한국학교수학회논문집 제 17 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 17, Number 4, 507-539, December 2014

중학교 1학년 학생의 대수적 표상 전환 및 정교화 연구

이경림[1] · 강정기[2] · 노은환[3]

문자 기호 사용으로 대표되는 대수는 수학 전반에 그 영향력을 행사하는 중요한 도구로 자리매김하게 되었다. 이러한 대수를 적절히 활용하기 위해서는 무엇보다 주어진 문제 상황을 적합한 대수적 표상으로 전환하는 작업이 요구된다. 그러나 문장제에 관한 몇 가지 연구로부터 이러한 전환의 어려움이 보고되고 있다. 본 연구에서는 학생들이 주어진 문장 표상과 기하 표상 각각을 대수적 표상으로 전환 및 정교화하는 과정을 살펴보는데 초점을 두었다. 중학교 1학년 학생 29명을 대상으로 하여 문장으로 기술된 상황과 도형 표현이 추가된 상황을 제시하고 각 상황에서 요구하는 바를 대수적 표상으로 전환하는 능력을 조사한 결과 도형 표현을 대수적 표상으로 전환하는 하나의 문항을 제외하고 나머지 3개의 문항에서 10% 내외의 학생이 부적절한 응답을 하였다. 나아가 그 중 임의 추출한 네 명을 개별 면담함으로써 사고 특징 및 대수적 표상 정교화를 돕는 요인을 조사하였다. 그 결과, 대수 표상 정교화 과정은 급진적이 아닌 점진적 개선 과정임을 확인할 수 있었다. 그리고 대수적 표상 정교화를 요하는 문제에 대해 문제 요구 사항에 대한 오해가 있을 수 있음을 확인할 수 있었다. 또한 자신의 대수적 표상에 대한 설명과 구체적 수치 상황 제시가 정교화에 도움이 되는 요인으로 작용하는 것을 목격하였으며, 아울러 정교화의 경험은 전이력을 가질 수 있음을 확인할 수 있었다. 한편, 변수에 관한 오개념 등식 설정에 고착된 사고는 표상 전환의 방해 요소로 작용할 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 결과로부터 대수적 표상 전환 및 정교화를 돕기 위한 몇 가지 교육적 시사점을 도출하였다.

주요용어 : 문장 표상, 기하 표상, 대수적 표상, 표상 전환 및 정교화

Ⅰ. 서론

문자 기호 사용으로 대표되는 대수는 오늘날 학교 수학의 중심으로 자리 잡고 있다. 학교 수학에서 문자와 식이 그 중심에 놓여 있으며, 중학교 수학의 가장 큰 특징 중 하나는 문자 기호의 도입에 있다는 연구 결과도 쉽게 접할 수 있다(Amerom, 2003; Kieran & Chalouh, 1999). 대수는 활용도가 매우 높으며, 대표적 예로 문장제의 해결을 들 수 있다. 문장제는 문자식의 활용을 통해 분석적 접근이 가능하게 되며 해결이 용이하게 된다. 이와 같은 맥락에서 Coy(2001)는 문장제 상황을 대수적 구조로 표현할 수 있을 때 문제를 더욱 잘 해결할

---

1) 진주교육대학교 대학원 (gayemom@hanmail.net)
2) 교신저자, 남산중학교 (jeonggikang@gmail.com)
3) 진주교육대학교 (idealmath@gmail.com, ehroh@cue.ac.kr)

수 있다고 지적하기도 하였다. 기하에서도 대수의 활용은 두드러진다. 기하에 좌표가 도입됨으로써, 기하 역시 대수화 할 수 있게 되었으며 대수적 해법이 가능하게 되었다. 해석 기하학은 기하에 대수가 접목되면서 이루어진 대표적 쾌거이다.

대수를 활용한 문제 해결이 원활히 수행되기 위해서는 문제 상황을 적절한 문자식으로 전환하는 능력이 요구된다. 즉, 문제 상황을 대수화하는 능력이 대수 활용의 첫 걸음인 것이다. 구체적으로 문장제의 해결을 위해서는 문제 상황을 문자식으로 전환하는 것이 급선무이며, 이후 대수식을 조작하여 그 해를 구하게 된다. 그리고 마지막으로 구한 해를 문제 상황에서 해석하는 일련의 절차를 거치는데, 이 과정의 서두는 단연 문제 상황을 문자식으로 전환하는 것이다.

그런데 많은 학생들은 문제 상황을 문자식으로 전환하는데 어려움을 겪는 것으로 보고되고 있다. 문장제 해결에 관한 연구가 대표적인 예에 해당한다. 특히, 문장제에서 언어로 쓰여진 것을 수학적 언어로 전환함에 있어 어려움을 느끼고 있다(박정아·신현용, 2005; 이은영, 2010; 서지영, 2011; Mayer, 1983; Ng & Lee, 2009). 그러나 문장제에 관한 기존 연구는 문제 상황을 대수화하는 부분에 초점을 두기보다 해결의 전반적 과정에 주목함으로써(김진호·김경미·권혁진, 2009; 박장희·유시규·이중권, 2012; 서지영, 2011; Benko, et al., 1999; Jitendra, et al., 1998), 문제 상황을 문자식으로 전환하는 과정에서 직면하는 어려움이 구체적이지 못한 한계를 지닌다.

대수를 활용한 문제 해결을 위해서는 문제 상황을 필연적으로 적절한 문자식으로 전환해야 하는 만큼, 이 부분에 대한 학생들의 능력을 파악하고 그들의 인식을 파악하는 것은 대수 활용 교육의 기반을 다지는데 필수적인 선행 작업일 것이다. 이에 본 연구에서는 기존의 연구와는 차별되게 문제 상황에 대한 문자식 전환 부분에 초점을 두어 이 부분에 대한 학생들의 반응과 인식을 집중적으로 조사해 보고자 한다. 이를 통해 궁극적으로 대수 전환에서 직면하는 어려움을 구체화함으로써, 대수 활용 교육의 기반을 다지고자 한다.

여기서 '전환(transition)'은 주어진 문제 상황을 문자식으로 변환(transformation)[4]하는 과정을 의미한다. 그런데 문제 상황에 적합하지 않은 문자식으로 전환한 경우에는 문자식에 대한 검토를 통한 개선의 과정이 요구된다. 본 연구에서는 이를 '정교화'라는 용어로 대신하였다. 즉, 최초 문제 상황을 문자식으로 변환하는 과정은 '전환'으로, 이미 전환된 불완전한 문자식을 적절한 문자식으로 교체하는 과정은 '정교화(elaboration)'로 두 용어를 구분하여 다루고자 한다. 여기서 정교화는 충분히 설명되지 않은 것을 좀 더 엄밀하게 해나간다는 의미가 아니라, 잘못된 것에 대한 수정의 의미를 지닌다.

한편, 중학교 1학년은 문자와 식을 본격적으로 학습함으로써 대수 활용을 위한 기초를 다지는 중요한 시기이다. 따라서 중학교 1학년 학생들의 문제 상황에 대한 대수 전환 능력은 향후 대수를 활용한 문제 해결 능력에 지대한 영향을 미치게 된다. 이에 본 연구에서는 중학교 1학년 학생을 대상으로 대수로의 전환 및 정교화에 대한 연구를 시도해 봄으로써, 대수를 활용한 문제 해결 교수를 위한 교수학적 시사점을 얻고자 한다. 이를 위해 다음의 연구 문제를 설정하였다.

4) 여기서 전환은 주어진 문제 상황을 문자식으로 고치는 것인 반면, 변환은 전환까지 포함하는 표상 간의 변화를 나타내는 보다 포괄적인 개념이다.

1. 중학교 1학년 학생들의 대수적 표상 전환 능력은 어떠한가?
   1) 중학교 1학년 학생들의 문장 표상의 대수적 표상 전환 능력은 어떠한가?
   2) 중학교 1학년 학생들의 기하 표상의 대수적 표상 전환 능력 어떠한가?
2. 연구 문제 1에서 어려움을 보인 학생들의 인지적 특성은 무엇인가?
   1) 문장 표상의 대수적 표상 전환에 어려움을 보이는 학생의 인지적 특성은 무엇인가?
   2) 기하 표상의 대수적 표상 전환에 어려움을 보이는 학생의 인지적 특성은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

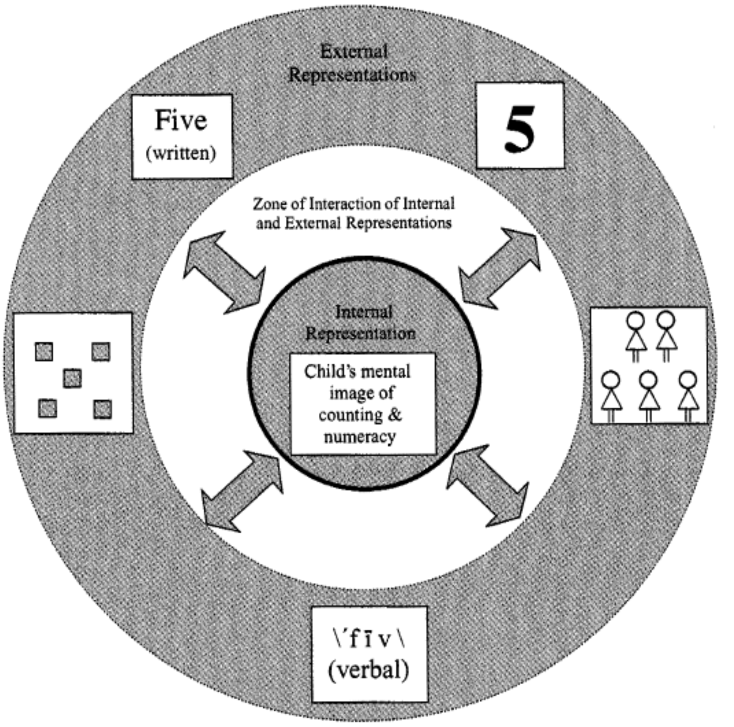
1. 표상의 변환

일반적으로 표상은 수학을 수행하는 학생들의 마음속에서 ‘내적으로’ 발생하는 과정 및 결과 뿐 아니라 ‘외적으로’ 관찰 가능한 과정 및 결과를 모두 일컫는다(NCTM, 2000). 이러한 표상에 대해 전자는 내적 표상, 후자는 외적 표상으로 구분하여 생각한다(Goldin & Shteingold, 2001; Miura, 2001). 내적 표상과 외적 표상의 구분은 연구자의 관점에 따라 조금씩 차이가 난다. 장혜원(1997)은 그의 연구에서 내적 표상은 ‘표상’, 외적 표상은 ‘표현’으로 용어를 달리하여 설명하면서 이 둘을 포괄하는 의미로 ‘표상’이라는 용어를 사용하였다. 즉, 표상은 표, 그림, 그래프 등과 같은 외적으로 관찰 가능한 표현을 포함할 뿐 아니라 학생들의 인지 속에서 발생하는 것을 포괄하는 의미인 것이다.

이에 반해 Miura(2001)는 의미 공유의 측면에서 표상을 구분하여 설명하고 있다. Miura(2001)는 외적 표상을 ‘교육에서의 표상’이라 명명하면서 이는 교수자와 학습자 사이의 커뮤니케이션을 통한 의미공유로 형성되며, 정의, 예, 모델을 외적 표상의 예로 들었다. 내적 표상은 수학적 개념이나 문제 해결법의 발견에 대해 스스로 구축하는 과정으로서 다른 사람과 공유하지 않고 학생 안에서 일어나는 작용으로 보고, 이를 인지적 표상이라고 불렀다.

내적 표상과 외적 표상은 상호 작용하게 되는데, Pape & Tchoshanov(2001)는 수 개념 이해의 발달 과정에서 내적 표상과 외적 표상의 관계를 다음과 같이 묘사하고 있다. 아이가 5의 다른 여러 표상의 의미를 형성하기 시작하면서 아이는 더 많거나 더 적은 것과 같은 비교를 하기 시작할 때, 이 표상들을 사용할 수 있게 된다. 그리고 5의 시각적 이미지는 다른 대상의 집합과의 비교를 위한 기준으로서 상상되고 작용될 수 있게 된다. 다음 [그림 Ⅱ-1]은 이 같은 비교를 용이하게 하도록 돕는 여러 외적 표상과 내적 표상 간의 상호 작용을 묘사한 것이다.

내적 표상은 관찰 불가능한 한계를 지니기에 표상을 연구하는 학자들은 외적 표상에 주목할 수밖에 없다. 이에 본 연구에서는 표상을 외적으로 관찰 가능한 표, 그림, 그래프, 언어, 기록 등을 포함한 표현을 의미하는 것으로 사용할 것이다.



[그림 Ⅱ-1] 수 개념 이해의 발달 과정에서 내적 표상과 외적 표상의 관계(Pape & Tchoshanov, 2001)

한편 표상 간 상호 작용은 외적 표상 간에도 끊임없이 이루어진다. Bruner(1966)는 EIS 이론에서 활동적 표상(Enactive representation), 영상적 표상(Iconic representation), 기호적 표상(Symbolic represenation)으로 외적 표상을 구분하여 이들 표상들이 단계에 따라 순차적으로 발달한다고 보았으며, 궁극으로 기호적 표상이 활발하게 진행되는 것이 지적 발달이라고 설명하였다.

그러나 Bruner의 EIS 이론은 표상 간 상호 변환 과정에 대해 설명의 한계가 지적되었으며, Lesh(1979)는 이를 보완한 모델을 제시하였다. 그는 5개 유형의 외적 표상으로 실세계 상황, 구체적 조작물, 그림, 언어적 기호, 수학적 기호를 제시하였으며, 이들 간의 자유스러운 상호 관계를 강조한 모델을 제안하였다. 그는 표상 간의 변환만을 강조하는데 그치지 않고 표상 내부에서의 변환 활동도 강조하였다. 또한 그는 아동들이 수학적인 아이디어를 다양한 방법으로 탐구하고 다양한 변환 활동을 경험할 수 있는 풍부한 기회가 제공될 때 아동들의 수학 학습이 향상된다고 주장함으로써, 변환 활동이 수학적 개념 형성 뿐 아니라 문제 해결 과정에서도 중요한 역할을 한다고 지적하였다.

외적 표상 간 상호 작용은 곧 표상의 변환 과정으로 이해할 수 있으며, 결국 문제를 올바르게 해결하기 위해서는 주어진 표상을 효과적으로 변환하는 것이 필요하다. 특히 대수를 활용하여 문제 상황을 해결하기 위해서는 주어진 표상을 기호적 표상으로 변환하는 과정이 필수적이다. 특히 문장 상황을 대수 기호로 전환하는 과정에서 등장하는 대수 기호는 문장

제 해결의 중요한 매개 도구이며, 우리는 이를 대수적 표상이라 명명할 것이다. 또한 Lesh(1979)의 구분을 기반으로 언어적 기호만으로 이루어진 문장제를 문장 표상으로, 언어적 기호에 그림이 더해진 문장제를 기하 표상으로 명명할 것이다. 따라서 본 연구에서 다루는 문장 표상과 기하 표상은 모두 문장제에 한해 다루어지는 용어이다.

대수적 표상 전환과 관련한 연구는 문장제가 주류를 이루며, 문장제 연구에서 몇 가지 형태의 대수적 표상 전환 오류를 접할 수 있다. 구체적으로 서지영(2011)에 의하면, 다양한 문장제를 통해 식을 세우지 못하고 계산의 결과로 나타나는 몇 가지 수치만을 기록한 사례, 괄호 사용의 미숙, 덧셈 기호의 생략, 서로 다른 대상을 하나의 미지수로 둔 경우 등의 오류를 보고하였다. 또한 이은영(2010)에 의하면, 속력-시간-거리 문장제를 통해 빠른 속력으로 가는데 걸린 시간에서 느린 속력으로 가는데 걸린 시간을 빼어 시간의 차로 계산한 사례, 시간의 차를 덧셈으로 잘못 연산한 경우, 속력-시간-거리에 관한 공식을 잘못 적용한 경우 등의 오류를 보고하였다. 이들 연구에서는 이외에도 전환된 대수 방정식의 해결에서 범한 오류까지 포함되어 있어 대수적 표상 전환 그 자체에서 빚어지는 어려움이 구체적이지 못하다.

이에 본 연구에서는 대수를 활용한 문제 해결에서 필연적으로 마주치게 되는 '문제 상황을 대수적 표상으로 전환하는 과정'에 주목하여, 이 부분에 대한 중학생들의 능력과 인식을 파악해 봄으로써, 대수 활용 문제 해결 교수의 기반을 다지고자 한다.

2. 대수의 활용

대수(Algebra)는 한마디로 정의하기 어려운 다각적 맥락을 지닌 개념이지만, 김성준(2004)은 대수 교육 연구를 세 가지로 구분했다. 첫 번째는 16세기 이전의 대수 교과서에서 볼 수 있듯, 방정식의 풀이를 중심으로 문제 해결을 강조한 정의이다. 두 번째는 기호의 사용에 초점을 맞춘 정의이다. 세 번째는 패턴과 관계를 강조한 정의이다.

또한 Usiskin(1988)은 다양한 상황에서의 변수 의미를 구체적으로 설명하기 위해 대수를 일반화된 산술, 문제해결 수단, 양 사이의 관계 연구, 그리고 추상적 구조 4가지로 구분하고 있다. 그가 제시한 대수 맥락에 따른 변수 의미는 다음과 같이 요약될 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 대수 맥락에 따른 변수의 다양한 의미

대수 맥락	변수의 의미	예
일반화된 산술	패턴의 일반화 도구 다가이름으로서의 부정소	$a+b=b+a,\ n \cdot 0=0$
문제해결 수단	미지수: 해에 대한 자리지기	방정식 $5x+3=40$
양 사이의 관계 연구	독립변수, 종속변수, 매개변수	$A=LW$ (A: 직사각형의 넓이, L: 가로의 길이, W: 세로의 길이)
추상적인 구조	형식적 조작의 대상	$3x^2+4ax-132a^2$의 인수분해 문제

이러한 구분은 대수가 갖는 다양한 맥락을 보여준다. 즉, 대수는 하나로 정의하기 어려운 복합적 측면을 지닌 개념인 것이다. 대수에서 변수의 다양한 쓰임새는 대수식 이해를 어렵

게 하는 주요 요인 중 하나가 될 수 있다. 이를테면, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$에서 변수 a, b, c는 이차함수의 다양한 패턴을 일반화하기 위해 도입된 변수로서의 역할을 한다. 즉, 이 변수들은 정적 측면의 다가이름(Polyvalent name)을 나타내는 것이다. 반면, 변수 x, y는 각각 독립 변수와 종속 변수로서 함수적 관계를 구성하는 변수로서의 역할을 한다. 이 변수들은 동적 측면의 대상을 나타낸다. 이러한 점을 주지하지 못하고 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$에 나타난 모든 변수를 동일 맥락에서 바라보게 되면 대수식 $y = ax^2 + bx + c$을 올바르게 이해할 수 없게 된다(강정기, 2013).

변수가 다양한 맥락을 지닌 만큼 그 발달 역시 수준을 달리한다. Küchemann은 문자 이해 수준을 4단계로 구분하였다. 1 수준은 대수 구문의 이해와 문자식 계산에 있어서 불완전한 능력을 보이는 수준이다. 2 수준은 대수 기호를 올바로 사용하고 대수 구분을 바르게 이해하는 수준이다. 3 수준은 문제의 구조가 간단한 경우에 한에서 문자를 미지수로 다룰 수 있는 경우이다. 4 수준은 구조가 좀 더 복잡한 문제에서도 문자를 미지수로 다룰 수 있는 수준이다(김남희, 1997).

그렇다면 대수는 어떻게 활용되고 있는가? 변수는 일반성을 대표하는 문자이므로 일반화된 산술의 맥락에서 자주 활용될 수 있다. 이를테면, 일반적인 계산 법칙 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$은 일반성을 함의한 변수 a, b를 통해 간결하면서 압축적인 표현이 가능하게 된다. 또한 분수 덧셈 역시 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{cb + ad}{ac}$로서 일반적 표현이 가능하게 된다. 이것은 여러 수를 동시에 대표하는 변수의 일반성 때문에 가능한 표현이며, 일반화된 산술 맥락에서의 변수의 활용도를 보여준다. 변수의 일반성은 양 사이의 관계 역시도 간결한 표현으로 승화시키는 것을 가능하게 한다. 정비례 관계에 있는 두 양의 관계는 $y = ax$으로 간결하게 표현될 수 있다. 이는 변수 x, y가 일반성을 함의한 문자이기에 가능한 것이다. 이처럼 변수의 일반성은 함축적이며 간결한 표현을 가능하게 한다.

그렇지만 대수식에서 변수의 맥락을 이해하는 것은 쉽지 않은 일이다. 이를테면, 변수가 나타내는 기호가 바뀌더라도 방정식과 함수식은 보존된다. 그러나 많은 학생들은 변수가 바뀌면 그 대상도 바뀔 것이라고 생각하거나, 알파벳 순서가 수의 순서와 대응하는 것으로 생각하는 것으로 보고되고 있다(Wagner, 1981). 또한 학생들은 변수의 임의성에 대한 이해를 어려워하는 것으로 나타나고 있다. 임의의 대상 대신 특정한 대상으로 이해하는 경우가 많음이 보고되고 있다.(김남희, 1992; Booth, 1988). 이외에도 대수적 표현의 완결성에 대한 이해가 결여된 경우도 변수 이해의 인지적 어려움 중의 하나이다(Collis, 1975). 즉, $x+3$은 더 이상 계산이 불가한 완결된 식임에도 이를 계산이 덜 된 것으로 이해하는 경우이다. 그리고 학생들은 변수를 수를 대신하는 것으로만 이해하며, 변수는 항상 문자여야 한다고 생각하는 경우도 있다(Usiskin, 1988). 그러나 변수는 점, 명제, 함수, 행렬, 벡터를 나타내는데 사용되기도 한다.

대수 활용은 비단 일반적인 것을 나타내는 도구에 국한된 것이 아니다. 대수는 문장제의 분석적 해결을 가능하게 하는 도구이기도 하다. 문장제 상황은 문장에 적합한 방정식이 수립됨으로써 쉽게 해결 가능하다. 이를테면, '차가 12인 두 정수의 합은 8이다. 두 정수 중 작은 수를 구하여라'라는 문제에서 작은 수를 x, 큰 수를 $x+12$로 두면 두 정수의 합은 $x+(x+12)$로 표현 가능하므로 방정식 $x+(x+12)=8$이 수립될 수 있다. 이후 방정식을 적절히 조작하면 문제에서 요구하는 해를 구할 수 있게 된다. 이와 같은 일련의 절차는 구

하고자 하는 것을 이미 구한 것으로 간주함으로써 시작되는 분석의 대표적 방법에 해당하며, 대수의 위력을 단적으로 보여주는 대목이다. 따라서 학교 수학에서 문장제 교수는 대수 활용 방법이 주류를 이룬다.

그렇지만 문장제에서 대수 활용은 쉽지 않은 인지적 과제에 해당한다. Clement(1982)는 공대 신입생 150명을 대상으로 문장제 오류를 분석한 결과 대수적 지식의 부족으로 인해 오류가 발생하기도 하지만, 문장제를 대수적 방정식으로 나타낼 때 가장 많은 오류가 나타났다고 보고하였다. 특히 많은 학생들이 문장에서 제시된 단어 순서대로 방정식을 구성하는 오류를 범하였음을 지적한다. 또한 Wollman(1983)은 대수적 형태로의 변환에서의 어려움은 문장의 이해 부족으로 일어나지 않고, 문장에서 방정식으로 바꾸는 상황에서 어려움이 생긴다고 지적하였다.

국내 연구에서도 박정아·신현용(2005)은 농도 문장제에 대한 학생들의 어려움을 농도에 대한 이해 부족, 농도를 비교하지 못한 오류, 식이 틀린 경우, 계산 과정 오류 등을 제안하였다. 여기서 식이 틀린 경우는 문장에서 방정식으로의 전환의 어려움을 보여준다. 또한 김진호·김경미·권혁진(2009)은 문장제 오류 유형을 조사하였는데, 잘못 해석된 언어, 왜곡된 정리나 정의, 기술적 오류, 검증되지 않은 답, 오용된 자료, 논리적으로 타당하지 않은 추론 순으로 나타났다.

이들 연구는 문장제의 전반적 과정상의 어려움에 초점을 둠으로써, 문제 상황을 문자식으로 전환하는 부분의 어려움을 구체화하는데 한계를 지닌다. 그러나 Clement(1982)와 Wollman(1983)의 지적처럼 문장제에서 문제 상황을 문자식으로 전환하는 부분의 어려움이 두드러진 만큼, 이 부분의 어려움을 집중 조사함으로써 이를 구체화하는 시도가 필요하다. 이에 본 연구에서는 문제 상황을 대수로 전환하는 부분에 초점을 두고 중학교 1학년 학생들의 전환 능력과 인식을 파악해 보고자하며, 이는 대수 활용 교육의 기반을 다지는 전초 작업이 될 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상자

본 연구가 의도하는 대수적 표상 전환 능력 및 인식을 파악하기 위해서는 문자의 사용 및 전환에 대한 학습이 이루어진 학생을 연구 대상자로 선정해야 하므로 중학교 1학년 학생을 대상으로 하였다. 연구 문제 1을 위한 연구 대상자로 경남 창원의 N중학교 1학년 한 학급 29명을 선정하였다. 모두 남학생이며, 중학교 수학과 교육과정에 따라 수학 수업에서 대수적 표상 전환을 이미 경험한 학생들이다.

한편 연구 문제 2를 위해 연구 문제 1에 대해 부정적인 결과를 나타낸 학생들 중 면담 대상자를 선정할 필요가 있다. 따라서 적용한 검사 문항에 대한 29명의 학생의 응답을 유형별로 분류하였고, 전환에 어려움을 보인 대표적 유형에서 임의의 표본을 추출하였다. 구체적으로 29명의 학생들에게 1차 검사 문항을 적용한 결과, 부정적 반응이 검사 문항 1, 2, 3, 4에 대해 각각 26명, 28명, 10명, 28명으로 나타났다. 이들 중 적어도 3 문항 이상에서 오류를 보인 학생 중 4명을 임의 추출하였으며, S1, S2, S3, S4로 코딩하였다.

2. 검사 문항

1) 문장 표상의 대수적 표상 전환 문항

> 1. 1.2L의 주스를 n명에게 0.2L씩 나누어 주고 남은 주스의 양을 문자를 사용한 식으로 나타내시오.
>
> (1) 답 : ______________________
>
> (2) 왜 그렇게 되는지 이유를 설명하시오.
>
> 2. 길이가 20cm인 양초가 2분에 xcm씩 일정한 속력으로 타고 있다. y분이 지났을 때, 남은 양초의 길이를 x, y를 사용한 식으로 나타내시오.
>
> (1) 답 : ______________________
>
> (2) 왜 그렇게 되는지 이유를 설명하시오.

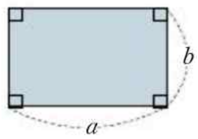
문장 표상을 대수적 표상으로 전환을 요하는 두 문항을 선정하였다. N 중학교 1학년 학생은 천재 교육 교과서(이준열 외, 2009a; 이준열 외, 2009b)를 학습하는바, 검사 문항 선정을 위해 이를 참조하였다. 구체적으로 검사 문항 1은 교과서의 기본 문제 '귤 50개를 x명에게 3개씩 나누어 주고 남은 귤의 개수'를, 검사 문항 2는 익힘책의 난이도 상 문제[5] '길이가 $20cm$인 양초가 1분에 xcm씩 일정한 속력으로 타고 있다. y분 후에 남은 양초의 길이를 x, y를 사용한 식으로 나타내어라'를 참조한 것이다. 이처럼 첫 번째는 중 수준, 두 번째는 상 수준의 문제로 설정하여, 수준별 대수적 표상 전환 능력을 파악하고자 하였다. 중 수준 이상의 문제를 선정한 것은 대수적 표상 전환과 관련한 다양한 어려움을 구체화하기 위함이다. 즉, 어려움을 구체화하고 그 근본 원인을 탐구하기에 하 수준 문제보다 이들 문제가 적합하다는 판단 때문이었다.

특히, '대수적 표상으로의 전환 이후, 대수적 표상의 동치 변형을 요하는 이를테면, 어떤 자연수에 3을 더한 후 2배를 하면 그 자연수의 3배와 같을 때 그 자연수를 구하여라'라는 문항은 배제하였다. 왜냐하면 이와 같은 문항은 문장 표상의 대수적 표상 전환과 아울러, 대수적 표상의 동치 변형까지 요하기 때문이다. 아울러 대수적 표상 변화 요구와 더불어 그 이유를 제시하게 함으로써, 학생 반응을 보다 자세히 이해하고자 하였다.

5) 이준열 외(2009b)는 난이도가 표시되어 있으며 참조한 문항은 난이도가 상 수준인 문제임.

2) 기하 표상의 대수적 표상 전환 문항

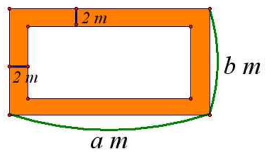
3. 다음 직사각형의 둘레를 a, b를 사용한 식을 나타내어라.



(1) 답 : ______________________

(2) 왜 그렇게 되는지 이유를 설명하시오.

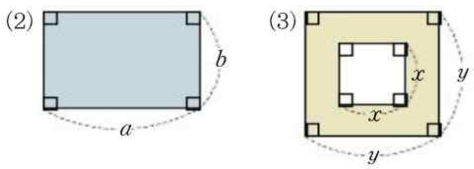
4. 가로, 세로의 길이가 각각 am, bm인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 어두운 부분의 넓이를 a, b를 사용한 식을 나타내어라.



(1) 답 : ______________________

(2) 왜 그렇게 되는지 이유를 설명하시오.

기하 표상을 대수적 표상으로 전환을 요하는 두 문항을 선정하였으며, 이는 난이도를 달리한 것이다. 검사 문항 1, 2와 마찬가지로 이준열 외(2009a, 2009b)를 참조하였다. 구체적으로 검사 문항 3, 4는 각각 다음 도형의 둘레와 넓이를 설명하는 기본 문제를 참조한 것이다.



[그림 Ⅲ-1] 검사 문항 3, 4 참조 문제

특히, 검사 문항 4는 기본 문제를 변형함으로써 난이도를 높인 문제이다. 이처럼 첫 번째는 중 수준, 두 번째는 상 수준의 문제로 설정하여, 수준별 대수적 표상 전환 능력을 파악하고자 하였다. 여기에서도 중 수준 이상의 문항을 개발한 것은 학생들의 어려움에 대한 다양한 원인을 탐구하고자 하는 의도를 지닌다.

연구 초점이 대수적 표상으로의 전환에 있기 때문에 문장 표상에서와 마찬가지로 대수적

표상으로의 전환 이후까지 요하는 문항 이를테면, 기하 표상과 함께 제시된 '가로의 길이가 $x\,cm$, 세로의 길이가 $6\,cm$인 직사각형의 넓이가 $40\,cm^2$일 때, x의 값을 구하여라'는 문제는 배제되었다.

기하 표상의 대수적 표상의 전환을 명백히 하고자, 각 문항은 도형 표현을 삽입하였으며, 도형 표현에 문장에 나타난 조건을 모두 담고자 하였다. 이를 통해 문장 표상 없는 기하 표상만으로도 문제 이해가 가능한 수준이 되게 하고자 하였다. 아울러 앞에서와 마찬가지로 그 이유를 제시하게 함으로써, 학생 반응을 보다 자세히 이해하고자 하였다.

3. 연구 방법 및 절차

본 연구를 위해 지필검사 및 개별면담의 두 가지 방법을 이용하였다. 연구 문제 1을 위해 네 가지 검사문항이 지필검사로 적용되었고, 그 반응을 분석함으로써 대수 전환 능력에서 나타나는 구체적 특징을 추출하고자 하였다. 또한 연구 문제 2를 위해 대수 전환에 어려움이 두드러진 사례를 임의 추출하였으며, 이들과 개별면담을 통해 인지적 특성을 파악하고자 하였다.

우선 검사문항을 2013년 10월 8일 29명의 연구 대상자에게 적용하여 학생들의 대수적 표상 전환 능력에 관한 기초 자료를 수집하였다. 이때 나타난 반응을 '정답'과 '오류', '모름'으로 구분하여 도수와 비율을 구함으로써, 대수적 표상 전환 능력을 구체화하고자 하였다. 또한 오류로 분류된 사례는 오류 유형을 범주화함으로써, 어려움이 나타난 반응의 특징을 파악해 보고자 하였다.

구체적으로 오류로 분류된 학생들의 반응은 다음과 같이 범주화하였다. 검사 문항 1, 2에 대해서는 제시되어야 할 대수적 표상이 등식이 아님에도 등식을 사용한 경우를 '등식 설정의 오류'로, 등식이 사용될지라도 문자 n이나 x, y가 반응에서 전혀 나타나지 않은 경우를 '문자 n의 결여' 또는 '문자 x, y의 결여'로, 문장 표상에 전혀 나타나지 않은 문자 x, y를 사용한 검사 문항 1의 경우와 x, y가 주어졌다는 이유로 함수 식으로 인식하여 표현한 검사 문항 2의 경우를 '함수 식 설정'으로 분류하였으며, 나머지는 기타 반응으로 분류하였다.

'함수 식 설정' 역시 등식 설정 오류에 해당하지만, 함수식으로 오인한 특징이 두드러진 경우를 이 오류로 분류함으로써 그 특징을 명료화하고자 하였다. 구체적으로 검사 문항 2에서 $y=20-2x$와 같이 '$y=$'으로 식이 표현된 경우가 '함수 식 설정'에 해당한다. 반면, 검사 문항 2에서 $20\div 2x=y$, $x\times y=20$ 역시도 함수로 볼 수 있지만, 함수 식 오인의 특징이 두드러지지 않는 경우로 보아 '등식 설정 오류'로 분류하였다.

또한 검사 문항 3, 4에서 오류로 분류된 학생들의 반응은 다음과 같이 4가지로 범주화하였다. 먼저, 제시된 이유가 문제에서 요구하는 것과 동떨어진 것을 제시한 경우를 '문제 인식 오류'로 분류하였다. 구체적으로 검사 문항 3에서 '$ab=X$'라고 답하고, 그 이유를 '밑변×높이(가로×세로)는 직사각형의 넓이를 구하는 공식이기 때문이다'라고 제시한 사례가 여기에 해당한다. 즉, 검사 문항 3은 둘레를 요구하는데, 제시된 이유에서는 넓이에 초점을 두고 있으므로 명백히 '문제 인식 오류'에 해당한다. 대수적 표상으로 전환하는 과정에서 연산 선택에 오류를 범한 경우를 '잘못된 연산 선택 오류'로 분류하였다. 구체적으로 문항 3에서 '$2a+6b$'로 나타낸 경우가 여기에 해당되며, 문항 4에서 넓이를 가로 세로의 덧셈 연산으로 표현한 '$ab-(a-4\times b-4)$'와 같은 경우가 여기에 해당한다. 한편, 괄호를 적재적소에 사용

하지 못함으로써 빚어진 오류를 '괄호 생략 오류'로 분류하였으며, 구체적으로 검사문항 3에서 $a+b\times 2$나 검사 문항 4에서 $ab-(a-4\times b-4)$가 여기에 해당한다. 그리고 이 세 경우에 해당하지 않는 경우를 기타로 분류하였다.

한편, 대수적 표상 전환에 어려움을 보인 사례에 대한 보다 근본적 이유를 탐색하기 위해 적어도 세 문항 이상에서 오류를 보인 학생을 임의 추출하여 개별 면담을 실시하였다. 이 면담의 주요 목적은 대수적 표상 전환 어려움에 대한 근본적 이유를 탐색하는 것이다.

면담은 연구 대상자들의 학원 등 방과 후 시간에 대한 개인 사정을 고려하여 특정한 날을 약속하여 이루어졌으며, 구체적으로 2013년 10월 18일에 일괄적으로 개별 면담이 실시되었다. 면담은 다음의 두 절차로 전개하였다. 먼저, 대상자들의 검사문항에 대한 기록지를 보여주며 반응에 대한 이유를 확인하였다. 이는 학생의 반응에 대한 이유를 연구자 임의대로 해석하는 오류를 방지함으로써 연구 결과의 타당성을 제고하기 위함이다. 다음, 어려움을 돕는 발문을 제공하여, 인식 변화를 관찰하였다. 이를테면, 문제에서 요구하는 것과 동떨어진 것에 초점을 둔 경우, 문제에서 요구하는 것에 대한 확인을 요구하였다. 또한 추상적 문자를 다루기 어려워하는 경우, 구체적 수치 제공을 통해 문자 이해를 도왔다. 아울러 전환된 대수적 표상이 정교화 될 때 마다 그 표상에 대한 설명 등 을 요구함으로써, 학생 인식의 변화를 유도하고자 하였다. 이 과정에서 어려움이 해소되어 대수적 표상이 정교화되는지를 관찰해 봄으로써, 어려움을 구체화할 뿐 아니라 아울러 대수적 표상 정교화의 요인을 파악해 보고자 하였다.

또한 면담에서 오류로 파악된 문항만을 묻기보다, 검사 문항 1, 2, 3, 4를 순차적으로 물음으로써 특정 문항의 오류에 대한 의심을 배제하고자 하였다. 면담 시간의 제한은 없었으며, 네 차례의 면담으로 위해 매회 약 1시간 정도가 할애되었다. 연구 대상자의 언행은 연구자에 의해 주의 깊게 관찰되었으며, 그 과정에서 이해하기 어려운 반응에 대해서는 관찰 도중 질문을 하였으며, 학생의 반응은 필드노트에 기록하였다. 관찰 기록은 대수적 표상 전환에서 나타나는 특징을 파악하기 위한 분석 자료로 이용되었다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 연구 문제 1

문장 표상의 대수적 표상 전환으로 대표되는 검사 문항 1, 2에 대한 학생들의 반응을 정리하면 <표 IV-1>, <표 IV-2>와 같다.

<표 Ⅳ-1> 검사 문항 1에 대한 결과

반응	학생 수(명)	비율(%)
정답	3	10.34
오류	24	89.66
모름	2	6.90

<표 Ⅳ-2> 검사 문항 2에 대한 결과

반응	학생 수(명)	비율(%)
정답	1	3.45
오류	19	65.52
모름	9	31.03

이 결과는 연구 대상자들의 문장 표상에서 대수적 표상 전환 능력이 매우 저조함을 보여주며, 이로부터 다수의 학생들이 문장 표상의 대수적 표상 전환에 어려움을 겪는 것을 알 수 있다. 한편, 검사문항 1, 2에 대하여 오류로 분류된 사례의 반응과 이유는 <표 IV-3>, <표 IV-4>와 같이 정리할 수 있다.

<표 Ⅳ-3> 검사문항 1에서 오류로 분류된 학생들의 반응과 이유 (N=24)

오류	반응	이유	학생수 (명)	비율 (%)
등식 설정 오류	1200=200n n명=6명 남는 주스 x	1.2L에서 0.2L를 나누면 6명이 먹을 수 있다 남는 주스는 없다.	1	37.50
	1.2÷0.2=n	1.2의 주스를 0.2L씩 나누어 주기 때문이다.	1	
		1.2의 주스를 n명에게 0.2L씩 나누어 준다는 것은 나누기이기 때문이다.	1	
		무응답	1	
	1.2n=1.2	나눠주고 남은 것이어서	1	
	0.2n=1.2	문자와 숫자 곱셈은 곱하기를 생략할 수 있기 때문이다.	1	
	$1.2L=0.2L\times n$	0.2L씩 n명이면 1.2L가 되어야 하니까	1	
	$n=0.2x$	n이 6명이면 남는 주스 량이 없어진다.	1	
	n=1.2÷0.2	1.2L를 0.2L씩 나누면 6번이 나온다.	1	
문자 n의 결여	6	1.2÷0.2=6	3	41.67
		1.2와 0.2에 10을 곱해 12와 2로 바꿔 12÷2=6이다.	1	
		$1.2L=0.2L\times n$	2	
		이유 없음	1	
	0.2÷1.2=6	n명당 0.2L씩 나누어 주어야 하기 때문에 1.2L를 나누어야 한다.	1	
	0.6L	1.2L÷0.2=6L	1	
		이유 없음	1	
함수 식 설정	$y=\frac{1.2}{x}$	$y=n-x=0.2$이므로 $n=\frac{1.2}{0.2}$ $n=6$ $y=\frac{12}{x}$가 나온다.	1	16.67
	$y=ax$	한명에 0.2L씩 주면 쥬스 양이 줄어들기 때문	1	
	$y=0.2n$	남은 주스의 양을 로 하면 n명$\times 0.2L$이기 때문이다.	1	
	$1.2L\div 0.2L=x$	1.2리터의 주스를 0.2씩 x명에게 나누어 주고 남은 양은 y로 쓴다.	1	

기타	$(1.2+n)\div 0.2$	$(1.2+n)\div 0.2$에서 나누기는 n명에게 $0.2L$씩 나누어 준다했기 때문에 나누기이다. $1.2L$의 주스를 주는 것이기 때문에 더하기 이다.	1	4.17

반응은 4가지로 분류되었으며, 모든 경우는 문장 표상의 대수적 표상 전환 능력의 부족에 해당한다. 특히, 등식 설정의 오류가 37.50%로, 문자 n의 결여가 41.67%로 두드러짐을 알 수 있으며, 문자 n을 구해야 하는 값으로 간주하는 오류가 대다수임을 알 수 있다. 대표적으로 '$1.2\div 0.2=n$'라고 한 반응은 n을 구해야 하는 값으로 인식하는 전형이다. 또한 제시된 이유를 보면 표면적 특성에 의한 연산 선택이 두드러짐을 알 수 있다. 구체적으로 '$1.2\div 0.2=n$'라는 반응의 이유 '1.2의 주스를 n명에게 0.2L씩 나누어 준다는 것은 나누기이기 때문이다.'은 표면적 문장 표상 '나누어 준다'에 기반한 나누기 연산 선택으로 보여 진다.

<표 IV-4> 검사문항 2에서 오류로 분류된 학생들의 반응과 이유 (N=19)

오류	반응	이유	학생수 (명)	비율 (%)
등식 설정 오류	$20\div 2x=y$	총 전체길이에서 $x\,cm$씩 속력으로 타고 있으니 빼야 한다.	1	10.53
	$x\times y=20$	무응답	1	
문자 x,y의 결여	20-$2x$	다 타버려서 남는게 없다.	1	5.26
함수 식 설정	$20=2a$ $a=10$ $y=10x$	함수의 식을 이용	1	68.42
	$y=20-2x$	총 전체길이에서 $x\,cm$씩 속력으로 타고 있으니 빼야 한다.	1	
	$y=x\dfrac{2}{20}$	무응답	1	
	$y=\dfrac{20}{x}$	$20cm$인 양초가 2분에 $x\,cm$씩 타기 때문이다.	1	
	$y=x\times 2$	2분마다 $x\,cm$씩 타고 있으니까 x는 y의 2배가 된다.	1	
	y=$40x$	2분에 $x\,cm$씩 타면 4분에 $2x$ 이기 때문이다.	1	
	$y=\dfrac{x}{2}$	2분에 $x\,cm$인데 y분이 지났을 때이므로 $y=\dfrac{x}{2}$가 된다.	2	
		무응답		
	y=$20x$	대입하면 된다	1	
	$y=\dfrac{a}{x}$	일정한 시간이 지날 때마다 일정한 속력으로 타고 있기 때문이다	1	
	$y=2x$	남은 양초의 길이가 y면 2분마다 $x\,cm$씩 타기 때문에 곱하여야 한다.	1	
		무응답	2	
기타	$20cm$-2=□ 0.2	다 타버려서 남는게 없다.	1	15.79
	x=10 y=1분	20÷2=$x\,cm$=$10cm$=1분 $20cm$=2분 $10cm$=1분	1	
	$20cm$	$y=2x$	1	

검사 문항 2에 대한 오류는 ‘함수 식 설정’이 무려 68.42%에 해당되었으며, 이는 검사 문항 1과 달리 검사 문항 2에서는 문자 x, y 사용 때문임을 부인하기 어려울 것으로 생각된다. 즉, 함수 식 표현을 대표하는 문자 x, y로 인해 다수의 학생들이 함수에 관한 문제로 오인한 것이다. 이는 학생들이 문장 표상에서 사용되는 문자에도 많은 영향을 받고 있음을 보여주는 결과이다.

기하 표상의 대수적 표상 전환으로 대표되는 검사 문항 3, 4에 대한 학생들의 반응을 정리하면 <표 IV-5>, <표 IV-6>과 같다.

<표 IV-5> 검사문항 3에 대한 결과

반응	학생 수(명)	비율(%)
정답	19	65.52
오류	6	20.68
모름	4	10.34

<표 IV-6> 검사문항 4에 대한 결과

반응	학생 수(명)	비율(%)
정답	1	3.45
오류	16	55.17
모름	12	41.37

이 결과는 연구 대상자들의 기하 표상에서 대수적 표상 전환 능력이 문장 표상과 같이 저조함을 보여준다. 그러나 검사문항 3의 경우 간단한 기하표상에서는 정답률이 65.52%를 보여줌으로서 문장표상보다는 시각화된 기하 표상의 대수전환이 좀 더 쉽게 접근 할 수 있음을 알 수 있다. 학생들의 정답률이 문장 표상의 대수적 표상 전환보다 높은 것으로 나타났으며, 이는 문장 표상에 비해 시각적 그림 표현의 전환이 상대적으로 용이함을 시사하는 결과로 보인다.

한편, 검사문항 3, 4에 대하여 오류로 분류된 사례의 반응과 이유는 <표 IV-7>, <표 IV-8>와 같이 정리할 수 있다.

<표 IV-7> 검사문항 3에서 오류로 분류된 학생들의 반응 (N=6)

오류	반응	이유	학생수 (명)	비율 (%)
문제인식 오류	$ab=x$	밑변×높이(가로×세로)는 직사각형의 넓이를 구하는 공식이기 때문이다.	1	16.67
잘못된 연산 선택 오류	$2a\times 2b$	a를 두 번 곱하고 b를 두 번 곱하면 $2a\times 2b$가 나온다.	2	33.33
	$2a\times 6b$	a변이 두 개여서 b는 2개이기 때문이다.		
괄호 생략 오류	$a+b\times 2$	직사각형은 마주보는 두 개의 모서리의 길이와 같다. 그래서 a의 길이와 b의 길이를 더하고 ×2를 하면 둘레가 나온다.	2	33.33
		가로+세로×2 이기 때문에		
기타	$2ab$	a=2개 b=2개	1	16.67

검사문항 3에서는 오류로 분류된 학생들의 반응을 보면 $a+b\times 2$와 같이 문장의 내용은 충분히 이해함에도 괄호 생략의 오류를 범하거나 $2a\times 2b$와 같이 $+$로 표현해야할 식을 $\times$로 표현하는 잘못된 연산선택에 의한 오류를 선택한 학생이 66.66%를 차지하였다.

<표 IV-8> 검사문항 4에서 오류로 분류된 학생들의 반응과 이유 (N=16)

오류	반응	이유	학생수 (명)	비율 (%)
문제인식 오류	$4a+4b=8ab$	각 선분마다 어두운 부분의 가로나 세로가 2㎝ 씩이니까 ×4를 하면 된다.	1	15.79
	1.6...	안의 직사각형의 세로의 길이는 2×4와 같다=8 안의 직사각형의 가로의 길이는 2×9와 같다=18 겉의 직사각형의 b의 길이는 2×6와 같다=12 겉의 직사각형의 a의 길이는 2×11와 같다=22 18×8=144　12×22=264 244÷144=1.6....	1	
	$y=(a-4)\times(b-4)-ab$	y가 어두운 부분의 넓이라고 했을 때 가로 a에 $2m+2m=4m$를 빼고 똑같이 b도 해서 직사각형의 넓이를 구해서 뺀다.	1	
잘못된 연산 선택 오류	$ab-(a-4+b-4)$	$a\times b$ 전체에서 먼저 어두운 넓이를 빼면 x라는 밝은 넓이가 나온다. 또 $a\times b$에서 밝은 넓이를 빼면 어두운 넓이가 나온다.	2	31.25
		가운데에 네모난 사각형의 넓이를 a와 b의 전체 넓이로 빼면 어두운 부분의 넓이를 알 수 있다.		
	$ab-\{(a-2)\times(b-2)\}$	큰 직사각형에서 작은 직사각형을 빼면 된다.	3	
		화단의 넓이에서 가운데 빈곳의 넓이를 빼야 하니까		
		$a\times b$에서 $(a-2)\times(b-2)$를 빼면 어두운 부분의 넓이가 나온다.		
괄호 생략 오류	$ab-(b-4\times a-4)$	넓이가 2니까 곱하거나 계산을 한다.	2	12.50
		흰 네모는 4㎝만큼 작으니까 b에서와 a에서 4를 빼고 전체 크기에다가 흰 작은 네모를 빼서 구했다.		
기타	$2(2a-8)+2(2b-8)$	넓이에서 넓이를 잘라서 각각 구한다	2	31.58
	$(2\times a+2\times b)-\{(a-2)\times 2+(b-2)\times 2\}$	전체에서 부분을 빼면 된다.	1	
	$a\times b-(2-a)\times(2-b)=$ 어두운 부분의 넓이	빈공간의 넓이는 빼야하기 때문이다.	1	
	$ab-(4a+4b)$	전체부분에서 까만 부분만 빼면 되기 때문이다.	1	
	$am\times bm$-밝은 부분의 넓이	전체 넓이에서 어두운 부분과 밝은 부분을 더해서 밝은 부분을 뺀다. 그러면 어두운 부분이 나온다.	1	

검사문항 3에 비해 검사문항 4의 오답률이 전체의 96.55%로 굉장히 높았으나, 기하 표상의 특징 때문인지 문장 표상의 대수적 표상 전환으로 대표되는 검사 문항 1, 2에 비해 등식 설정 오류가 많이 나타나지 않고 있음을 알 수 있다. 이는 기하 표상의 시각적 특징으로 인해 문제 이해도가 상대적으로 높았던 탓으로 생각된다. 그러나 이를 수식으로 표현하는 과정에서 미숙한 점이 많이 발견되었으며, $ab-(a-4+b-4)$처럼 잘못된 연산 선택의 오류를 범하거나 $ab-(a-4\times b-4)$처럼 괄호를 생략하여 전혀 다른 식으로 표현해 버린 괄호 생략

의 오류를 범한 학생의 비율이 43.75%를 나타냈다. 이러한 결과는 대수적 표상 전환의 어려움이 단순 이해에 그치지 않는 복합적 결과임을 보여준다.

2. 연구 문제 2

개별 면담 대상자 S1, S2, S3은 검사 문항 3에 대해서만 대수적 표상을 올바르게 전환하였고 S4는 전 문항에 대해 오류가 나타난 사례이며, 그 구체적 반응과 특징은 <표 Ⅳ-9>와 같다. <표 Ⅳ-9>에서 수학학업 성취도는 면담 대상자의 수학학업 수준에 대한 정보를 제공하기 위해 제시되었다. 이들의 수학학업 성취도는 '상'이거나 '중'인데, 이것은 대수적 표상 전환의 어려움이 비단 하 수준에만 그치는 것이 아닌 다양한 수준에서 나타나는 현상임을 보여준다.

<표 Ⅳ-9> 연구 대상자의 반응과 특징

연구 대상자	수학학업 성취도	문항 별 반응		
S1	상	문항 1	$n=1.2\div0.2$	$1.2L$를 $0.2L$씩 나누면 6번이 나온다.
		문항 2	$y=\frac{x}{2}$	???
		문항 3	$2\times a+2\times b=$둘레	둘레는 사각형을 둘러싸는 길이 이므로 전체둘레는 $2\times a+2\times b$이다.
		문항 4	$(2\times a+2\times b)-$ $\{(a-2)\times2+(b-2)\times2\}$	전체에서 부분을 빼면 된다.
S2	상	문항 1	$1.2L=0.2L\times n$	$0.2L$씩 n명이면 $1.2L$가 되어야 하니까
		문항 2	$y=x\times2$	2분마다 xcm씩 타고 있으니까 x는 y의 2배가 된다.
		문항 3	$2a+2b$	a변이 2개고 b변이 2개니까 ×2씩 해서 더하면 된다.
		문항 4	$4a+4b=8ab$	각 선분마다 어두운 부분의 가로나 세로가 $2cm$ 씩 이니까 ×4를 하면 된다.
S3	중	문항 1	$0.2\div1.2=6$	n명당 $0.2L$씩 나누어 주어야 하기 때문에 $1.2L$를 나누어야 한다.
		문항 2	$y=2x$	-
		문항 3	$2a+2b=$직사각형의 둘레	a가 2개이고 b가 2개이기 때문이다.
		문항 4	$a\times b-(2-a)\times(2-b)=$어두운 부분의 넓이	빈공간의 넓이는 빼야하기 때문이다.
S4	중	문항 1	$0.6L$	$1.2L\div0.2=0.6L$
		문항 2	x=10 y=1분	$20\div2=xcm=10cm=1$분 $20cm=2$분 $10cm=1$분
		문항 3	$2ab$	a=2개 b=2개
		문항 4	1.6...	안의 직사각형의 세로길이는 2×4와 같다 =8 안의 직사각형의 가로길이는 2×9와 같다=18 겉의 직사각형의 b의 길이는 2×6과 같다=12 겉의 직사각형의 a의 길이는 2×11과 같다=22 $18\times8=144$ $12\times22=264$ $244\div144=1.6$

본 연구는 문장 표상과 기하 표상에 대한 대수적 표상 전환의 두 초점이 존재하므로, 개별 사례는 문장 표상과 기하 표상의 구분 하에 기술되었다. 이러한 구분 하에 오류로 나타난 반응에 대해서는 검사 문항 별로 기술하였다. 따라서 S1, S2, S3의 사례는 세 가지 항목으로, S4의 사례는 네 가지 항목으로 기술되었다. 즉, S1, S2, S3은 모두 검사 문항3을 올바르게 전환하였으므로, 이 부분에 대한 면담은 의구심 제거를 위해 시행되었지만 정리 과정에서 생략되었다.

면담의 결과, S1은 검사 문항 1을 제외한 문항에 대한 적합한 정교화에 성공한 사례로 나타났다. 또한 S2는 검사 문항 1, 2에 대해서는 적합한 정교화에 성공하였지만, 검사 문항 4에 대해서는 적합한 정교화에 실패하였다. 이에 반해 S3은 검사 문항 1, 2, 4에 대해서는 적합한 정교화에 실패한 사례이며, S4는 모든 검사 문항에 대한 적합한 정교화에 실패한 사례였다.

1) S1의 사례

(1) 문장 표상의 대수적 표상 전환

① 검사 문항 1: 사람 수에서 남은 주스의 양으로 초점 변화 및 다른 수치 제시를 통한 변수 n에 대한 특정수 인식 탈피

S1은 검사 문항 1에 대해 '$n=1.2\div0.2$'라 답하였으며, 그 이유는 '1.2L를 0.2L씩 나누면 6번이 나온다'를 제시한 사례에 해당한다. 면담의 시작은 이에 대한 반응 이유를 묻는 것으로 시작되었다. S1은 설명에서 $1.2\div0.2$는 6이 되며 이는 '주스를 0.2L씩 나누어주는 사람'이라고 말하였다. S1은 검사 문항 1에서 요구하는 '남은 주스의 양' 대신 사람의 수에 초점을 맞추고 있음을 알 수 있다. 이에 연구자는 그가 '남은 주스의 양'에 초점을 맞출 수 있도록 돕고자 하였다.

RS: 문제에서 요구하는 것이 뭐니?
S1: (문제를 다시 자세히 보더니) 아! 1.2L의 주스를 0.2씩 나누어 주고 남은 주스의 양요.
RS: 그건 얼마이니?
S1: 0이에요.
RS: 왜 0이니?
S1: 1.2L짜리 주스를 02.L씩 6번씩 나누어주면 남은 주스가 없으니까 남은 주스의 양은 0이에요.
RS: 6번씩 나누어 줬다는 것을 어떻게 알지?
S1: 2 곱하기 6은 12이니까요.
RS: 문제에 6번이라고 나와 있지 않잖아! 그런데 그걸 어떻게 알지?
S1: 이 문제에서 n명이라고 했으니까, 그건 미지수이기 때문에 정할 수 있다고 생각해요.
RS: 어떻게 정하지?
S1: 2×6=12이니까 여기서 똑같이 0.2×6=1.2가 되요.

S1은 문제에서 n명이라고 주어져 있음에도 변수 n은 6을 나타내는 특정수로 생각하고 있었다. 따라서 그에게 남은 주스의 양은 0L가 된 것이다. (0L는 '문제에서 요구하는 것'에 집중하게 됨으로써 수정된 1차 정교화이다.) '그건 미지수이기 때문에 정할 수 있다'라는 그의 표현은 이러한 점을 분명히 보여준다. 따라서 우리는 그에게 변수 n이 특정수 맥락이 아닌, 임의의 수를 나타내는 다가이름으로서의 변수임을 인식할 수 있도록 돕고자 하였다.

RS: n명이 6명이 아닐 수는 없니?
S1: 2가 12가 되려면 되는 숫자는 6밖에 없어요. 그래서 꼭 6이에요.
RS: 만약 5명이라면 말이 안 되니? 5명에게 0.2씩 준다면..
S1: 그럼 나머지가 0.2 생기겠죠.
RS: 왜?
S1: 1.2를 5번씩 나누어 주면 0.2가 남아요.
RS: 왜?
S1: 5곱하기 2는 10이고 1.2를 12라 치면 12 빼기 10은 2가 되요. 그래서 나머지는 2가 돼요.

S1은 5명일 때의 남는 주스의 양을 정확히 구해내는 능력을 갖추고 있었다. 연구자는 그의 인식을 살펴보고자 하였다.

RS: 5명이 될 수 있다는 거니 없다는 거니?
S1: 될 수 있겠죠.
RS: 그래도 여전히 답은 0이니?
S1: 아니오. 답이 많은 거 같아요.
RS: 왜?
S1: 1,2,3,4,5 ... 여러 명으로 나눌 수 있으니까요.
RS: 답을 다시 구해보겠니?

S1은 몇 차례 기록하고 지우는 것을 반복하더니 $0.2 \times n - 1.2$라고 기록하였다.

RS: 설명해 주겠니?
S1: 그러니까 0.2를 n명으로 곱해서 1.2를 빼면 남은 주스의 양이 나와요.
RS: 왜?
S1: 0.2L씩 나누어 주는 건 전체 양에서 나눈 0.2에다가 n명이 곱해져서 빼지는 거잖아요.
RS: 무슨 말인지 자세히 설명해 줄 수 있겠니?
S1: 문제에서 원하는 건 남은 주스의 양이잖아요. 전체는 1.2이고 n명씩 0.2L씩 빠져나가니까 그래서 0.2랑 n명을 곱한 거에요.
RS: 어떻게 0이라고 했다가 이렇게 바꿀 수 있었어
S1: n명이라고 나와 있잖아요. n명이 정해져 있는 게 아니라 어떤 숫자도 들어갈 수 있음을 알았어요.

S1은 최초 문제에서 요구하는 것이 사람 수라는 인식을 갖고 있었다. 이는 변수 n을 특정수를 대표하는 자리지기로서의 변수로 인식한 탓이다. 우리는 그에게 문제에서 구하고자 하는 것이 무엇인지를 물어봄으로써, 문제에서 요구하는 것이 사람 수가 아닌 남은 주스의 양임을 분명히 하였다. 그럼에도 S1은 남은 주스의 양을 0L라고 답하였는데, 이는 그에게 미지수 n이 여전히 자리지기로서의 변수였기 때문이다. 이에 연구자는 5명일 때, 남은 주스의 양을 물음으로써, 비로소 S1은 변수 n에 대한 인식 개선에 성공할 수 있었다. 이것은 'n명이라고 나와 있잖아요. n명이 정해져 있는 게 아니라 어떤 숫자도 들어갈 수 있음을 알았어요'라는 S1의 표현에서 두드러지게 나타난다. 하지만 그의 정교화된 대수적 표상은 전체량 1.2L가 뺄셈 뒤에 위치한 오류인데, 이는 그 만큼 대수적 표상 전환이 쉽지 않은 과제임을 보여주는 것이다.

② 검사 문항 2: 검사 문항1의 정교화의 경험 영향

2번 문항에서 S1은 문제에 x, y가 나왔다는 이유로 함수에 관한 식으로 오인하여 $y=\frac{x}{2}$라고 기록하였으며, 그 이유는 제시하지 않았다.

RS: 2번 문제에 대해 설명해 보겠니?
S1: 문제에서 20cm랑 2분이랑 x, y가 나와서 이 네 개 중 세 개를 잘 섞어서 식을 적으면 맞을 줄 알았어요.

연구자는 그에게 다시 한 번 구해 볼 것을 권하였으며, 그는 $20-\frac{x}{2}\times y$라고 기록하였다. 검사 문항2의 난이도를 고려할 때, 많은 어려움이 예상되었지만, S1은 의외로 쉽게 대수적 표상을 정교화할 수 있었다. 이는 검사 문항1에 대한 대수적 표상 정교화의 경험 덕분임을 부인하기 어려울 것이다. 우리는 그의 인식 변화를 보다 자세히 살펴보고자 하였다.

RS: 왜 이런 생각을 한 거니?
S1: 이것도 1번이랑 똑같이 남은 양초 길이를 묻는 거잖아요. 그러니까 1번이랑 똑같이 전체에서 탄 양을 빼면 남은 양초 길이가 나와요.
RS: 탄 양이 얼마인데.
S1: $\frac{x}{2}\times y$
RS: 왜 그렇게 생각했니?
S1: 2분에 xcm씩 타고 있다고 했잖아요. 그런데 여기 y는 2분이 아니라, 정해져 있지 않은 수잖아요. y를 기준 1로 잡는다면 x를 2로 나누어야 y랑 똑같다고 생각 했어요.

위 대화로부터 검사 문항2에 대한 표상 정교화는 검사 문항 1에서의 정교화 경험의 영향이었음을 부인하기 어렵다. ‘이것도 1번이랑 똑같이 남은 양초 길이를 묻는 거잖아요. 그러니까 1번이랑 똑같이 전체에서 탄 양을 빼면 남은 양초 길이가 나와요’라는 S1의 반응은 이를 분명히 보여준다. 즉, 검사 문항1에서의 경험을 토대로 문제에서 요구하는 것에 집중함으로써, 검사 문항2에서는 스스로 정교화할 수 있게 된 것이다.

(2) 기하 표상의 대수적 표상 전환

① 검사 문항 4: 기록에 대한 이유 설명으로부터 둘레에서 넓이로, 한 쪽 부분에서 양쪽 부분으로의 초점 변화

검사 문항4에서 S1은 ‘$(2\times a+2\times b)-\{(a-2)\times 2+(b-2)\times 2\}$’라고 답을 적고 그 이유는 ‘전체에서 부분을 빼면 된다’라고 밝혔다.

RS: 왜 이렇게 답했는지 설명해 보겠니?
S1: 이것은 직사각형 이예요. 그런데 이거는 안의 일부분이 없어요. 그래서 답을 구하려면 전체에서 안의 일부분을 빼야 어두운 부분이 나와요. 일단은 전체의 넓이를 구해요. 전체의 넓이는 $a\times b$ 예요. 그리고 어두운 부분은 $a-2$ $b-2$. 그래서 나온 답 두 개를 곱하면 어두운 부분이 나와요.
RS: $(2\times a+2\times b)$ 이건 뭐니?
S1: 이건... 넓이가 아닌 둘레로 생각해서...
RS: 잘못적은 거니?

S1: 네.

이후 S1은 다음과 같이 대수적 표상을 $a\times b-(a-2)\times(b-2)$로 정교화할 수 있었다. S1은 자신의 기록에 대한 이유를 설명하는 과정에서 자신의 오류가 무엇인지 스스로 찾아낼 수 있었다. 즉, 자신의 기록이 넓이가 아닌 둘레를 구하는 식이었음을 인지하고 넓이를 구하는 식으로 전환해내었다. 그러나 표현이 개선되었지만, 여전히 오류가 나타나고 있었다.

RS: $(a-2)\times(b-2)$ 이건 뭐니?
S1: 안의 일부분의 넓이요.
RS: 왜 이렇게 되지?
S1: 안의 일부분의 넓이를 구하려면 가로와 세로의 길이를 알아야 되잖아요. 그래서 $(a-2)$, $(b-2)$를 한 거예요.
RS: 왜 2를 뺀 거니?
S1: 안의 일부분의 세로길이를 구하려면 여기서 세로길이는 b라고만 나와 있어요. 안의 일부분은 b보다 작잖아요. 그래서 작아진 만큼 빼서 구한 거예요.
RS: 왜 2만큼 작아져?

연구자의 질문으로부터 S1은 도형 표현을 보다 자세히 살펴보았으며, 마침내 잘못된 부분을 감지하여 대수적 표상을 $a\times b-((a-4)\times(b-4))$로 정교화하였다. 이상의 사실로부터 S1은 연구자에게 자신의 기록에 대한 설명 과정에서 대수적 표상을 스스로 정교화할 수 있었음을 알 수 있다. 특히 표상 기록에서 2를 뺀 것에 대한 이유 설명 요청은 빼야하는 양에 보다 집중하게 함으로써, 놓친 부분을 감지할 수 있게 하였다.

2) S2의 사례

(1) 문장표상의 대수적 표상 전환

① 검사 문항 1: 등식 설정에 고착된 사고의 방해, x를 이용한 올바른 등식 설정, 그러나 '$x=$'로의 표현 조작 어려움

S2는 0.2L씩을 n명에게 나눠주면 1.2L가 된다는 이유로 '$1.2L=0.2L\times n$'으로 쓴 경우로, 앞서의 S1과 마찬가지로 연구자가 S2의 생각을 유도하는 질문으로 시작하였다.

RS: 1번을 설명해 보겠니?
S2: 1.2L를 n명에게 나누는 거니까... 진짜 모르겠어요. 남은 주스 양을 생각한 게 아니라 n명에게 0.2L씩 나누면 1.2L가 된다고 생각해서 이런 식으로 적었어요.
RS: 이것이 정답이라고 생각하니? 아니라고 생각하니?
S2: 정답이 아니예요.
RS: 그럼 다시 풀어보겠니?
S2: (생각하더니) $0.2L\times n+x=1.2L$
RS: 어떻게 이 생각을 했는지 설명해 주겠니?
S2: 0.2L를 n명에게 나눠주고 남은 주스양이 있잖아요. 그것을 x로 더해서 1.2L라고 생각 했어요.

이상에서 보여지 듯, S2는 문장의 대수적 표상 전환에 대해 어려움을 겪었다. 그리고 자신이 쓴 기록에 오류가 있음을 인식하고 있었으나 구체적인 오류 이유에 관해서는 정확히 파악하지 못한 상태였다. 그는 주스의 양을 굳이 x라 두지 않고 구할 수 있음에도 x라 두고 등식을 세웠는데, 이는 등식을 세워야 한다는 그의 고정 관념을 보여준다. 즉, 문장제는 반드시 등식을 세워야 한다는 고정관념이 내재된 것으로 볼 수 있다. 다음의 대화는 이러한

모습을 보다 분명히 보여준다.

RS: 그걸 x 없이 적을 수 없니?
S2: 그건 모르겠어요.
RS: 그러니까 남은 주스의 양을 x 없이 바로 표현할 수는 없니?
S2: x 없이? (생각하더니) x를 안 쓰고요?
RS: 응 x 없이.
S2: (생각해보더니) x 없이 적을 수는 없어요.
RS: 왜?
S2: x 없이 적으면 남는 주스양은 어떻게 표현해요?
RS: 그럼 'x=' 이렇게 표현할 수는 없니?
S2: $x=1.2-n\times0.2$

S2는 구하고자 하는 주스의 양을 x라 두고 올바른 등식을 설정하였지만, 이것을 x에 관한 식을 변형하지는 못하였다. 연구자가 '남은 주스의 양을 x 없이 바로 표현할 수는 없니?'라는 물음에 대해 그는 'x 없이 적을 수는 없어요'라고 답하였다. 이는 S2의 등식 설정에 대한 고정관념이 얼마나 강하게 자리 잡고 있는지를 보여준다. 그가 'x= 이렇게 표현할 수는 없니?'라는 직접적인 도움으로부터 주스의 양을 구했던 것은 바로 이런 이유 때문일 것이다.

② 검사 문항 2: 구체적 수치 대입에 의한 인식전환

검사문항 2에서 S2의 대수적 표상은 $y=x\times2$였으며, 그 이유는 '2분마다 $x\,cm$씩 타고 있으니까 x는 y의 2배가 되기 때문이다'는 것이었다. 따라서 S2는 함수식으로 오인한 사례로 분류되었다.

RS: 이렇게 생각한 이유를 설명해 줄래?
S2: x, y를 사용한 식이면 함수잖아요. 함수로 나타내가지고 y는 $x$cm씩 2분 동안 타서......아~ 아니에요.

위의 진술로부터 연구자가 S2의 최초 기록지로부터 함수식으로 오인한 사례 분석은 적합함을 알 수 있다.

RS: 그럼, 네가 원래 쓴 답이 잘못됐다는 거니?
S2: 네 그런 거 같아요.
RS: 그럼 다시 생각해 볼래?
S2: .... (한 동안 생각)

S2는 검사 문항 2에서 자신의 답이 오류가 있음을 인지했으나 남은 양초의 길이를 어떻게 표현해야 할지 몰라 힘들어했다. 연구자는 구체적인 수치를 제공함으로서 S2의 어려움을 돕고자 하였다.

RS: 2분에 4cm씩 타면 6분이 지나면 남은 양초 길이는 얼마가 되겠니?
S2: 8cm요.
RS: 왜 그렇게 생각했니?
S2: 2×2=4니까 6분에서 2를 곱하면 12가 되요. 12cm가 타고 남은 것은 8cm가 되요.
RS: 이제 다시 문제를 풀어보겠니?

그러자 S2는 $2\times2=y\times2$을 삭제하더니 $20-\frac{y}{2}\times x$으로 대수적 표상을 정교화하였다. S2는 연구자가 제시한 구체적 수치 상황 '2분에 4cm씩 타면 6분이 지나면 남은 양초 길이는 얼마가 되겠니?'를 통해 드디어 대수적 표상을 완성할 수 있었다. 이는 구체적 수치 상황이 대수의 추상성과 막연함 극복에 도움이 될 수 있음을 보여주는 것이다.

(2) 기하 표상의 대수적 표상 전환

① 검사 문항 4: 기록에 대한 이유 설명에 의한 정교화

S2는 검사 문항 4에 대해 대수적 표상 $4a+4b=8$을 제시했으며, 그 이유는 '각 선분마다 어두운 부분의 가로나 세로가 2cm 씩 이니까 ×4를 하면 된다'라고 답함으로써 문제 인식 오류에 해당하는 사례이다.

RS: 왜 이렇게 답을 쓴 거야? 그 이유를 설명해 주겠니?
S2: 그러니까 왼쪽에 2m 오른쪽에 2m해서 4m해서 가로 쪽이 a니까 $4a$고요 세로도 똑같이 2m가 두 개고 b니까 $4b$라고 했어요. (한참을 생각하더니) 근데 이거 답 아닌 거 같아요.
S2: (한 동안 생각하더니) 그냥 여기 오른쪽에 있는 사각형을 여기 왼쪽에 붙이면 가로는 4이고 세로는 b 해서 직사각형 넓이 구했어요. 어, 그런데 생각해보니 겹치는 모서리 이걸 생각 못했어요. 이걸 빼야 되요.
RS: 그럼 다시 식을 세워보겠니?
S2: $4a+4b-2\times2\times4$
RS: 설명해 주겠니?
S2: 그러니까 구석에 있는 작은 사각형이 가로 세로가 2니까 2×2해서 모서리가 4개니까 ×4를 했어요. 아! 아니에요.

S2는 $4a+4b-2\times2\times4$ 대신 $4a+4b-2\times2\times2$로 대수적 표상을 제시하였다.

RS: 왜 $4a+4b-2\times2\times2$라고 생각하니?
S2: 그냥 $4a+4b$하면 모서리 4개가 겹쳐지면서 더해지니까 그냥 넓이 보다 더 크게 나오고요. 여기 이건 2×2×4는 모서리 4개를 다 뺀 것인데 4개가 아니라, 2개를 빼야 된다고 생각했어요.

S2는 기하 표상에 적합한 대수적 표상을 구하는데 실패하였다. 그러나 그는 자신의 대수적 표상에 대한 설명 과정에서 스스로 자신의 표상의 문제점을 인식하고 개선하였다. 이는 대수적 표상에 대한 설명이 곧 자신의 기록에 대한 반성적 차원의 사고를 촉진시키기 때문인 것으로 생각된다.

3) S3의 사례

(1) 문장 표상의 대수적 표상 전환

① 검사 문항 1: 변수 n은 구해야하는 미지수라는 인식 고착

S3은 검사 문항 1에 대한 대수적 표상으로 $0.2\div1.2=6$을 제시하였으며 그 이유를 'n명 당 0.2L씩 나누어 주어야 하기 때문에 1.2L를 나누어야 한다.'라고 답함으로써 문제 n의 결여로 분류된 사례이다.

RS: 왜 이렇게 풀었는지 설명해 볼래?
S3: 지금 제가 주스를 가지고 있다고 보면 제가 가진 주스는 1.2 예요. 그런데 n명에게 0.2L씩 나누어 주고 남

은 주스의 양을 구하려면 총양에서 나눠줘야 하는 양을 나누면 돼요.
RS: 왜 그렇게 생각했니?
S3: 그러면 n명이 몇 명인지 나오기 때문이에요. 나누어 보면 n명은 6명

문제에서 요구하는 대수적 표상은 남은 주스의 양임에도 불구하고, S3은 변수 n을 구해야 할 대상으로 인식함으로써 사람 수에 초점을 맞추고 있었다. 이에 연구자는 '구하는 것'이 무엇인지를 인식시켜주려 하였다.

RS: 구하는 게 뭐지?
S3: 1.2L의 주스를 0.2L씩 몇 명에게 나눠줄 수 있는가 예요.
RS: 문제를 다시 한 번 읽어 보겠니? 구하는 게 뭐지?
S3: 아~ ... 남은 주스양이예요.
RS: 남은 주스 양을 구해 보겠니?
S3: 주스가 안 남지 않아요?
RS: 왜 그렇게 생각하지?
S3: 소수점을 빼고 계산해 보면 2가 12의 배수잖아요. 1.2에서 0.2를 나누면 6명이니까 나오는 답이 n명이잖아요. 그래서 나누어 주고 남으려면 1.3L나 0.3L씩 나누어 준다고 보면 주스가 남을 거 같아요. 근데 1.2하고 0.2는 배수니까 남는 게 없어요. 딱 나누어 떨어지잖아요.

S3은 '구하는 것이 무엇인가'를 묻는 연구자의 질문에 반응하면서 사람 수에서 주스의 양으로 초점을 변화할 수 있었다. 그러나 그는 변수 n을 구해야 하는 미지수로 인식함으로써 남은 주스의 양은 0L라고 생각하였다. 이에 연구자는 다른 수치를 제공함으로써 인식 변화를 유도해 보고자 하였다.

RS: n이 5명이면 안 돼?
S3: 5명이 될 수가 없죠.
RS: 왜?
S3: 이 주스를 제가 가지고 있다고 가정하면 제가 가지고 있는 주스는 1.2L이고 n명에게 나누어 주어라 하면 그냥 n명에게 0.2L씩 나누어 주다 보면 다 나누어 줄 때까지 나누어 주다보면 6명 밖에 나누어 줄 수 없으니까요.
RS: 5명에게 0.2L씩 주면 안 될까?
S3: 그럼 주스가 남죠.
RS: 남으면 안 되니?
S3: 남아도 될 것 같은데...
RS: 왜?
S3: 근데 문제에서 준거는 1.2L와 n명에게 0.2L씩 나누어 주는 거니까 그렇게 나누어 주고나면 6명이니까 만약 5명을 나누어 주면 0.2L가 남잖아요. 그럼 0.2L로 한 명을 더 나누어 줄 수 있잖아요.
RS: 0.2L를 남은 주스 양으로 하면 안 되니?
S3: 그건 안돼요. 0.1L가 남았으면 모르는데 0.2L가 남았으니 n명에게 또 나누어 줄 수 있으니까 남을 수가 없죠.

6이외에 5라는 수치가 제시됨으로써 인식 변화가 유도되는 듯 했지만, S3은 끝내 변수 n에 대한 인식을 개선하는데 실패하였다. S3은 변수 n을 구해야 할 대상으로 인식함으로써 5명인 경우 0.2L가 남는다는 것을 잘 알고 있었지만, 남은 0.2L를 n명에게 또 나누어 줄 수 있다고 생각하였다. 이는 대수적 표상 전환에서 변수 n에 대한 올바른 인식이 중요함을 보여주는 대목이다.

② 검사 문항 2: 추상적 변수에 대한 막연한 접근

S3은 검사 문항 2에 대해 대수적 표상 $y=2x$을 제시했으며, 그 이유는 제시되지 않았다.

RS: 설명해 보겠니?
S3: 2번은 잘 몰라서......길이가 20cm인 양초가 2분에 $x\,cm$씩 일정한 속력으로 탔잖아요. y분이 지났을 때는 $x\,cm$가 탄 거잖아요. 그런데 2분에 $x\,cm$씩 타니까 y분이 지났을 때 2분에 $x\,cm$씩 타요. 그래서 $y=2x$
RS: $y=2x$ 이게 남은 양초의 길이니?
S3: 아니죠. (생각하더니) 이게 그러니까 길이가 20cm인 양초가 있잖아요. 그 양초가 2분에 $x\,cm$씩 타니까 그러면 4분에 $2x$씩 타는 거랑 같잖아요. 그렇게 보면 y분이 지났을 땐.... (여기서 생각)
RS: 다시 네가 생각한 답을 써보겠니?
S3: 20cm요. 2분에 $x\,cm$씩 타고 y분이 지났을 땐 $2x$가 탄 것.......아! 모르겠어요.

S3은 최초에 남은 양초의 길이를 구하는 문제임에도 함수식을 제안하였다. 이는 변수 x, y로 인해 함수식을 세우는 문제라는 생각 때문에 빚어진 현상이다. 연구자는 그에게 남은 양초의 길이를 물음으로써, 초점 변화를 유도해 보았다. 그러나 S3은 끝내 적절한 대수적 표상을 찾는데 실패했으며, 이는 대수 변수에 대한 막연한 접근 때문인 것으로 보인다. 그의 진술에서 '2분에 $x\,cm$씩 타니까 y분이 지났을 때 2분에 $x\,cm$씩 타요'라는 부분은 그가 대수 변수를 얼마나 막연하게 인식하고 있는지를 보여준다. 즉, 그는 변수 y를 구체적으로 인식하지 못함으로써, y분과 2분이라는 시간이 중복된 잘못된 표현을 언급한 것이다.

(2) 기하 표상의 대수적 표상 전환

① 검사 문항 4: 기록에 대한 이유 설명으로부터 표상 정교화

검사 문항 4에 대한 S3의 대수적 표상은 $a\times b-(2-a)\times(2-b)=$이었으며, 그 이유는 '빈 공간의 넓이는 빼야하기 때문이다.'라고 답함으로써 부분에서 전체를 뺀 오류를 범한 사례에 해당한다.

RS: 이렇게 답한 이유를 설명해 줄래?
S3: (생각하더니) 아! 이건 잘못한 거 같아요. 다시해도 되죠? 제가 여기 식을 잘 못 적었어요.
RS: 다시 설명해 보겠니?
S3: 직사각형의 넓이는 $a\times b$ 그 안의 빈곳을 빼려면 ($ab-$ 라고 적고 생각하더니)

S3은 자신의 기록에 대해 설명하는 과정에서 스스로 문제점을 인식하고 대수적 표상을 $ab-a\times b-4$로 정교화하였다.

RS: 이렇게 쓴 이유를 설명해 주겠니?
S3: 그러니까 여기서 문제를 보면 어두운 부분의 넓이를 a, b를 사용한 식으로 나타내라고 했잖아요. 그런데 가운데를 보면 어두운 부분이 아닌 흰 부분이 있잖아요. 직사각형의 총 넓이를 구해 그 안의 흰 부분을 빼야 되요.
RS: 안의 흰 부분은 이 식에서 어떤 거니?
S3: $ab-4$요.
RS: 왜 이렇게 되니?
S3: 확실하지는 않는데......아!...

S3는 문제점을 인식하고 스스로 대수적 표상을 $ab-(a-2)(b-2)$로 개선하였다.

RS: 설명해 주겠니?
S3: 제가 다시 풀어보니 안의 흰 부분의 넓이를 구하려면 가로 길이 a에서 $2cm$를 빼고 b에서도 $2cm$를 빼고 그 둘을 곱해야 그 안의 넓이가 구해져요.
RS: 어떻게 갑자기 이 생각 할 수 있었지?
S3: 이 문제를 계속 보다보니 안의 길이를 구할 수 없으니까 이 사이에 길이를 주어서 $a-2$를 하면 안의 가로의 길이가 나와요. 그리고 세로 길이도 똑같이 나와요.

S3은 비록 정확한 정교화에 성공하지는 못했지만 자신의 대수적 표상에 대한 이유 설명 과정에서 스스로 문제점을 인식하고 조금씩 표상을 개선해 갈 수 있었다. 이는 대수적 표상에 대한 이유 설명 요청이 갖는 위력을 보여준다.

3) S4의 사례

(1) 문장표상의 대수적 표상 전환
① 검사 문항 1: 모두 나누어 주어야 한다는 강한 인식
검사 문항 1에 대해 S4는 0.6L라고 답했으며 그 이유는 $1.2L \div 0.2 = 6L$라고 언급함으로써, 문자 n의 결여로 분류된 사례에 해당한다.

RS: 0.6L라고 적은 이유를 설명해 보겠니?
S4: 1.2L의 주스에서 n명에게 나누어 주는 거라서.....0.2L씩 나누어주는 거니까 원래 1.2L 주스에서 0.2L를 나누면 n명이 나오니까요.

S4는 자신의 표상에 대해 문제점을 전혀 인식하지 못하고 있었다. 이에 연구자는 변수 n에 대한 언급을 통해 문제점 인식을 돕고자 하였다.

RS: 근데 네가 쓴 식에서 n은 어디 있지?
S4: 답이 n이라서 없어요.
RS: 그럼 n이 0.6이라는 말이니?
S4: 1.2에서 2를 나누면 6명이 되고 그리고 남은 양은 나누었는데 답이 0.6이 나와서 0.6이 맞아요.
RS: 문제에서 물어 보는 게 뭐지?
S4: 남은 주스양이에요.
RS: 그럼 남은 주스양이 0.6이라는 말이니?
S4: (생각해 보더니) 음.....틀린 거 같아요.
RS: 그럼 다시 해 보겠니?
S4: (생각해 보더니) 0 이예요. 1.2에서 0.2를 나누면 6이 나와서 6은 n명이라서 다 주었으니까 남은 주스양은 0 이예요.
RS: 답이 0이라는 말이니?
S4: 예.

S4는 변수 n에 대한 언급과 구하고자 하는 양에 대한 물음을 통해 자신의 대수적 표상에 문제점을 인식하고 $12 \div 0.2L = n \cdots 0$라고 기술하였다.

RS: 왜 그렇게 생각했니?
S4: 식에 문자가 나와야 되니까 6명을 n으로 고쳤어요.
RS: 이 식에서 답은 뭐라는 말이니?
S4: 0이에요.

RS: 왜 답을 0.6에서 0으로 바꾼 거니?
S4: 6이 나온 거는 사람 수이고 남은 숫자는 0이어서 나머지는 0이에요. 1.2에서 0.2를 나누면 나머지가 0이 되니까 0이예요.

S4는 변수 n을 특정한 수 6을 대표하는 미지수로 인식하고 있었다. 이에 연구자는 n에 6 대신 다른 수치를 제공함으로써 그의 표상 정교화를 돕고자 하였다.

RS: n에 5를 넣어서 5명에게 나누어 준다면 식이 어떻게 되겠니?
S4: (생각해 보더니) 그래도 다 나누어 주었으니 남는 거는 0이예요.
RS: 그럼 n에 어떤 수를 넣어도 답은 0이라는 말이니?
S4: 예.

S4는 n에 5를 넣어서 5명에게 나누어 주는 상황을 제시했음에도 인식 전환에 도움이 되지 못하였다. 그는 모든 주스를 나누어 주어야 한다는 강한 인식을 갖고 있었으며, 때문에 5명에게 나누어 주는 구체적 상황 제시가 도움이 되지 못한 것이다.

② 검사 문항 2: 구체적 수치 상황과 문자 상황을 별개로 인식

검사 문항 2에 대한 S4의 답은 $x=10$, $y=1$분이라고 구체적인 수치로 답을 하였고 그 이유는 $20\div 2=xcm=10cm=1$분, $20cm=2$분, $10cm=1$분이라고 제시한 사례이다.

RS: 이것을 설명해 주겠니?
S4: $20cm$인 양초가 2분에 xcm씩 타고 있으니까 그럼 $20\div2$를 하면 xcm가 돼요. 그래서 $20\div2$는 $10cm$ 여서 $20cm$의 양초가 2분에 xcm씩 탄다고 하면 $10cm$는 1분이예요. 그래서 $20cm$는 2분 $10cm$는 1분이예요.
RS: 양초의 길이가 $10cm$이고 시간이 1분이라는 말이니?
S4: 예.

S4는 변수 x, y를 구해야 하는 미지수로 인식하고 있었다. 이에 우리는 그의 인식 개선을 돕고자 문제를 다시 읽어 볼 것을 권하였다.

RS: 문제를 다시 한 번 읽어볼래?
S4: (문제를 읽으며 생각해 보더니) 틀린 것 같아요.
RS: 그럼 다시 한 번 풀어 볼래?
S4: (한참을 생각하더니) 구할 수 없어요. 왜냐하면 y가 몇 분인지 모르니까. 아~ $x=y+y+y+\cdots$ 예요.
RS: 어떻게 이런 생각을 했니?
S4: y가 몇 분을 나타내니까 몇 분이 지날 때마다 x가 일정하게 타니까.
RS: x가 뭐라고 생각하니?
S4: x는 양초가 일정하게 타고 있는 정도예요. 일정하게 타고 있는 정도는 y가 계속 더해진 것이니까요.
RS: 그럼 $20cm$와 2분은 무엇을 나타내는 거니?
S4: $20cm$는 원래 양초의 길이이고 2분 대신에 y분이 나왔으니까.

연구자는 구체적 수치 상황 제공함으로써 S4의 어려움 극복을 돕고자 하였다.

RS: 2분에 $4cm$씩 탄다면 6분 후에 남은 양초의 길이는 얼마가 되겠니?
S4: $8cm$요
RS: 어떻게 풀었니?
S4: 2분에 $4cm$면 2×3=6이니까 4×3=12이고 20-12=8이 나와요.

RS: 그럼 다시 식을 적어보겠니?
S4: (한참을 생각하더니) $y=x\times\square$
RS: □는 무엇을 나타내는 거니?
S4: y가 몇 분 지나면 y가 몇 배로 달라지니까.

S4는 구체적 수치 상황에서는 남은 양초의 길이를 잘 구하였다. 그러나 그는 문자 상황에 대해서는 남은 양초의 길이를 올바르게 구하지 못하였다. S4는 구체적 수치 상황처럼 문자를 다루고 사용하지 못한 것이다. 이는 S4가 문자 상황을 구체적 수치와 별개로 인식하고 있음을 보여준다. 따라서 그에서 구체적 수치 상황은 도움이 되지 못한 것이다.

(2) 기하 표상의 대수적 표상 전환
① 검사 문항 3: 구체적 수치 상황과 문자 상황을 별개로 인식
검사문항 3의 경우 기하표상의 시각적 특징에 의해 29명의 설문대상자 중에 정답이 19명으로 65.52%의 정답율을 보인 문제이다. S4의 경우 오답자 10명 중 한 명으로 $2ab$라고 답을 썼으며 그 이유는 $a=2$, $b=2$이기 때문이라고 언급한 사례이다.

RS: 설명해 주겠니?
S4: 찍었는데......원래 사각형 구하는 것은 가로×세로니까.
RS: 가로×세로는 무엇을 구하는 거니?
S4: 넓이요 아.......둘레구나! a가 두 개고 b도 두 개여서. 그런데 a하고 b는 합칠 수가 없어요. 숫자가 아니어서.
RS: 왜 $2ab$라고 구했니?
S4: 원래는 $2a\times2b$라고 해야 해요.
RS: 왜 그렇게 생각하니?
S4: a가 두 개 b가 두 개여서 그래요. 4개의 식을 모두 더하면 $2a\times2b$가 돼요.
RS: 모두 더했는데 왜 곱하기를 쓴 거니?
S4: a와 b는 숫자가 아니라 기호여서 더할 수 없어요. 그래서 곱하기로 나타냈어요.
RS: 기호는 더할 수는 없어도 곱할 수는 있다는 거니?
S4: 예.

S4는 문자를 구체적 수치와 별개로 인식하는 명백한 증거를 보여주었다. 'a와 b는 숫자가 아니라 기호여서 더할 수 없어요. 그래서 곱하기로 나타냈어요'라는 표현은 그가 숫자와 문자를 별개의 것으로 인식하고 있음을 보여준다. 이러한 그의 인식 때문에 그는 문자로 대표되는 대수적 표상 정교화에 실패하였던 것이다.

② 검사 문항 4: 어림에 의한 변수의 수치화
S4의 검사 문항 4에 대한 대수적 표상은 1.6이며, 그 이유는 '안의 직사각형의 세로의 길이는 2×4와 같다. =8 안의 직사각형의 가로의 길이는 2×9와 같다.=18 겉의 직사각형의 b의 길이는 2×6과 같다.=12 겉의 직사각형의 a의 길이는 2×11과 같다.=22 그래서 18×8=144 12×22=264 244÷144=1.6'라고 언급함으로써 문제 인식 오류에 해당한 사례이다.

RS: 설명해 주겠니?
S4: (생각해 보더니) 아! 잘못 풀었어요. 답이 틀렸어요. b는 어림해서 2m가 6개 들어가서 2×6=12 $b=12$이고 a는 2m가 10개 들어가서 2×10=20 $a=20$이예요. 그리고 안의 것은 2가 4번 들어가서 8이예요.
RS :뭐가 8이라는 말이니?
S4: 안의 사각형의 가로 길이요. 세로 길이는 2×9=18이어서 가로×세로를 하면 18×8=144예요. 그래서 안의 사각

형의 넓이는 144예요. 그리고 겉의 사각형의 넓이는 20×12=240이 나와요. 그리고 144랑 240을 빼면 96. 그래서 96이예요.

RS: 그럼 이 문제의 답은 96이라는 말이니?

S4: 예. 확실해요.

RS: 네가 쓴 답은 1.6인데 지금은 96으로 바뀌었네. 어떻게 한 거지?

S4: 앞에는 계산을 잘 못했어요. 원래 2m로 해야 맞는 건데 1m로 잘못 생각해서 이런 답이 나왔어요.

S4는 변수를 구해야 할 대상으로 인식하고 있었으며, 심지어 그 값을 어림에 의해 구하는 것이 가능하다고 믿고 있었다. 때문에 그는 적합한 대수적 표상에 대해 어떠한 문자도 등장하지 않는 수치를 제안했던 것이다.

Ⅴ. 결론 및 논의

여러 가지 문제 상황에 대한 대수 응용력의 첫 단계는 문제 상황의 대수화이다. 즉, 주어진 문제 상황을 그에 적합한 대수적 표상으로 전환 가능할 때, 대수에 의한 문제 해결이 가능해 진다. 이런 점에 비추어 볼 때, 대수적 표상 전환 및 정교화 능력은 대수의 응용력을 경험하기 위해 반드시 갖추어야 할 요소에 해당한다. 본 연구에서는 대수를 본격적으로 학습하는 중학교 1학년 학생을 대상으로 문장 표상과 기하 표상으로 구성된 4개의 문항을 제시하여 이들을 대수적 표상으로 전환하는 능력을 살펴보았다. 검사문항 3을 제외한 나머지 문항에서 정답률은 10% 내외였다. 이러한 결과는 문장 표상이나 기하 표상을 대수적 표상으로 전환하는 것이 학생들에게 쉽지 않은 인지적 과제임을 보여준다.

한편, 대수적 표상 전환에 어려움을 보이는 4명의 학생들과 개별 면담을 통해 이들의 인지적 특성을 파악해 보았다. 그 결과 다음과 같은 몇 가지 특징을 파악할 수 있었다.

첫째, 대수적 표상 정교화의 과정은 급진적으로 이루어지는 것이 아니라, 점진적인 개선 과정임을 확인할 수 있었다. S1은 대표적 점진적 개선을 이룬 사례로, 그는 검사 문항 4에 대해 설명 과정에서 둘레에서 넓이로 초점을 이동할 수 있었다. 그러나 이후에도 빼야할 것이 양쪽임에도 한 쪽에만 치우친 인식을 보여주었다가 양쪽으로 초점을 변화시킬 수 있었다. 이러한 점진적 개선은 비단 S1에서만 나타난 것이 아니라, 네 사례 모두에서 나타난 공통 현상이었다.

둘째, 대수적 표상 정교화를 필요로 하는 문제에 대해 문제 요구 사항에 대한 초점이 잘못될 수 있음을 확인할 수 있었다. S1은 문제 요구 사항에 대한 초점이 흐려진 대표 사례이다. 그는 검사 문항 1에 대해 남은 주스의 양이 아닌 사람 수에 초점을 두었다. 또한 검사 문항 4에 대해서도 그는 넓이 대신 둘레에 초점을 두고 있었다. 이러한 현상은 비단 S1에 국한된 것이 아니라, S2와 S3에게서도 검사 문항 1에 대해 동일 현상이 나타났다. 이는 문제 요구 사항에 대해 정확한 인식 즉, 문제에 대한 이해 능력이 결여될 수 있음을 보여준다.

셋째, 자신의 대수적 표상에 대한 설명이나 구체적 수치 상황이 대수적 표상 정교화에 도움이 될 수 있음을 확인할 수 있었다. S1이 검사 문항 4에서 보여준 정교화는 자신의 기록에 대한 설명을 통해 이루어진 것이다. S2와 S3 역시 검사 문항 4에서 동일한 모습을 보여주었으며, 다른 검사 문항에서도 자신의 기록에 대한 설명은 대수적 표상이 갖는 오류 인식에 도움이 되었다. 이는 대수적 표상에 대한 설명이 기록에 대한 반성적 사고를 촉진시키기 때문에 빚어진 결과로 생각된다. 이러한 결과는 외적 표상이 내적 표상의 한계를 극복 가능하게 만드는 요인으로 작용할 수 있음을 주장한 Chambers & Reisberg(1985)와 Corter &

Zahner(2007)의 연구와 일맥상통하다.

한편, S1은 검사 문항 1에서 다른 수치 제시를 통해 변수 n에 대한 특정수 인식을 탈피할 수 있었다. 또한 S2 역시 구체적 수치 대입을 통해 최초 인식을 개선하고 적절한 대수적 표상으로 정교화할 수 있었다. 문자로 대표되는 변수는 추상성을 갖는바, 구체적 수치 상황 제시는 문자 역시 구체적으로 사고할 수 있는 기반이 될 수 있는 가능성을 지니는 것이다. 구체적 수치 상황을 통해 문제를 구체화하여 사고할 수 있게 됨으로써 문장제에 대한 이해가 향상될 수 있었고, 결국 대수적 표상 정교화에 정교화할 수 있게 된 것이다.

넷째, 정교화의 경험은 전이력을 가질 수 있음을 확인할 수 있었다. S1은 대표적 사례로 검사 문항 2에서 검사 문항 1의 정교화 경험 덕분으로 아무런 도움 없이 쉽게 정교화에 성공할 수 있었다. 사실 검사 문항 2는 검사 문항 1에 비해 난이도가 높은 문제임에도 적절한 정교화가 가능했던 것은 검사 문항 1의 정교화 경험임을 부인하기 어렵다. 따라서 단 한 번의 경험일지라도 대수적 표상에 대한 정교화 경험은 대단히 중요하다.

다섯째, 변수에 대한 오개념, 등식을 설정해야 한다는 오개념 및 변수 x, y가 있으면 함수 문제라는 오개념이 대수적 표상 전환의 방해 요인이 될 수 있음을 확인할 수 있었다. S1과 S3은 검사 문항 1에서 문자 변수가 특정수를 대표한다는 오개념 때문에 대수적 표상 전환에 어려움을 겪었다. 또한 S4는 검사 문항 2와 3에서 구체적 수치 상황과 문자 상황을 별개로 인식함으로써, 대수적 표상 정교화에 실패하였다. S4는 검사 문항 4에서도 어림에 의해 일반적 변수를 구체적 수치화하는 것이 가능하다는 잘못된 인식으로 대수적 표상 정교화에 실패하였다.

한편, S2는 검사 문항 1에서 문장 상황은 반드시 등식으로 설정해야 한다는 고착된 사고의 방해를 받은 대표적 사례이다. 또한 S3은 검사 문항 2에서 최초 대수적 표상을 $y=2x$라는 함수식을 제시했는데, 이는 변수 x, y로 인해 빚어진 결과임을 확인할 수 있었다. 이러한 결과는 최근 문장제 연구 초점이 되어 온 스키마와 관련되며(Powell & Fuchs, 2010), 스키마의 측면에서 문장제의 어려움을 논의한 Fuchs et al.(2004)와 Jitendra et al.(2007)의 연구 관점에서 해석 가능하다. 즉, 학생들은 문장제를 어떤 유형에 속하는 것으로 인식하며, 관련 스키마에 어울리는 해결 전략을 적용한다는 스키마의 관점에서 이와 같은 오개념이 이해 가능하다.

이상의 결과로부터 대수적 표상 전환 및 정교화에 관한 몇 가지 교수학적 시사점 추출이 가능하다.

첫째, 문장 표상 및 기하 표상에 대한 대수적 표상 전환이 쉽지 않은 인지적 과제인 만큼, 이들을 돕기 위한 별도의 교수가 마련되어야 할 것이다. 현재 문장제 교수는 주어진 문장을 방정식으로 전환, 방정식으로부터 해를 구하여 해가 문장제 상황에 적합한지를 해석함으로써 끝맺는 방식을 취한다. 그리고 문장제 해법 지도 이전에 충분히 학습되는 내용은 주어진 문장을 방정식으로 전환하는 부분이 아니라, 주어진 방정식의 해법에 관한 부분이 주류를 이룬다(강옥기 외, 2013; 이준열 외, 2009a, 2009b). 그러나 본 연구의 결과 대수적 표상 전환에 어려움을 겪는 만큼, 이 부분 역시도 사전에 충분한 지도가 수행되어야 한다. 즉, 문장제를 다루기 전에 방정식의 해법만이 지도될 것이 아니라, 문장 상황을 대수적 표상으로 전환하는 충분한 기회가 제공되어야 할 것이다.

둘째, 대수적 표상 정교화는 점진적인 개선 과정임을 확인했던 만큼, 학생들 스스로 정교화의 경험을 가질 수 있도록 기다려주는 인내가 필요하다. 학교 수학은 주어진 교육 과정을 수행해야 하는 제약을 갖는바, 자칫 진도에 연연해 학생들의 발견 기회를 박탈하는 우를 범

할 수 있다. 그러나 구성주의자들의 주장처럼 지식은 스스로 발견하는 과정 속에 성장한다. 결국 학생들에게 자신의 대수적 표상이 갖는 문제점을 스스로 인식하고 개선하는 기회를 제공하는 여유가 진정으로 학생을 돕는 방법임을 명심해야 할 것이다.

셋째, 문제 요구 사항의 확인, 자신의 대수적 표상에 대한 설명과 구체적 수치 상황 제시가 대수적 표상 정교화에 도움이 될 수 있음을 확인한바, 이들을 적극적으로 활용한 교수가 수행될 필요가 있다. 문제 요구 사항에 대한 초점이 흐려진 경우 이를 확인해 볼 것을 요구함으로써, 학생 스스로 정교화 가능하다. 또한 자신의 대수적 표상에 대한 설명은 반성적 차원의 사고를 촉진시킴으로써 스스로 대수적 표상을 정교화하는 방법이 될 수 있다. 아울러 구체적 수치 상황은 문자의 추상성을 극복하는 방법이 될 수 있다.

넷째, 대수적 표상 정교화의 경험은 다른 문제로 파급되는 전이력을 갖는바, 학생 스스로 대수적 표상을 정교화하는 경험을 갖게 해야 할 것이 필요하다. S1은 이전 정교화의 경험 덕분으로 보다 난이도가 높은 문제를 쉽게 정교화할 수 있었다. 이런 점을 고려할 때, 학생들에게 단순히 다수의 문제를 제공하여 해결할 기회를 갖게 하기보다, 하나의 문제라도 스스로 해결하는 경험을 갖게 하는 것이 필요하다.

다섯째, 대수적 표상 정교화를 원활히 수행하기 위해서는 사전에 문자 변수에 대한 충분한 이해가 수반되어야 할 것이다. 변수에 대한 오개념은 대수적 표상 정교화를 방해하는 주요 요인이었다. 심지어 S4는 문자 변수에 대한 막연한 접근과 구체적 수치와 별개로 인식함으로써, 자신의 대수적 표상에 대한 설명과 구체적 수치 상황 제시가 전혀 도움이 되지 못하였다. 이는 이들 활동이 도움이 되기 위해서는 변수에 대한 충분한 이해가 수반되어야 함을 보여준다.

여섯째, 문장 상황은 반드시 등식을 설정해야 한다는 오개념 및 변수 x, y가 있으면 함수 문제라는 오개념이 대수적 표상 전환에 방해 요인으로 작용한바, 이들을 극복할 수 있는 별도의 방안이 마련되어야 한다. 우리의 현 교수의 대다수는 문장 상황이 반드시 등식으로 전환되는 것이 주류를 이룬다. 또한 변수 x, y가 들어 있는 문제는 함수로 전환되는 것이 대다수이다. 이런 특징이 학생들의 오개념과 전혀 무관하다고 볼 수 없는 점을 고려할 때, 본 연구에서 사용한 검사 문항 역시도 학교 수학에서 다루어질 필요가 있다. 즉, 문장 상황이 등식으로 전환되지 않는 문항과 변수 x, y가 들어있지만 함수로 전환되지 않는 문항 역시도 교수에 다루어져야 할 것이다.

참고 문헌

강옥기·권언근·이형주·우희정·윤상혁·김태희·김수철·유승연·윤혜미(2013). 중학교 수학 1. 서울: 두산동아.

강정기(2013). 본질적 속성 추출을 통한 일반화에 관한 연구. 경상대학교 대학원 박사학위논문.

김남희(1992). 변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

김남희(1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김성준(2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김진호·김경미·권혁진(2009). 대수 문장제의 오류 유형과 문제 해결의 관련성 분석. 한국수

학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 23(3), 599-624.
박장희·유시규·이중권(2012). 실생활 문장제의 해결과정에 나타나는 오류유형 분석. 한국학교수학회논문집, 15(4), 699-718.
박정아·신현용(2005). 중학교 1학년 학생들의 농도 문장제 해결력에 대한 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 44(4), 525-534.
서지영(2011). 중학생들의 문장제 문제 해결과정에서 나타나는 오류 분석. 순천대학교 대학원 석사학위논문.
이은영(2010). 중학교 1학년의 일차방정식의 문장제 문제해결의 오류분석. 공주대학교 교육대학원 석사학위논문.
이준열·최부림·김동재·송영준·윤상호·황선미(2009a) 중학교 수학 1. 서울: 천재교육.
이준열·최부림·김동재·송영준·윤상호·황선미(2009b) 중학교 수학 익힘책 1. 서울: 천재교육.
장혜원(1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
Benko, A., Loisa, R., Long, R., Sacharski, M. & Winkler, J.(1999). Math word problem remediation with elementary students. Saint Xavier University.
Booth, L. R.(1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), The ideas of algebra K-12: 1988 yearbook (pp.20-32). Reston, VA: NCTM.
Bruner, J. S.(1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass: Havard University Press.
Chambers, D., & Reisberg, D. (1985). Can mental images be ambiguous? Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance, 3, 317-328.
Clement, J.(1982). Algebra word problem solution: Thought processes underlying a common misconception. Journal for Research in Mathematics Education, 13(1), 16-30.
Collis, K. F.(1975). The development of formal reasoning. Newcastle, Australia: University of Newcastle.
Corter, J. E. & Zahner, D. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. Statistics Education Research Journal, 6(1), 22-50.
Coy, J.(2001). Teaching fifth garde mathematical concepts: effects of word problems uses with traditional methods. Master of Arts Action Research Project, Johnson Bible College.
Fuchs L. S, Fuchs D, Finelli R, Courey S. J, Hamlett C. L.(2004). Expanding schema-based transfer instruction to help third graders solve real-life mathematical problems. American Educational Research Journal. 41, 419 - 445.
Goldin, G. & Shteingold (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio(Eds.), The roles of representation in school mathematics. Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.
Jitendar, A. K., Griffin, C. G., McGoey, K., Gardill, M. C., Bhat, P. & Riley, T.(1998). Effect of mathematicdal word problem solving by students at risk or with mild disabilities. The Journal of Educational Research, 91(6), 345-355.
Jitendra A. K, Griffin C. C, Deatline-Buchman A, Sczesniak E.(2007). Mathematical problem solving in third grade classrooms. Journal of Educational Research. 100, 283 - 302.
Kieran, C. & Chalouh, L.(1999). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In

B. Moses(Ed.), Algebraic thinking, Grades K-12, 59-70. Reston, VA: NCTM.

Lesh, R.(1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis and remediation. In R. Lesh, D. Meierkiewicz, & M. G. Kantowski(Eds.), Applied mathematical problem solving. Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Mason, J. & Pimm, D.(1984). Generic example: seeing the general in the particular. Educational Studied in Mathematics, 15, 227-289.

Mayer, R. E.(1983). Thinking, problem solving, Cognition. NY: W. H. Freeman and Company.

Miura, I. T.(2001). The influence of language on mathematical representations. In F. R. Curcio(Ed.), The roles of representation in school mathematics. Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ng, S. F. & Lee, K.(2009). The model method: singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 40(3), 282-313.

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A.(2001). The role of representations in developing mathematical understanding. Theory into practice, 40(2), 118-127.

Powell, S. R. & Fuchs, L. S.(2010). Contribution of equal-Sign instruction beyond word-problem tutoring for third-grade students with mathematics difficulty. J Educ Psychol. 102(2), 381-394.

Usiskin, Z.(1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In The Ideas of algebra K-12. NCTM yearbook, 8-19.

van Amerom, B.(2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. Educational Studied in Mathematics, 54, 63-75.

Wagner, S.(1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. Journal of Research in Mathematics Education, 12(1). 107-118.

Wollman, W.(1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation, Journal for Research in Mathematics Education, 14(3), 169-181.

A Study on the Transformation of Algebraic Representation and the Elaboration for Grade 7

Lee, Kyong Rim[6] · Kang, Jeong Gi[7] · Roh, Eun Hwan[8]

Abstract

The algebra is an important tool influencing on a mathematics in general. To make good use of the algebra, it is necessary to transfer from a given situation to a proper algebraic representation. But some research in related to algebraic word problems have reported the difficulty changing to a proper algebraic representation. Our study have focused on transformation and elaboration of algebraic representation. We investigated in detail the responses and perceptions of 29 Grade 7 students while transforming to algebraic representation, only concentrating on the literature expression form the problematic situations given. Most of students showed difficulties in transforming both descriptive and geometric problems to algebraic representation. 10% of them responded wrong answers except only a problem. Four of them were interviewed individually to show their thinking and find the factor influencing on a positive elaboration. As results, we could find some characteristics of their thinking including the misconception that regard the problem finding a functional formula because there are the variables x and y in the problematic situation. In addition, we could find the their fixation which student have to set up the equation. Furthermore we could check that making student explain own algebraic representation was able to become the factor influencing on a positive elaboration. From these, we also discussed about several didactical implications.

Key Words : descriptive representation, geometric representation, algebraic representation, representation transformation and elaboration

Received October 21, 2014
Revised December 16, 2014
Accepted December 25, 2014

6) Graduate School of Education at Chinju National University of Education (gayemom@hanmail.net)
7) Corresponding Author, Namsan Middle School (jeonggikang@gmail.com)
8) Chinju National University of Education (idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr)