J. Soc. Korea Ind. Syst. Eng Vol. 37, No. 4 : 134-144, December 2014
http://dx.doi.org/10.11627/jkise.2014.37.4.134

ISSN : 2005-0461(print)
ISSN : 2287-7975(online)

Comparison of the Unbiasing Constants in Connection with Variable Control Charts

Haeil Ahn†

Department of Industrial Engineering, Seokyeong University

계량형 관리도와 관련된 불편화 상수의 비교

안 해 일†

서경대학교 산업공학과

With the advent of lean-six sigma era, an extensive use of analytic tools such as control charts is required in the field of manufacturing. In relation to statistical quality control (SQC) or process control (SPC), the Korean standards have undergone a meaningful change. In this study, the theoretic backgrounds for evaluating the control limits in connection with the variable control charts are examined in view of better understanding the related constants and coefficients. This paper is intended to help the quality control practitioners understand the mathematical backgrounds by comparing related quality control constants and also to encourage them to make use of and to take the advantage of the variable control charts which are very useful for implementing the concept of lean-six sigma in many industrial sites.

Keywords : Statistical Process Control, Control Chart, Unbiasing Constant

1. 서 론

최근 국내 품질관리와 관련된 표준규격(KS)이 국제표준(ISO)규격에 준하는 것으로 새롭게 개편 되었다. 구체적인 변경사항은 한국산업인력 관리공단에서 발행한 “KS 규격 변경전후 비교요약 및 통계수치 표”에 잘 소개되어 있다. 근본적인 변화가 있는 것은 아니지만 국제적인 표준화 추세를 반영한 것으로 생각된다.

관리도 작성과 관련된 여러 가지의 변화가 있어 품질관리분야에 종사하는 많은 사람들이 다소 혼란스러워 하며 통계적 품질관리(SQC) 교재나 참고서에도 반영 되어야 하는 등 당분간 이러한 어려움은 피할 수 없을 지도 모른다.

Received 29 August 2014; Finally Revised 27 November 2014; Accepted 27 November 2014
† Corresponding Author : hiahn@skuniv.ac.kr

특히 지금까지 산업현장에서 많이 활용되던 관리도(control chart) 작성방법에 있어서도 예외가 아니다. 과거에 Shewhart control charts와 관련된 KS A 3201이 폐지되고 새롭게 KS A ISO 8258(2008년 11월 21일)로 재편되었으며 2013년 12월 4일 최종 개정 확인되었다[7]. 또한 여러 가지 다른 형태의 관리도 작성 일반지침도 KS A 7870에서 KS Q ISO 7870-1(2012년 8월 29일)로 변경되어 있다[8].

지금까지 알려져 왔던 $\overline{x}-R$ 관리도의 작성절차는 별다른 변화가 없으나 $\overline{x}-\sigma$ 관리도의 작성에 있어서 그간 사용해오던 불편화 상수 c_2의 사용을 지양 하고 c_4의 사용을 권장하고 있는 것으로 판단된다.

본 고의 목적은 KS규격의 국제표준에 따른 산업현장 또는 교육기관에서의 혼란을 다소나마 경감시켜보고 특히 린-식스 시그마(lean-six sigma)로 대변될 수 있는 현대의 생산관리 또는 공정관리에 있어서 어떠한 관리도가 가장 적합한가를 검토해보고자 한다. 그 방법으로서는 품질관리 불편화 상수 d_2와 c_4를 중심으로 이러한 상수

가 도입된 경위, 수리적 배경, 품질관리 불편화 상수 c_2 와의 관계, 관리도계수의 수리적 계산 방법, 관리도에 대한 관리도의 상대적 건전성, 관리 한계선의 변경여부 등 여러 가지 문헌에 산재되어있는 내용을 참고하여 정리하였으며 경우에 따라서는 수식을 새롭게 유도하기도 하여 정리 작성하였다.

특히 관리도 불편화 상수(unbiasing constant)와 관리도계수(control chart coefficients)들 간의 비교를 통하여 관리도의 수리적 배경에 대한 이해와 $\overline{x}-s$ 관리도의 바람직한 특성을 강조하여 산업현장에서의 사용을 독려 하고자 한다.

2. 계량형 관리도

2.1 관리도

공정에서 생산되며 특정 품질 특성치를 갖는 제품이 k 개의 군(로트)으로 구분되어있을 때 각 로트의 모 평균을 $\mu_i,\ i=1,\cdots,k$라하고 전체에 대한 총 평균(grand mean)을 μ라 하자. 한편 각 군(로트)의 모 표준편차를 $\sigma_i,\ i=1,\cdots,k$라하고 전체에 대한 총 표준편차(grand standard deviation)을 σ라 하기로 한다.

추정하고자 하는 모수의 추정량의 기대치와 표준편차로 중심선(center line; CL)과 관리상한(upper control limit; UCL)과 관리하한(lower control limit : LCL)을 정해놓고 군(로트)별로 시간이 경과함에 따른 변동성(variability)을 감시(monitoring) 및 제어(control) 하고 자 하는 수단 이다.

예를 들어 각 모집단의 평균들 $\mu_i,\ i=1,\cdots,k$의 변동성을 감시하려면 추정통계량의 총 모평균 μ을 중심으로 하고 상한과 하한을 정해야 하는데 각 모집단으로 부터의 표본통계량 $\overline{x}$의 기대치 $E(\overline{x})$와 표준편차 $D(\overline{x})$로 그 관리한계를 정한다. $\overline{x}$ 관리도의 경우 관리한계는 $E(\overline{x})\pm 3D(\overline{x})$ 또는 $E(\overline{x})\pm 3\sqrt{Var(\overline{x})}$ 또는 $\mu\pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 만일 μ와 σ를 알고 있다면 다음과 같이 관리한계를 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} UCL=\mu+3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\mu+A\sigma \\ CL=\mu \\ LCL=\mu-3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\mu-A\sigma \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $A=3/\sqrt{n}$이다. μ와 σ가 미지이므로 이를 추정할 수 있는 여러 가지 통계적인 추정량이 사용 되고 있다. 추정방법에 따라 관리도의 종류가 결정 된다고 할 수 있다. 표준편차의 경우도 마찬가지이다.

2.2 범위에 의한 모 표준편차의 추정

범위에 의한 공정 모 분산의 추정은 $\overline{x}-R$ 관리도에 서 주로 사용한다. $\overline{x}-R$ 관리도는 1924년 슈하르트(Schewhart)에 의해 창안된 이래 가장 보편적으로 사용되고 있는 아주 유명한 계량형 관리도라고 할 수 있다[7]. 이 관리도 이론적 근거는 범위(range)라고 하는 순서 통계량(order statistic)으로부터 유도될 수 있으며 이 범위라고 하는 통계량 (statistic)으로도 모집단의 산포 (표준편차)를 쉽게 추정 할 수 있다고 하는 장점을 가지고 있다.

구체적으로 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$을 하나의 모집단 군(로트)으로부터의 확률 표본(random sample)이라 할 때 최대치와 최소치를 갖는 관측치를 각각 $x_{\max}$그리고 $x_{\min}$이라고 하면 즉,

$$x_{\max}=\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \tag{2}$$

$$x_{\max}=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \tag{3}$$

이라고 한다면 (표본)범위 R은 다음과 같이 정의된다.

$$R=x_{\max}-x_{\min} \tag{4}$$

여기서 $x_{\max}$와 $x_{\min}$에 대한 결합밀도 함수(joint density function)로부터 R에 대한 밀도함수를 구할 수 있다[10].

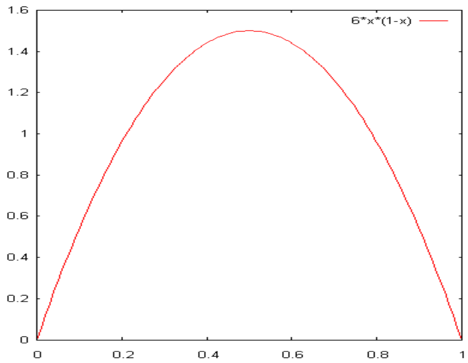
$$\begin{aligned} f_R(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_{\max},\,x_{\min}}(u+y,\,y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_{\max},x_{\min}}(x,\,s-u)\,dx \\ &= n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)-F(x-u)]^{n-2}f(x)f(x-u)\,dx \end{aligned} \tag{5}$$

예를 들어 모집단이 균등분포(uniform distribution)를 따른다고 할 때, 즉, $X\sim UNI(0,1)$이면

$$f_R(u)=\begin{cases} n(n-1)u^{n-2}(1-u), & 0\le u\le 1 \\ 0 & ,\ elsewhere \end{cases} \tag{6}$$

와 같이 된다고 할 수 있으며 정규분포와 대단히 유사한 모양을 갖게 된다는 사실이 알려져 있다. 만 일 표본크기 $n=3$일 때는 밀도함수는 다음과 같으며 <Figure 1> 같은 형태를 취한다.

$$f_R(u)=\begin{cases} 6u(1-u), & 0\le u\le 1 \\ 0 & ,\ elsewhere \end{cases} \tag{7}$$



<Figure 1> Probability Density Function of Range($n=3$)

모집단이 정규분포(normal distribution)를 따르는 경우라면 다음과 같은 표준화 범위(standardized range)라고 하는 확률 변수(W)를 먼저 생각한다.

$$W=\frac{R}{\sigma} \tag{8}$$

범위 R은 n과 σ의 함수이지만 표준화 범위 W의 분포는 표본 크기 n만의 함수가 된다. 따라서 품질 관리에서는 표준화 범위에 대한 수리적 기대치와 분산을 상수 d_2와 d_3로 표시한다.

$$E(W)=E\left(\frac{R}{\sigma}\right)=d_2 \tag{9}$$

$$Var(W)=Var\left(\frac{R}{\sigma}\right)=d_3^2 \tag{10}$$

따라서 $E(R)=d_2\sigma$이고 또는 $E(R/d_2)=\sigma$가 된다. 이것이

$$\hat{\sigma}=\frac{R}{d_2} \tag{11}$$

로 사용할 수 있는 근거이다. 이때 d_2를 σ의 불편추정을 위한 불편화 상수(unbiasing constant)라 한다.

확률변수의 밀도함수는 앞서 언급한 범위의 일반 공식에 모집단의 밀도함수와 누적분포함수를 대입하면 되는데 정규분포의 경우에는 누적분포함수를 구하는 방법이 알려져 있지 않다. 그리하여 정규분포를 가정 하는 경우 d_2, d_3 등의 계산은 수치해석법(numerical analysis)에 의존하여 계산한다.

만일 k개의 모집단(군)이 있어서 각 모집단으로부터의 범위를 각각 $R_1, R_2, R_3, \cdots, R_k$라 하면 표본범위의 평균은

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{k}R_i/k \tag{12}$$

로 계산되고 $E(\overline{R})=E(R)=d_2\sigma$임을 알 수 있으므로

$$\hat{\sigma}=\frac{\overline{R}}{d_2} \tag{13}$$

와 같이 모 표준편차를 추정할 수 있다.

이와 같이 범위는 최대치와 최소치만을 사용하기 때문에 계산은 간편할 수 있어도 충분통계량(sufficient statistic)이라고 할 수 없다는 단점을 가지고 있다.

2.3 분산에 의한 모 표준편차의 추정

최소분산과 불편분산을 이용하여도 모 표준편차의 불편 추정량을 구할 수 있다. 불편화 상수 c_2와 c_4의 차이는 바로 분산의 추정방식의 차이에 기인한다고 할 수 있다. 즉, 최우추정량(maximum likelihood estimator; MLE)으로 유도한 최소분산(minimum variance) 추정량을 사용할 것인가 또는 불편 추정량(unbiased estimator)인 불편분산(unbiased variance)을 사용할 것인가에 따라 달라진다고 할 수 있다.

여기에서는 최소분산과 불편분산을 다음과 같이 구별하고자 한다.

$$\text{Minimum variance}: \tilde{s}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \tag{14}$$

$$\text{Unbiased variance}: \tilde{s}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \tag{15}$$

통계학에서는 매우 유명한 사실로서 모집단이 정규 분포일 때

$$\frac{n\tilde{s}^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1) \tag{16}$$

이고 $E[x^2(v)]=v$와 $Var[x^2(v)]=2v$라는 결과를 이용하면 <Table 1>의 관계식들을 쉽게 증명할 수 있다.

<Table 1> Expectation, Variance and Standard Deviation

	Minimum Sample Variance	Unbiased Sample Variance
Expectation	$E(\tilde{s}^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$	$E(s^2)=\sigma^2$
Variance	$Var(\tilde{s}^2)=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$	$Var(s^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$
Standard Deviation	$D(\tilde{s}^2)=\sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2}}\sigma^2$	$D(s^2)=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\sigma^2$

실은 모집단이 정규분포를 따른다고 하는 가정 없이도

$$E(s^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]=\sigma^2 \tag{17}$$

이라고 하는 사실을 증명할 수 있고 <<Table 1>을 완성할 수 있다.

여기서 주목할 점은 $E(s^2)=\sigma^2$이지만 $E(s)\neq\sigma$라는 사실이며 상수 c_4를 도입하면 $E(s)=c_4\sigma$가 될 수 있고 다음과 같이 불편 추정량이 정의된다.

$$\hat{\sigma}=\frac{s}{c_4} \tag{18}$$

여기서 c_4도 불편화 상수이다. 마찬가지로 최소 분산을 사용할 경우

$$\hat{\sigma}=\frac{\tilde{s}}{c_2} \tag{19}$$

와 같이 추정하여야 한다.

2.3.1 최소분산

정규분포를 따르는 모집단에서 추출된 하나의 표본 $(\{x_1, x_{2,}\cdots, x_n\})$의 최소(분산) 표준 편차 $\tilde{s}$의 수리적인 기대 값과 표준편차는 다음과 같이 제시되고 있다.

$$E(\tilde{s})=c_2\sigma \tag{20}$$

$$D(\tilde{s})=\sqrt{\frac{n-1}{n}-c_2^2}\,\sigma=c_3\sigma \tag{21}$$

관리도의 작성에서는 일반적으로 k개의 모집단(로트)으로부터 각각 크기 n의 표본을 추출하였을 때 각 표본으로부터의 최소분산 추정치들 $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \cdots, \tilde{s}_k$의 평균 은 다음과 같이 표현되며

$$\bar{\tilde{s}}=\Sigma_{i=1}^{k}\tilde{s}_i/k \tag{22}$$

$E[\bar{\tilde{s}}]=E[\Sigma_{i=1}^{k}\tilde{s}_i/k]=c_2\sigma$이고 $E[\bar{\tilde{s}}/c_2]=\sigma$이므로 표준편차의 불편 추정량은

$$\hat{\sigma}=\frac{\bar{\tilde{s}}}{c_2} \tag{23}$$

임을 확인 할 수 있다.

관리 상한과 하한을 추정하기 위한 표준편차와 관련된 상수 c_3은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} Var(\tilde{s}) &= E(\tilde{s}^2)-E^2(\tilde{s}) \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2-c_2^2\sigma^2=\left(\frac{n-1}{n}-c_2^2\right)\sigma^2=c_3^2\sigma^2 \end{aligned} \tag{24}$$

이므로 $\tilde{s}$의 표준편차는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} D(\tilde{s}) &= \sqrt{E(\tilde{s}^2)-E^2(\tilde{s})} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{n}\sigma^2-c_2^2\sigma^2}=\sqrt{\frac{n-1}{n}-c_2^2}\cdot\sigma=c_3\sigma \end{aligned} \tag{25}$$

여기서 $c_3=\sqrt{\frac{n-1}{n}-c_2^2}$임을 알 수 있다.

2.3.2 불편분산

불편분산을 사용하여 $\hat{\sigma}$을 추정하는 경우도 유사 하게 생각할 수 있다. 일반적으로 k개의 모집단 (로트)으로부터 각각 크기 n의 표본을 추출 하였을 때 각 표본으로부터의 불편 분산 추정치들 $s_1, s_2, \cdots, s_k$의 평균은 다음과 같이 표현 되며

$$\bar{s}=\Sigma_{i=1}^{k}s_i/k \tag{26}$$

여기서 기대치를 구하여보면

$$E[\bar{s}]=E[\Sigma_{i=1}^{k}s_i/k]=c_4\sigma \tag{27}$$

$$E[\bar{s}/c_4]=E[s/c_4]=\sigma \tag{28}$$

이므로 표준편차의 불편 추정량은 $\hat{\sigma}=\bar{s}/c_4$ 임을 확인할 수 있다. 여기서 c_4를 c_2^*로 표기하는 경우도 있다.

관리 상한과 하한을 추정하기 위한 표준편차와 관련된 상수 c_5는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} Var(s) &= E(s^2)-E^2(s) \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2-c_4^2\sigma^2=\left(\frac{n-1}{n}-c_4^2\right)\sigma^2=c_5^2\sigma^2 \end{aligned} \tag{29}$$

여기서 $c_5=\sqrt{\frac{n-1}{n}-c_4^2}$임을 확인할 수 있다.

지금까지 설명한 모든 추정방식이 모두 모 표준편차를 추정하기 위한 추정량이다.

$$E(\hat{\sigma})=E\left(\frac{\bar{R}}{d_2}\right)=E\left(\frac{\tilde{s}}{c_2}\right)=E\left(\frac{s}{c_4}\right)=\sigma \tag{30}$$

의 관계가 성립하며 세 가지 추정방식 모두 모 표준 편차(σ)에 대한 불편 추정량이라고 할 수 있다[6].

2.4 불편화 상수 c_2와 c_4의 관계

품질관리에서의 불편화 상수 c_4는 선진각국에서는 이미 1980년대부터 사용되어 오고 있다. 그 증거로서는 많은 논문과 교재에 이미 존재하고 있다[4, 6, 11, 12]. 관리도 작성 시 표준편차의 추정이나 관리도의 작성 시 관리한계의 계산에서는 항상 분산의 제곱근 보다는 불편성(unbiasedness)을 갖는 표준편차를 사용한다. 이것은 c_2를 사용할 때나 c_4를 사용할 때에도 마찬가지이다. 정리하자면 다음과 같이 품질관리 상수를 도입하여 모 표준편차의 추정량이 불편성을 갖도록 조정하고 있으며 <Table 2>와 같이 정리할 수 있다.

<Table 2> Expectations and Variances

	(Minimum) Sample Standard Deviation	(Unbiased) Sample Standard Deviation
Expectation	$E(\tilde{s}) = c_2\sigma$ $E\left(\frac{\tilde{s}}{c_2}\right) = \sigma$	$E(s) = c_2^*\sigma = c_4\sigma$ $E\left(\frac{s}{c_2^*}\right) = E\left(\frac{s}{c_4}\right) = \sigma$
Variances	$Var(\tilde{s}) = c_3^2\sigma^2$	$Var(s) = c_3^{*2}\sigma^2 = c_5^2\sigma^2$
Std Deviation	$D(\tilde{s}) = c_3\sigma$	$D(\tilde{s}) = c_3^*\sigma = c_5\sigma$

2.5 상수의 계산

이제 이 불편화 상수들은 어떻게 계산되는 것인가에 대하여 살펴보아야 할 단계이다. 여기서 c_4와 c_2^*는 동일한 상수이며 c_2와 c_4는 일정한 비례관계를 유지 한다고 할 수 있다. 따라서 하나의 상수만 구하면 다른 상수도 쉽게 구할 수 있다. 마찬가지로 c_5와 c_3^*도 동일한 상수이며 c_3와 c_5도 일정한 비례관계를 갖고 있다.

2.5.1 c_4의 계산

우선 W를 자유도 $(n-1)$의 χ^2분포를 갖는 확률변수(random variable)로 정의하자.

$$W = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \tag{31}$$

여기서 $f(w)$를 χ^2분포의 밀도함수로 정의하면 확률 변수 W의 제곱근에 대한 이론적 기대치는 카이자승 분포를 따르는 확률변수의 제곱근의 기대치를 구하는 방식을 사용할 수 있다. 즉,

$$E(\sqrt{w}) = E\left(\frac{\sqrt{n-1}\,s}{\sigma}\right) = \int_0^\infty \sqrt{w}\,f(w)dw \tag{32}$$

$$= \int_0^\infty w^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} w^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{w}{2}} dw$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)/\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} w^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{w}{2}} dw$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} w^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{w}{2}} dw$$

여기서 $\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} w^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{w}{2}} dw = 1$이라는 사실로 인해 다음과 같이 되며

$$E(\sqrt{w}) = E\left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sigma}s\right) = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{33}$$

결과적으로

$$E(s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sigma = c_2^*\sigma = c_4\sigma \tag{34}$$

여기서 불편화 상수 c_4는 다음과 같이 정의되고 있음을 확인할 수 있다[6].

$$c_4 = c_2^* = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{35}$$

또한

$$Var(s) = E(s^2) - E^2(s) \tag{36}$$

$$= \sigma^2 - c_4\sigma^2 = (1-c_4^2)\sigma^2 = c_5^2\sigma^2$$

와 같이 $c_5 = c_3^* = \sqrt{1-c_4^2}$로 정의되고 있음을 알 수 있다.

일반적으로 $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$이고 n이 20 이상으로 비교적 크고 짝수라면 $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$는 $\left(\frac{n-4}{2}\right)!$과 $\left(\frac{n-2}{2}\right)!$의 중간 위치에 있다. 마찬가지로 n이 홀수라면 $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$는

$\left(\frac{n-3}{2}\right)!$과 $\left(\frac{n-1}{2}\right)!$의 중간위치에 있게 된다. 이 사실을 이용하면 c_4에 대한 근사치의 계산도 가능하다.

2.5.2 c_2와 c_3의 계산

마찬가지로 c_2를 계산하는 식도 유도할 수 있다. 즉, 정규분포임을 가정할 때

$$\widetilde{W}=\frac{n\tilde{s}^2}{\sigma^2}\sim x^2(n-1) \tag{37}$$

이 성립되므로 유사한 유도 과정을 거쳐

$$E(\tilde{s})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma=c_2\sigma \tag{38}$$

로 쓰이며 여기서

$$c_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{39}$$

가 된다는 사실을 알 수 있다. 또한

$$\begin{aligned} Var(\tilde{s}) &= E(\tilde{s}^2)-E^2(\tilde{s}) \\ &=\frac{n-1}{n}\sigma^2-c_2^2\sigma^2=\left(\frac{n-1}{n}-c_2^2\right)\sigma^2=c_3^2\sigma^2 \end{aligned} \tag{40}$$

와 같은 관계에서 $c_3=\sqrt{\frac{n-1}{n}-c_2^2}$로 정의되어 있음을 재확인 할 수 있다.

2.5.3 c_2와 c_4의 관계

당연한 결과이겠지만 두 상수의 관계는 다음과 같이 정의될 수 있음을 쉽게 알 수 있다.

$$\frac{c_4}{c_2}=\sqrt{\frac{n}{n-1}} \tag{41}$$

또한

$$\begin{aligned} c_5^2&=1-c_4^2=1-\frac{n}{n-1}c_2^2 \\ &=\frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}-c_2^2\right)=\frac{n}{n-1}c_3^2 \end{aligned} \tag{42}$$

라는 사실로 미루어 볼 때

$$\frac{c_4}{c_2}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}=\frac{c_5}{c_3} \tag{43}$$

와 같이 일정한 비례관계가 성립한다는 사실도 알 수 있다.

3. $\bar{x}-R$ 관리도

계량형 관리도 중에서 가장 보편적으로 사용되고 있는 관리도로서 1924년 Schuhart에 의해 고안된 것으로 알려져 있다. 관리도의 대명사로 여겨지기도 하지만 아쉽게도 이 관리도의 장점과 단점에 대해서는 그다지 논의되고 있지 않은 듯하다.

3.1 $\bar{x}$ 관리도

공정의 평균이 얼마나 안정적으로 유지되고 있는 가를 감시하기 위하여 고안된 관리도이다.

3.1.1 σ기지의 경우

$\bar{x}$ 관리도의 경우 관리한계는 $E(\bar{x})\pm 3D(\bar{x})$ 또는 $E(\bar{x})\pm 3\sqrt{Var(\bar{x})}$ 또는 $\mu\pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 만일 μ가 알려져 있다면 다음과 같이 관리한계를 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} UCL=\mu+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\mu+A\sigma \\ CL=\mu \\ LCL=\mu-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\mu-A\sigma \end{cases} \tag{44}$$

한편 μ가 미지이면 $E(\bar{\bar{x}})=\mu$이므로 $CL=\hat{u}=\bar{\bar{x}}$로 추정하여 다음과 같이 설정하게 된다.

$$\begin{cases} UCL=\bar{\bar{x}}+3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{\bar{x}}+A\sigma \\ CL=\bar{\bar{x}} \\ LCL=\bar{\bar{x}}-3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{\bar{x}}-A\sigma \end{cases} \tag{45}$$

여기서 계수 $A=3/\sqrt{n}$이다.

3.1.2 σ미지의 경우

σ미지의 경우 마찬가지로 관리한계는 $E(\bar{x})\pm 3D(\bar{x})$ 또는 $E(\bar{x})\pm 3\sqrt{Var(\bar{x})}$ 또는 $\mu\pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 각 모수의 추정 $CL=\hat{\mu}=\bar{\bar{x}}$와 $\hat{\sigma}=\frac{\bar{R}}{d_2}$를 식 (44)에 대입하여 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{cases} UCL = \overline{\overline{x}} + \dfrac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R} \\ CL = \overline{\overline{x}} \\ LCL = \overline{\overline{x}} - \dfrac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R} \end{cases} \quad (46)$$

여기서 $A_2 = 3/(d_2\sqrt{n})$로 정의되고 있다.

3.2 R관리도

공정산포가 얼마나 안정적으로 유지되고 있는 가를 감시하고 제어하기 위한 관리도이다.

3.2.1 σ기지의 경우

R관리도의 관리한계의 범위는 $E(R) \pm 3D(R)$이므로 $E(R) = d_2\sigma$이고 $D(R) = \sqrt{Var(R)} = d_3\sigma$임을 감안하면

$$\begin{cases} UCL = d_2\sigma + 3d_3\sigma = D_2\sigma \\ CL = d_2\sigma \\ LCL = d_2\sigma - 3d_3\sigma = D_1\sigma \end{cases} \quad (47)$$

와 같이 된다. 여기서 $(D_1, D_2) = d_2 \pm 3d_3$이다.

3.2.2 σ미지의 경우

σ가 미지이면 앞의 식의 σ대신에 k개의 모집 단(로트)으로부터의 표본으로 구한 $\hat{\sigma}\ \dfrac{\overline{R}}{d_2}$로 대체 하게 되고 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{cases} UCL = \overline{R} + 3d_3\dfrac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R} + D_4\overline{R} \\ CL = \overline{R} \\ LCL = \overline{R} - 3d_3\dfrac{\overline{R}}{d_2} = \overline{R} - D_3\overline{R} \end{cases} \quad (48)$$

여기서 $(D_3, D_4) = 1 \pm 3\dfrac{d_3}{d_2}$로 정의되고 있음은 이미 잘 알려진 사실이다.

이상의 내용이 가장 보편적으로 사용되는 $\overline{x} - R$ 관리도 의 요지라고 할 수 있다. 일반적으로 수작업으로 계산을 수행한다고 가정할 때 범위 R을 구하는 것이 $\tilde{s}$나 s를 계산하기보다 용이하므로 R 관리도가 더 널리 사용되고 있다고 할 수 있다. 그 외의 장점은 없는 듯하다.

4. $\overline{x} - \tilde{S}$ 관리도

정밀도가 요구되는 생산 및 제조 공정의 감시(monitoring) 또는 제어(control)의 경우에는 $\overline{x}$ 관리도와 함께 $\tilde{s}$ 관리도(또는 s 관리도)의 사용이 필수적이다. R 관리도와 마찬가지로 공정능력을 나타내는 산포, 특히 표준편차를 관리하기 위한 계량형 관리도이다.

종전의 "σ 관리도"란 표본 또는 시료군의 (최소)표본표준편차 $\tilde{s}$ 즉, 최소(분산) 표준편차에 관한 관리도이다. 종전의 표준 규격에서도 "$\overline{x} - \sigma$ 관리도"라는 이름으로 소개되고 있었지만 $\overline{x} - \tilde{s}$ 관리도라고 하는 것이 그 의미가 바른 정확한 용어의 사용이었을 것으로 생각 된다.

4.1 $\overline{x}$ 관리도

역시 공정 평균의 변동성을 감시하기 위한 관리도이다.

4.1.1 σ기지의 경우

관리한계는 $E(\overline{x}) \pm 3D(\overline{x})$ 또는 $E(\overline{x}) \pm 3\sqrt{Var(\overline{x})}$ 또는 $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 μ를 알고 있다면 관리한계는 다음과 같이 설정되어야 할 것이다.

$$\begin{cases} UCL = \mu + 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + A\sigma \\ CL = \mu \\ LCL = \mu - 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - A\sigma \end{cases} \quad (49)$$

그러나 μ가 미지라면 $\widehat{CL} = \hat{\mu} = \overline{\overline{x}}$로 하여 다음과 같은 결과를 얻는다. 즉,

$$\begin{cases} UCL = \overline{\overline{x}} + 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} + A\sigma \\ CL = \overline{\overline{x}} \\ LCL = \overline{\overline{x}} - 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} - A\sigma \end{cases} \quad (50)$$

로 정리되고 $A = 3/\sqrt{n}$임을 알 수 있다.

4.1.2 σ미지의 경우

$\overline{x}$ 관리도의 경우 관리한계는 $E(\overline{x}) \pm 3D(\overline{x})$ 또는 $E(\overline{x}) \pm 3\sqrt{Var(\overline{x})}$ 또는 $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 μ와 σ 모두 미지라면 $CL = \hat{\mu} = \overline{\overline{x}}$로 추정하고 $\hat{\sigma} = \dfrac{\tilde{s}}{c_2}$를 추정 사용하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{cases} UCL = \overline{\overline{x}} + 3\dfrac{\tilde{s}}{c_2\sqrt{n}} = A_1\tilde{s} \\ CL = \overline{\overline{x}} \\ LCL = \overline{\overline{x}} - 3\dfrac{\tilde{s}}{c_2\sqrt{n}} = A_1\tilde{s} \end{cases} \quad (51)$$

물론 여기서 $A_1 = 3/(c_2\sqrt{n})$임을 쉽게 알 수 있다.

4.2 $\tilde{s}$ 관리도

R 관리도와 마찬가지로 공정산포의 변동성을 감시 또는 제어하기 위한 관리도이다.

4.2.1 σ기지의 경우

$\tilde{s}$ 관리도의 경우 과거의 경험에서 σ값을 이미 알고 있는 경우도 있을 수 있다. $\tilde{s}$ 관리도의 중심선(CL)과 관리한계선(UCL, LCL)은 $E(\tilde{s}) \pm 3D(\tilde{s})$로 다음과 같이 될 수 있다.

$$\begin{cases} UCL = c_2\sigma + 3c_3\sigma = \{c_2 + 3c_3\}\sigma = B_2\sigma \\ CL = c_2\sigma \\ LCL = c_2\sigma - 3c_3\sigma = \{c_2 - 3c_3\}\sigma = B_1\sigma \end{cases} \tag{52}$$

여기서 $(B_1, B_2) = c_2 \pm 3c_3$로 정의되고 있음을 알 수 있다.

4.2.2 σ미지의 경우

σ가 알려져 있지 않은 경우에는 주어진 자료로부터 추정하여 사용해야만 할 것이다. k개의 모집단(로트)으로부터 각각 크기 n의 표본을 추출 하였다면 각 표본으로부터 계산한 표본 표준편차를 $\{\tilde{s}_i, i=1, \cdots, k\}$라고 할 때 산술 평균($\bar{\tilde{s}}$)은 다음 식에 의해 계산될 수 있다

$$\bar{\tilde{s}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\tilde{s}_i \tag{53}$$

이때 σ의 불편 추정치는 다음 식으로 구해질 수 있다.

즉, 앞의 관리한계의 σ를

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{\tilde{s}}}{c_2} \tag{54}$$

로 대체하면 관리한계는 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} UCL = \bar{\tilde{s}} + 3\dfrac{c_3}{c_2}\bar{\tilde{s}} = \left\{1 + 3\dfrac{c_3}{c_2}\right\}\bar{\tilde{s}} = B_4\bar{\tilde{s}} \\ CL = \bar{\tilde{s}} \\ LCL = \bar{\tilde{s}} - 3\dfrac{c_3}{c_2}\bar{\tilde{s}} = \left\{1 - 3\dfrac{c_3}{c_2}\right\}\bar{\tilde{s}} = B_3\bar{\tilde{s}} \end{cases} \tag{55}$$

여기서 $(B_3, B_4) = 1 \pm 3\dfrac{c_3}{c_2}$임을 확인할 수 있다.

이상은 c_2를 중심으로 하여 개정 전에 사용되어 오던 품질관리 관련 KS 표준 규격에서의 관리한계선 계산 방식이라고 할 수 있다. 하지만 2002년도 이후에는 c_4를 중심으로 한 새로운 방식으로의 전환을 권장하고 있다. 여기서 상수 c_2와 c_4의 차이를 살펴볼 필요가 있다고 하겠다.

5. $\bar{x} - S$ 관리도

5.1 $\bar{x}$ 관리도

공정평균의 변동성을 감시하기 위한 관리도이다.

5.1.1 σ기지의 경우

$\bar{x}$ 관리도의 경우도 관리한계는 $E(\bar{x}) \pm 3D(\bar{x})$ 또는 $E(\bar{x}) \pm 3\sqrt{Var(\bar{x})} = \mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$하여 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{cases} UCL = \bar{\bar{x}} + 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A\sigma \\ CL = \bar{\bar{x}} \\ LCL = \bar{\bar{x}} - 3\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A\sigma \end{cases} \tag{56}$$

여기서 $A = 3/\sqrt{n}$이다.

5.1.2 σ미지의 경우

σ미지의 경우도 관리한계는 $E(\bar{x}) \pm 3D(\bar{x})$ 또는 $\mu \pm 3\sigma/\sqrt{n}$이므로 $\hat{\mu} = \bar{\bar{x}}$로 하고 $\hat{\sigma} = \dfrac{\bar{s}}{c_4}$를 사용하여 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{cases} UCL = \bar{\bar{x}} + 3\dfrac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} \\ CL = \bar{\bar{x}} \\ LCL = \bar{\bar{x}} - 3\dfrac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s} \end{cases} \tag{57}$$

물론 여기서 $A_3 = \dfrac{3}{c_4\sqrt{n}}$로 정의되고 있음을 알 수 있다.

5.2 S 관리도

역시 공정산포의 변동성을 감시하기 위한 관리도이다.

5.2.1 σ기지의 경우

지금까지 알고 있는 σ의 값이 있으면 이 값을 그대로 사용하고 $E(s) = c_4\sigma$가 중심선이 되고 $D(s) = c_5\sigma$를 표준편차로 하여 관리한계를 다음과 같이 산정한다. 즉, $E(s) \pm 3D(s)$를 생각하면 된다.

$$\begin{cases} UCL = c_4\sigma + 3c_5\sigma = c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1-c_4^2} = B_6\sigma = B_2^*\sigma \\ CL = c_4\sigma \\ LCL = c_4\sigma - 3c_5\sigma = c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1-c_4^2} = B_5\sigma = B_1^{*\sigma} \end{cases} \quad (58)$$

여기서 $(B_5, B_6) = (B_1^*, B_2^*) = c_4 \pm 3\sqrt{1-c_4^2} = c_4 \pm 3c_5$로 정의하고 있음을 확인할 수 있다.

5.2.2 σ미지의 경우

σ가 알려져 있지 않은 경우에는 주어진 자료로부터 추정하여 사용해야만 할 것이다. k개의 로트로부터 각각 크기 n의 표본을 추출하였다면 각 표본으로부터 의 표본 표준편차를 $\{s_i, i=1,\cdots,k\}$라고 할 때 산술 평균($\bar{s}$)은 다음 식에 의해 계산될 수 있다

$$\bar{s} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} s_i \quad (59)$$

이때 σ의 불편 추정치는 다음 식으로 구한다. 즉,

$$\hat{\sigma} = \bar{s}/c_4 \quad (60)$$

이것을 앞의 관리한계식의 σ에 대입하여 사용하면 관리한계선(control limits)은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{cases} UCL = \bar{s} + 3c_5\frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{s} + 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = B_6\frac{\bar{s}}{c_4} = B_4\bar{s} \\ CL = \bar{s} \\ LCL = \bar{s} + 3c_5\frac{\bar{s}}{c_4} = \bar{s} - 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = B_5\frac{\bar{s}}{c_4} = B_3\bar{s} \end{cases} \quad (61)$$

여기서 $(B_3, B_4) = 1 \pm \frac{3}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = \left(\frac{B_5}{c_4}, \frac{B_6}{c_4}\right)$로 정의됨을 확인할 수 있다.

5.3 관리한계의 변화

종전에 사용되던 (B_1, B_2)는 (B_5, B_6)로 변경되었으나 (B_3, B_4)는 변함없이 사용되고 있다. 또한 여기서 (B_3, B_4) = $1 \pm 3\frac{c_3}{c_2} = 1 \pm 3\frac{c_5}{c_4}$와 같이 두 가지로 정의됨을 알 수 있다. 구체적인 이유는

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{\sqrt{\frac{n-1}{n} - c_2^2}}{c_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{n}{n-1}c_2^2}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,c_2} = \frac{\sqrt{1-c_4^2}}{c_4} = \frac{c_5}{c_4} \quad (62)$$

와 같이 비율이 동일함을 증명할 수 있기 때문이다.

그렇다고는 하지만 중심선(CL)과 상하 관리 한계선(UCL, LCL)의 계산 값까지도 동일한 것은 아니며. 사실상 변경되었다. 그 이유는 c_2를 사용하는 경우는 최소분산으로 모 분산을 추정하고 c_4를 사용하는 경우는 불편분산으로 모 분산을 추정하기 때문에 중심선(CL) 및 상하한(UCL, LCL)은 사실상 변경되었다. c_4 계열의 상수를 사용하는 경우 관리한계가 다소 넓어졌다고 할 수 있다.

지금까지 언급한 불편화 상수들과 관리도 계수들을 정리하면 <Table 3>나 <Table 4>같다.

<Table 3> Unbiasing Constants and Control Chart Coefficients

n	c_2	c_3	c_4	c_5	d_2	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	0.5642	0.6028	0.7979	0.6028	1.128	0.853	0	3.686	0	3.267
3	0.7236	0.4632	0.8862	0.4632	1.693	0.888	0	4.358	0	2.575
4	0.7979	0.3888	0.9213	0.3888	2.059	0.880	0	4.698	0	2.282
5	0.8407	0.3412	0.9400	0.3412	2.326	0.864	0	4.918	0	2.115
6	0.8686	0.3076	0.9515	0.3076	2.534	0.848	0	5.078	0	2.004
7	0.8882	0.2822	0.9594	0.2822	2.704	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924
8	0.9027	0.2621	0.9650	0.2621	2.847	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864
9	0.9139	0.2458	0.9693	0.2458	2.970	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.9227	0.2322	0.9727	0.2322	3.078	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.9300	0.2207	0.9754	0.2207	3.173	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744
12	0.9359	0.2107	0.9776	0.2107	3.258	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717
13	0.9410	0.2019	0.9794	0.2019	3.336	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693
14	0.9453	0.1942	0.9810	0.1942	3.407	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672
15	0.9490	0.1872	0.9823	0.1972	3.472	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653

<Table 4> Control Chart Coefficients

n	A	A_1	A_2	A_3 (A_1^*)	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5 (B_1^*)	B_6 (B_2^*)
2	2.121	3.760	1.880	2.659	0	1.843	0	3.267	0	2.606
3	1.732	2,394	1.023	1.954	0	1.858	0	2.568	0	2.276
4	1.500	1.880	0.729	1.628	0	1.808	0	2.266	0	2.088
5	1.342	1.596	0.577	1.427	0	1.756	0	2.089	0	1.964
6	1.225	1.410	0.483	1.287	0.026	1.711	0.030	1.970	0.029	1.874
7	1.134	1.277	0.419	1.182	0.105	1.672	0.118	1.882	0.113	1.806
8	1.061	1.175	0.373	1.099	0.167	1.638	0.185	1.815	0.179	1.751
9	1.000	1.094	0.337	1.032	0.219	1.609	0.239	1.761	0.232	1.707
10	0.949	1.028	0.308	0.975	0.262	1.584	0.284	1.716	0.276	1.669
11	0.905	0.973	0.285	0.927	0.299	1.561	0.321	1.679	0.313	1.637
12	0.866	0.925	0.266	0.886	0.331	1.541	0.354	1.646	0.346	1.610
13	0.832	0.884	0.249	0.850	0.359	1.523	0.382	1.618	0.374	1.585
14	0.802	0.848	0.235	0.817	0.384	1.507	0.406	1.594	0.399	1.563
15	0.775	0.816	0.223	0.789	0.406	1.492	0.428	1.572	0.421	1.544

5.4 범위의 상대 효율성

$\bar{x}-R$ 관리도에서 사용되는 범위(range)라고 하는 통계량 R은 표본 내의 최대치에서 최소치를 차감한 값이기 때문에 통계적 추정량으로서 갖추어야 할 바람직한 성질 중 불편성(unbiasedness)은 갖고 있으나 충분성(sufficiency)이나 효율성(efficiency)이 결여되어 있다. 즉, 모든 관측치를 사용하지 않고 최대치와 최소치 두 가지만 사용하기 때문에 모든 관측치로부터 충분한 정보를 구할 수 없다. 또한 표본 크기가 커질 때 추정 통계량의 분산이 오히려 커지는 경향을 나타낸다. 이로 인해 표본의 크기가 작을 때, 즉, 5~6 이하 일 때만 그 사용이 추천되며 10 이상 일 때는 최소 표본 분산($\tilde{s}^2$)과 비교할 때 오히려 추정치로서의 상대적 효율성(relative efficiency)이 낮아진다고 할 수 있다[11]. 참고로 상대효율성의 계산은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Relative Efficiency} = \frac{Var(\tilde{s}^2/c_2)}{Var(R/d_2)} \tag{63}$$

상대적 효율성이 1보다 작으면 그만큼 범위 R로 추정한 분산의 추정치가 크다는 것을 의미한다고 할 수 있다.

<Table 5> Relative Efficiency of Range

Sample Size	Relative Efficiency
2	1.000
3	0.992
4	0.975
5	0.955
6	0.930
…	…
10	0.850

따라서 <Table 5>에서 볼 수 있듯이 표본의 크기가 10 이상이 되면 $\bar{x}-R$ 관리도의 사용을 지양하는 것이 좋으며 불편분산이 사용된 $\bar{x}-s$ 관리도로의 전환을 모색해야 한다[10].

6. 결론 및 제언

현대의 생산 및 제조에 있어 공정 및 품질관리 기법의 모토(motto)는 린-식스시그마(lean-six sigma)라고 할 수 있다[1, 2, 3, 5]. 이 시대에는 측정 자료의 추정 정밀도 개선을 위하여 계량형 관리도의 사용에 있어 표본의 크기가 가급적 큰 것이 바람직하다. 많은 경우 측정의 자동화 등을 통하여 측정자체가 용이해 진 것도 사실이다.

표본의 크기가 클수록 $\bar{x}-R$ 관리도 보다는 $\bar{x}-s$ 관리도의 사용이 권고되고 있다. 하지만 여러 가지 문헌에서 볼 수 있듯이 국내에서는 그간 $\bar{x}-s$ 관리도는 계산식이 복잡하고 어려우며 $\bar{x}-R$ 관리도의 아류 정도로 소개되어 왔던 것도 사실이다. 하지만 알고 보면 $\bar{x}-R$ 관리도 만큼이나 그 개념이나 사용법이 쉽다고 할 수 있으며 불편화 상수의 계산식도 유도할 수 있으며 통계학적인 관점에서도 충분성과 유효성이 있는 바람직한 통계량을 사용하고 있다는 점을 살펴보았다.

그런데 분산을 사용한 계량형 관리도의 사용에 있어서는 $c_2, c_3, B_1, B_2, B_3, B_4$ 및 A_1으로 이어지는 불편화 상수와 관리도 계수를 사용하는 종전의 $\bar{x}-\tilde{s}$ 관리도 작성방법과 $c_4(c_2^*), c_5(c_3^*), B_5(B_1^*), B_6(B_2^*), B_3, B_4$ 및 $A_3(A_1^*)$로 이어지는 개정된 방식을 사용한 $\bar{x}-s$ 관리도가 있는 데 그 차이는 표준편차의 추정에 있어 최소분산($\tilde{s}^2$)을 사용하느냐 아니면 불편 분산(s^2)을 사용하느냐에 따른 차이라고 할 수 있다.

개정 전 방식의 표준규격에서의 큰 모순점이 있었다고 할 수는 없지만 불편분산이 아닌 범위 R나 최소분산 통계량 $\tilde{s}^2$으로 불편 표준편차를 계산하여 사용하고 있었다고 하는 특징이 있다. $\bar{x}-s$ 관리도에 있어 근본적인 변화는 최소분산의 사용에서 불편분산의 사용으로 전환을 권고하는 것이며 좀 더 자연스럽고 합리적인 방식으로 변경된 셈이다.

품질관리상수 c_4는 전에 c_2^*라는 이름으로 c_5는 c_3^*로 일시적으로는 사용되고는 있었으므로 전혀 새로운 것은 아니다. 또한 B_3와 B_4는 개정 전과 동일한 계수를 사용하고 있다. 하지만 c_4를 사용하였을 때의 CL, UCL, LCL 등의 중심선 및 관리한계선은 다소 변화 되었으며 c_2의 경우와 서로 다르다고 할 수 있다.

한편 c_4의 사용이 관리 한계선의 유도식에서 흔히 사용되는 불편분산을 기반으로 하기 때문에 학습하는 입장의 실무자가 이해하기 쉽고 교육을 담당하는 사람의 입장에서 설명하기가 더 편하다고 할 수 있다. 더욱이 국제 표준(ISO)에 따른 국내 표준규격(KS)에서도 c_4 계열의 불편화 상수의 사용을 권장하고 있는 만큼 앞으로 대학 교재를 비롯한 많은 전문서적도 이를 반영하여 작성 되어야 하지 않을까 생각된다.

한편 6시그마 설계(design for six sigma) 방법론에서는 공정의 산포가 2σ정도의 평균이동(shift)이 발생 되더라도 적어도 4σ정도의 오차의 한계를 확보 하도록 하기 위하여 허용공차의 한계가 6σ가 되도록 설정한 것이라고 할 수 있다[9]. 공정의 개선을 추진하고 있는 산업현장 실무자들에게 생산공정의 공정능력 지수(Cp, Cpk)와 같은 성과지표의 목표가 제대로 달성되고 있는가에 대한

감시활동(monitoring) 또는 통제(control) 에 활용될 수 있는 수단을 고려할 때 $\overline{x}-S$ 관리도의 도입을 긍정적으로 검토하여 보기를 기대한다.

Acknowledgements

This research was supported by Seokyeong University in 2013.

References

[1] Arthur, J., *Lean Six Sigma Demystified*, McGraw Hill, 2007.

[2] Bass, I., *Six Sigma Statistics with Excel and Minitab*, McGrawHill, 2007.

[3] Black, J.T. and Hunter, S.L., *Lean Manufacturing Systems and Cell Design*, Society of Manufacturing Engineers, 2003.

[4] Bowker, A.H. and Lieberman, G.J., *Engineering Statistics*, 2^{nd} Edition, Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, N.J., 1972.

[5] Brook, Q., *Lean Six Sigma and Minitab*, 3^{rd} Edition, OPEX Resources Ltd, 2010.

[6] Hogg, R.V. and Tanis, E.A., *Probability and Statistical Inference*, 4th Edition, MacMillan, 1993.

[7] KS A ISO 8258, *Schewhart Control Charts*, 2008.

[8] KS Q ISO 7870-1, *Control Charts-General Guide and Introduction*, 2012.

[9] Kotz, S. and Lovelace C.R., Process Capability Indices in Theory and Practice, 1998

[10] Lindgren, B.W., *Statistical Theory*, 3^{rd} Edition, MacMillan, 1976

[11] Montgomery, D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 2nd Edition, Wiley, 1991.

[12] Walpole, R.E., *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 7th Edition, Prentice Hall, 2002.