미있었던 것 같아요. 다양한 상황을 GeoGebra로 표현해보고 또 증명해보면서 문제 보는 시각이 좀 바뀐 듯 했어요.
연구자: 짧은 시간에 많은 내용을 소화하고 따라오느라 힘들었을 텐데 배운 것이 있다니

선생님도 참 기분이 좋구나. 그럼 이번에는 각 조별 연구주제에 대해 이야기해볼까? 우선 2조에 속했던 B부터 이야기해보자. 어떤 주제였는지, 어떤 목적으로 만들게 되었는지 한번 이야기해볼래?

학생 B: 저희 2조는 GeoGebra를 공부하면서 주로 배웠던 슬라이더 도구 기능과 스프레드시트 기능을 이용해 포락선(Envelope)을 이용해 다양한 곡선 또는 자취를 만들어보는 것이었어요. 수업시간에 잠깐 언급해주셨던 포락선과 String art가 생각이 나서 포락선으로 생성할 수 있는 자취가 무엇이 있을까를 고민하던 끝에 한 번 만들어보기로 했어요.

연구자: 이 주제를 연구하는 데 있어서 앞서 배웠던 내용 중 어떤 것들이 가장 도움이 된 것 같니?

학생 B: 우선 GeoGebra 의 다양한 기능이 기본이 되었어요. 다양한 주제를 공부하면서 생각이 뭐랄까요. 음...좀 넓어졌다해야하나? 평소 수학프로그램을 이용해 표현하고 어떤 조건에 따라 어떤 모양으로 변하는 지 관찰해보고 싶다는 생각을 했었는데 직접 구현해 볼 수 있어서 좀 더 깊게 관찰할 수 있었던 것 같아요.

연구자: 그럼 이번에는 C가 속했던 3조에 대해 얘기해볼까?

학생C : 저희 3조는 수업시간에 배웠던 스프레드시트와 애니메이션 기능을 이용해 날아가는 물체에 대해 탐구했어요. 수업시간에 공식적으로 벡터를 자세하게 배우지는 않았으나 선생님께 저희 조가 개별적으로 찾아가서 배웠던 것을 이용했어요.

연구자: 물리와 수학적인 내용이 융합된 주제인데. 어떻게 시도하게 되었니?

학생 C: 저희 3조에는 물리에 관심 있는 학생이 4명중 3명이었는데요. 날아가는 물체의 궤적에 영향을 주는 다양한 변인을 벡터로 표현하고 궤적을 GeoGebra를 이용해 시각화해보자는 의견이 나와 시도하게 되었어요.

연구자: 이 주제를 해나가는 데 물리 선생님의 도움이 필요했니?

학생 C: 아니요. 학교에서 배우는 책을 활용했어요. 책에서 보던 그림을 직접 변인을 조작해가며 바뀌는 현상을 관찰하는 것 같아 재미있었던 것 같아요. 그리고 앞서 다양한 주제를 통해 GeoGebra로 표현했던 활동들이 자극제가 된 것 같아요.

연구자: 직접 변인을 통제해가며 수학적으로 관찰하겠다는 발상이 좋은데.

학생 C: 네. 감사합니다.

연구자: 자 그럼 마지막으로 A가 속했던 4조 이야기해볼까?

학생 A: 저희 조는요. 음. 선배님들이 1학년 논술 시간에 배웠던 정폭 도형을 주제로 직접 그려보고 정폭 드릴을 이용해 원하는 구멍을 뚫을 수 있을까?라는 생각으로 출발했어요. 다른 팀도 마찬가지였겠지만 연구된 바가 많이 없어서 좀 힘들었던 것 같았어요. 그래서 많은 시행착오를 겪으면서 하나씩 배운 것 같아요.

연구자: 연구서에서 회전체와 회전중심의 회전각속도의 비, 회전체의 폭과 회전 중심의 지름의 비에 따라 나타나는 자취를 분류했구나. 표를 이용해 잘 정리하긴 했으나 이론적 정리가 다소 부족했다는 느낌이 들더구나. 수학적으로 증명이나 원리를 좀 더 제시해줬다면 더 좋은 보고서가 됐을 것 같아.

학생 A: 네. 선생님말씀대로 그 부분을 저희도 생각했어요. 좀 더 연구시간이 있었다면 다시 도전해 봤을 거예요. 연말에 출간되는 동아리지에 이 문제를 싣고 수학적 원리를 제시할 수 있도록 한 번 도전해 볼게요.