



## Cycloid 치형을 적용한 Pin-Pinion 치형에 대한 연구

†함성훈 · 염광욱

동주대학교 자동차·기계과

(2014년 11월 24일 접수, 2014년 12월 26일 수정, 2014년 12월 27일 채택)

### A Study of Pin-Pinion Tooth Profile Applied with Cycloid Tooth Profile

†Seong-Hun Ham · Kwang-Wook Youm

Dept. of Automotive Engineering, Dongju College, 95-10, Sari-ro, Saha-gu, Busan 604-864, South Korea

(Received November 24, 2014; Revised December 26, 2014; Accepted December 27, 2014)

#### 요 약

본 논문에서는 산업기계 및 로봇산업에 적용할 수 있는 직선 정밀 이송 장치의 구동부를 설계하였다. 동력의 전달방향 및 출력특성은 기존의 Rack-Pinion 타입과 유사하나 구동부에 대하여 새로운 Pin-Pinion Gear 타입을 적용시켜 랙 모듈화를 통한 무한 길이 확장성을 구현하고 고속이송 및 설치의 편의성을 확보할 수 있으며 이러한 Pin-Pinion Gear의 최적물림을 위한 Cycloid 치형 해석을 하였다. 그 결과 Cycloid 치형으로 설계시 핀과 피니언 기어의 백래쉬 및 물림 특성이 적합하여 정밀제어가 가능한 치형으로 분석되었다.

**Abstract** - In this paper, designed the driving part of a straight line precision transfer system which can be applied to industrial machines and industrial robots. The direction of power transfer and the output characteristic are similar to those of the conventional rack-pinion type, but it applied new pin-pinion type to the driving part. As a result, it achieved indefinite expandability in length and secured the convenience of installation. To determine the optimal contact of pin-pinion gear, it conducted a Cycloid tooth profile analysis.

**Key words** : Pin-pinion gear, Cycloid tooth profile, Linear transfer, Bending strength, FEM analysis

#### 1. 서 론

산업기계 및 기계가공 분야의 급속적인 발전과 더불어 기계에 요구되는 기능은 더욱 다양화, 고속화, 고효율화 및 정밀화 등의 특성을 요구한다. 산업기계 및 공업용 공작 기계 등은 많은 종류가 있으나 기본적으로 동력원으로부터 동력을 제공받아 사용자가 필요로 하는 출력특성으로 변환하는 것이 주된 목적이라 할 수 있다. 그중, 사용목적의 특성상 입력축의 회전운동을 직선운동으로 변화해야하는 직선

운동기구는 수평 이송장치와 수직 이송장치가 있으며 일반 산업현장의 공작기계, 중·대형 이송장치 및 소형, 정밀제어가 필요한 로봇 산업에서도 중요한 기구이다. 특히 자동화 장치를 비롯한 첨단산업에서는 직선 이송장치 부분의 정밀도와 동적특성이 장치의 정밀도를 결정하기 때문에 기계 구성장치의 중추적인 역할을 담당하고 있다. 일정 감속비를 유지하면서 회전운동을 직선운동으로 변환시키는 장치의 적용 사례는 자동차의 조향장치, 이송장치, 전동식 게이트 장치 등을 들 수 있으며, 기타 응용 및 적용할 수 있는 범위 또한 폭 넓게 자리 잡고 있다[1].

대표적으로 랙과 피니언(Rack-pinion) 동력전달장치는 구동축의 회전운동을 직선운동으로 변환하고

†Corresponding author: ham2849@hanmail.net

Copyright © 2014 by The Korean Institute of Gas

자 하는 부분에 일반적으로 사용되며 일반적으로 기어 구조를 사용한다. 지난 수 십년 동안 이 동력전달장치는 볼 스크류(Ball screw), 리니어 액츄에이터(Linear actuator) 등과 같이 더욱 정밀하고, 부드럽고, 신뢰성 있는 대안이 나타나기 전까지는 모든 선형이송장치에 대부분 사용되어 왔다. 그러나 현재 사용되고 있는 이러한 장치들은 사용상 여러 문제점을 가지고 있다. 볼 스크류는 그 기능이 수많은 볼들의 구름운동으로 동작부에 부품이 많다는 단점과 하중을 전달할 때 볼의 한 점에 하중이 집중되기 때문에 낮은 하중 전달 능력을 가진다. 또한, 리니어 액츄에이터의 리니어 베어링(Linear bearing)은 직결모터(Direct-drive motor) 형태로 제조 및 유지에 많은 비용이 든다. 이러한 이유로 현재 직선 이송 장치의 대안들에 대한 조사를 바탕으로 새로운 동력전달장치가 개발되고 있다[2-4].

따라서 본 연구에서는 Rack-Pinion 타입의 동력전달 형태를 기초로 Pin-Pinion 방식의 동력전달 특성과 효율성 등을 고려한 체계화된 형상 설계와 작용력 해석, 형상에 대한 데이터의 분석 등을 통하여 실용적인 Pin-Pinion 방식의 치형을 도출하고자 한다.

## II. Pin-Pinion Gear 치형 설계

### 2.1. Cycloid 치형의 Pin-Pinion Gear 설계

Fig. 1은 사이클로이드 치형에 대한 형상 설계를 보여주는 것이다. 그림에서  $r_1$ 은 피니언의 피치원 반경이고  $r_2$ 는 피니언기어의 중심에서 핀의 중심까지의 거리를 나타낸다[5-7].

Fig. 1에서 핀의 중심에 해당하는 점 S는 좌표계 X-Y에서 수평운동을 하며, 회전하는 피니언 기어위의 좌표계를 x-y라고 했을 경우, x-y좌표계상에서

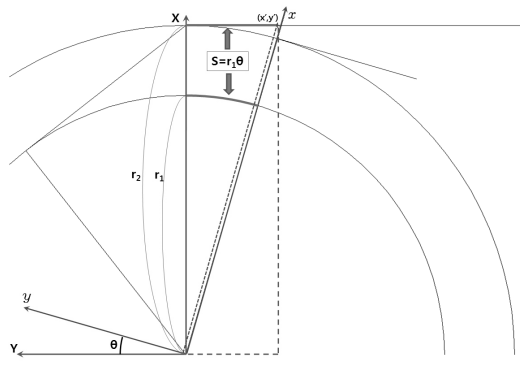


Fig. 1. Cycloid tooth profile design of pin-pinion gear.

본 핀 중심 S 점은 다음과 같다.

이때 핀의 수평 이동거리는 피니언 기어의 피치원의 회전거리와 같으므로 점 S의 X-Y좌표계 상의 좌표는  $[r_2, -r_1\theta]$ 가 된다. 그때 x-y좌표계는 X-Y좌표계의 원점을 기준으로  $\theta$ 만큼 회전한 것이기 때문에 점 S의 x-y좌표계에 대한 좌표 값은 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ -r_1\theta \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_2\cos\theta + r_1\theta\sin\theta \\ r_2\sin\theta - r_1\theta\cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fig. 2는 핀이 피니언 기어에 대해 운동하는 궤적을 나타낸 것이다. 여기서 핀의 중심에 대한 normal 방향 기울기  $a$ 를 구하면 다음과 같다.

$$a = -\frac{dx'}{dy'} \tag{1}$$

핀 중심에서 핀 반경에 해당하는 오프셋거리에서 피니언의 궤적이 그려질 수 있다.

$$x'' = x' - \frac{dy'/d\theta}{ds/d\theta} \times r_p, \quad y'' = y' + \frac{dx'/d\theta}{ds/d\theta} \times r_p$$

또한, 핀의 반경 오프셋거리  $L$ 은

$$L = \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx'}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{d\theta}\right)^2}$$

따라서 다음과 같이  $L$ 을 나타낼 수 있다.

$$L = \sqrt{r_1^2\theta^2 + (r_2 - r_1)^2} \text{ 이 된다.} \tag{2}$$

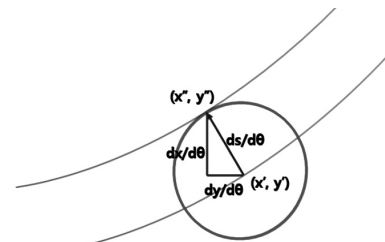


Fig. 2. Trajectory generation of pin.

만약에  $r_2 = r_1$  라면  $L = r_1\theta$  가 되고 이 경우 치형의 궤적을 확인해보면

$$x' = r_1(\cos\theta + \theta\sin\theta), y' = r_1(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

$\theta = \tan\alpha$  라 치환하면,

$$x' = \frac{r_1}{\cos\alpha} \cos(\tan\alpha - \alpha)$$

여기서  $\tan\alpha - \alpha = \text{inv}(\alpha)$  라 치환하면

$$x' = \frac{r_1}{\cos\alpha} \cos(\text{inv}(\alpha)), y' = \frac{r_1}{\cos\alpha} \sin(\text{inv}(\alpha)) \quad (3)$$

위의 결과를 보면 인벌류트 치형에 대한 일반식과 동일한 결과가 나오음을 확인할 수 있다. 따라서 위의 식이 치형에 대한 일반적인 해라 할 수 있다.

### 2.2. Cycloid 치형의 Pin-Pinion Gear 분석

Fig. 3은 사이클로이드 치형으로 설계된 Pin-Pinion 기어에 대한 코딩 결과이다.

Fig. 3에서 보면 피니언 기어의 치형과 핀의 물림 상태 및 전달효율은 회전시 순간적으로 핀과 피니언 기어의 물림이 4곳에서 발생하고 또한 핀과 치형의 백래쉬 감소로 전달효율이 극대화 되는 것을 볼 수 있다.

따라서 사이클로이드 치형을 사용하게 되면 정밀 제어 및 효율성 측면에서 유리한 결과가 됨을 확인하였다.

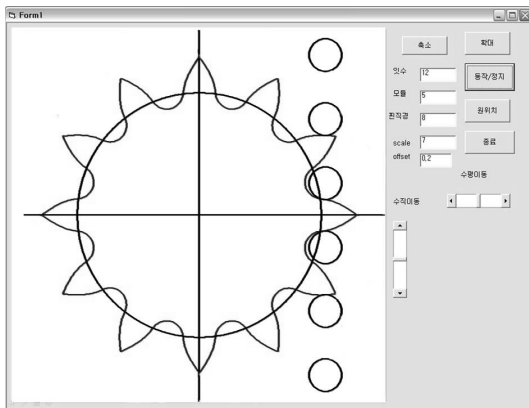


Fig. 3. Analysis of cycloid tooth profile using visual basic program.

## III. Pin-Pinion Gear의 강도 설계 및 FEM 해석

### 3.1. Pin-Pinion Gear의 굽힘강도 설계 및 해석

치형의 설계 및 분석에 따라 사이클로이드 치형에 대하여 굽힘 강도를 계산하였으며 그 때의 치형에 걸리는 접선방향 하중  $F_t$ 와 치면의 수직하중  $F_n$ , 굽힘응력  $\sigma_b$  를 구하였다.

Fig. 4에서  $(x_2, y_2)$ 는  $(x_1, y_1)$ 을  $y = \tan(\frac{\pi}{2})x$ 에 대칭이므로  $S_f$ 는  $(x_1, y_1)$ 과  $(x_2, y_2)$ 의 거리이므로,  
 $\therefore S_f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  이 된다. (4)

또한, 굽힘 강도를 구하기 위해서는 포물선형 균일한 강도의 외팔보로 치환해야 한다. 그러기 위해서는 Fig. 5의  $l = \overline{BC}$ 의 길이를 알아야 한다.

$$l = \overline{OC} - \overline{OB} \text{ 이므로}$$

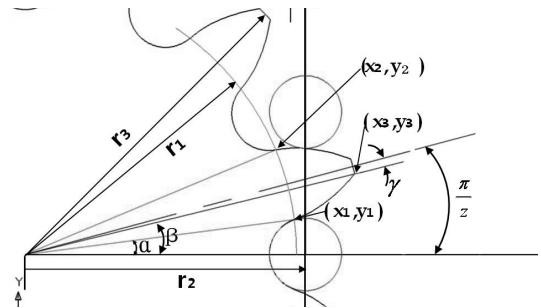


Fig. 4. Bending strength analysis of pin-pinion gears I .

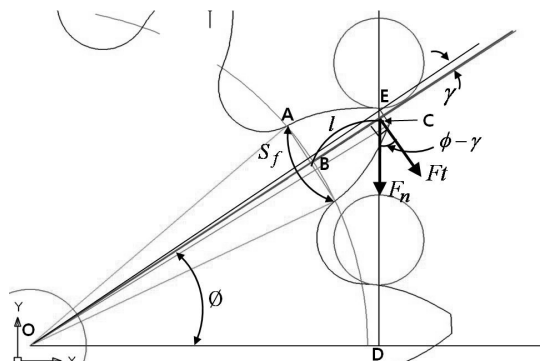


Fig. 5. Bending strength analysis of pin-pinion gears II .

$$= \frac{r_2}{\cos\left\{\cos^{-1}\left(\frac{r_2}{r_3}\right) - \left(\frac{\pi}{z} - \beta\right)\right\}} - \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{S_f}{2}\right)^2}$$

과 같다.

Fig. 6은 Ansys를 이용하여 Pin-Pinion 기어의 이뿌리 부분에서 작용하는 굽힘응력을 해석한 결과이다. 피니언기어의 이 끝에 힘을 가하여 이끝 과 이뿌리부에 나타나는 굽힘응력을 나타낸 결과로서 잇수 12개의 경우를 해석 하였다.

Fig. 6과 같은 Pin-Pinion 기어의 굽힘응력 해석결과는 기존 Rack-Pinion 에서 발생하는 굽힘응력에 비해 적은 굽힘응력이 발생하였으며 Table 1과 같은 결과를 얻을 수 있었다. Rack-Pinion system 에서의 굽힘응력 계산식은 Lewis식을 이용하였으며 다음과 같다[8].

$$\sigma_b = K_t \frac{F_t \cdot p_d}{b \cdot Y} \quad (5)$$

여기서,

$K_t$  : Contact tress coefficient

$p_d$  : Diametral pitch  $F_t$  : Tangential force

$Y$  : Lewis factor  $b$  : Face width

본 연구의 Pin-Pinion 기어와 Rack-Pinion 기어를 비교하기 위하여 모듈( $m$ ) 5, 잇수( $z$ ) 12~24, 이폭( $b$ )을 5[mm]로 동일하게 놓고 접선하중( $F_t$ )가 작용할 때 Pin-Pinion 기어의 굽힘응력( $\sigma_b$ )과 Rack-Pinion 기어의 굽힘응력을 비교한 결과는 Table 1과 같다.

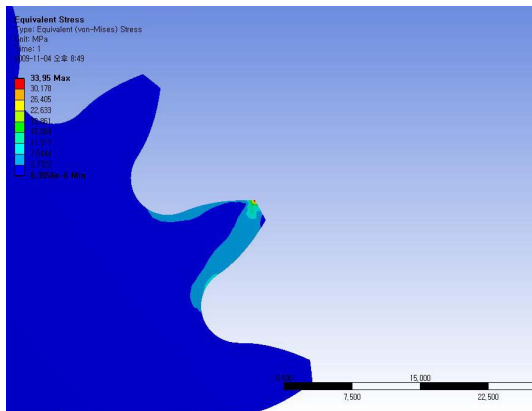


Fig. 6. FEM analysis of bending stress at tooth number 12.

위의 결과로 잇수에 따른 동일한 접선하중이 작용할 때 Pin-Pinion 기어의 이뿌리 부분에서 발생하는 굽힘응력이 Rack-Pinion 기어 이뿌리부에서의 굽힘응력보다 적게 발생하는 것을 확인 하였다.

### 3.2. Pin-Pinion Gear의 면압강도 설계 및 해석

Fig. 7은 핀 피니언 기어의 물림상태를 나타내고 있다. 여기서,  $F_n$ 은 잇면에 수직(작용선 방향)하게 작용하는 하중,  $F_t$ 는  $F_n$ 의 피치원의 접선방향 하중, 핀 반경을  $r_p$ ,  $\alpha$ 는 압력각이라 하면 변형 사이클로이드 치형에서의 핀의 중심궤적( $x', y'$ )은 다음과 같다.

$$x' = r_2 \cos\theta + r_1 \theta \sin\theta, \quad y' = r_2 \sin\theta - r_1 \theta \cos\theta \quad (6)$$

또한 곡률을 구하는 식은 다음과 같이 유도 하면  $F(\theta) = x''(\theta)i + y''(\theta)j$  로부터

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\left\{ \left( \frac{dx''}{d\theta} \right) \left( \frac{d^2y''}{d\theta^2} \right) - \left( \frac{dy''}{d\theta} \right) \left( \frac{d^2x''}{d\theta^2} \right) \right\}}{\left\{ \left( \frac{dx''}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{dy''}{d\theta} \right)^2 \right\}^{3/2}}$$

가 되므로  $\rho$ 를  $\theta$ 에 대한 함수로 표현이 가능하다.

Table 1. Comparison of the bending stress of pin-pinion and rack-pinion

z	$F_t$ [N]	$\sigma_b$ (pin) [MPa]	$\sigma_b$ (rack) [MPa]
12	159.15	9.097	19.504
16	119.36	6.614	14.628
18	106.10	5.810	13.002
20	095.49	5.260	11.702
24	079.58	4.314	09.752

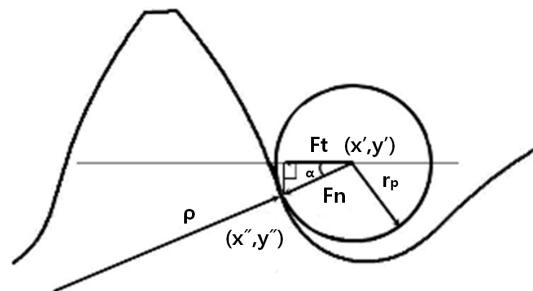


Fig. 7. Contact of pin-pinion gear.

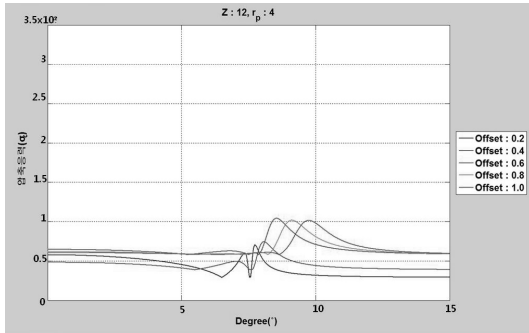


Fig. 8. Compressive stress for the rotating angle. (z=12)

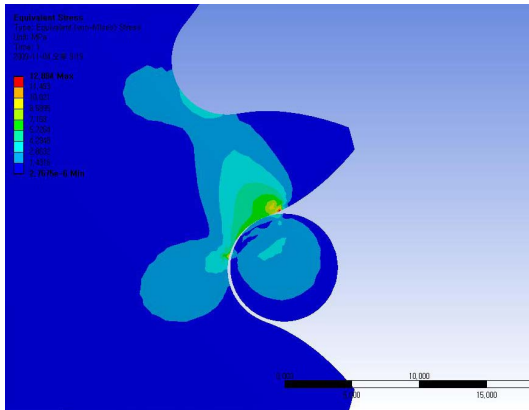


Fig. 9. FEM analysis of contact surface stress at tooth number 12.

Hertzian stress equation을 통하여 면압강도 및 최대 응력을 구하였다.

Fig. 8은 각도 변화에 따른  $\sigma_c$ 의 그래프이며 오프셋량은 0.2m~1.0m까지 설정하였고 핀 반경은 0.8m, 잇수는 12의 조건으로 표현하였다. 치면의 수직하중인  $F_t$  값을 고정하고 물림률을 고려한 압축응력  $\sigma_c$ 의 변화를 나타내고 있다. 오프셋량이 증가 할수록 물림이 발생하는 구간이 감소되며 제어 및 전달률이 감소되는 치형이 형성되는 것을 확인 할 수 있었다.

따라서 Offset량이 0.2m이고 핀 반경이 0.8m인 경우가 압축응력이 적게 걸리며 가장 적합한 치형 결과라 할 수 있다.

Fig. 9는 Ansys를 이용하여 Pin-Pinion 기어의 치면에 작용하는 압축응력을 해석한 결과로 핀과 피니언에 159.17N의 힘을 가하고 잇수 12개의 경우를 해석하였다. 이때의 핀 반경은 0.8m이고 Offset은 0.2m

Table 2. Comparison of the compressive stress of pin-pinion and rack-pinion

z	$F_t$ [N]	$\sigma_c$ (pin) [MPa]	$\sigma_c$ (rack) [MPa]
12	159.17	70.283	308.312
16	159.17	92.389	267.006
18	159.17	91.145	251.734
20	159.17	89.870	238.817
24	159.17	68.779	218.009

이다. Fig. 9와 같은 Pin-Pinion 기어의 압축응력 해석결과는 기존 Rack-Pinion에 대비 Table 2의 결과를 얻을 수 있었다. Rack-Pinion에서 압축응력 계산은 Hertz식을 이용하였고 아래와 같다[8].

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{F_t}{b \cdot d_p} \frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \frac{2}{\sin\alpha} \left(1 + \frac{d_p}{d_g}\right)} \quad (7)$$

여기서,

$F_t$  : Tangential force

$d_p, d_g$  : P.C.D of pinion and gear

$\alpha$  : Pressure angle  $b$  : Face width

본 연구의 Pin-Pinion 기어와 Rack-Pinion 기어를 비교하기 위하여 모듈(m)5, 잇수(z)12, 접선하중( $F_t$ )을 159.17[N], 이폭(b)을 5[mm]로 동일하게 놓고 Pin-Pinion 기어의 최적조건인 핀 반경0.8m, Offset 0.2m일 경우의 압축응력( $\sigma_c$ )과 Rack-Pinion 기어의 압축응력을 비교한 결과는 Table 2와 같다.

## V. 결론

본 논문에서는 Pin-Pinion Gear에서 피니언 기어의 설계를 통한 굽힘강도 및 면압강도를 계산하였고, FEM 결과를 통하여 최적치형을 해석하였다. 이에 따른 결과는 다음과 같다.

- 1) Cycloid 치형의 설계시 핀과 피니언기어가 최대 4곳의 물림이 발생하며 백래쉬 및 물림특성이 가장 적합하며 정밀제어가 가능한 치형으로 분석되었다.
- 2) 면압 강도는 곡률을 구하고 각 조건(잇수, 핀 반경, offset)에 따른 계산을 하였으며 압축응력을 구하여 핀 피니언 기어의 최적설계 상태를 알 수 있었다.

## 감사의 글

본 연구는 2014년도 동주대학교 연구비 지원으로 수행되었으며, 지원에 감사를 드립니다.

## REFERENCES

- [1] C. H. Kim, H. C. Nam and S. M Kwon, "Linear Drive Systems using Roller Gear Mechanism" Journal of the Korean Society of Manufacturing Technology Engineers, Vol. 21, No. 5, pp. 702-707, (2012)
- [2] Y. H. Choi, E. Y. Choi, S. H. Jang, J. S. Ha and Y. J. Cho, "Program Development for Vibration Performance Evaluation of Powder Transfer Equipment" Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 21, No. 10, pp. 170-179, (2004)
- [3] C. H. Park and H. S Lee, "Precision Positioning Technologies with Ballscrew" Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 17, No. 12, pp. 26-33, (2000)
- [4] H. W, Lee and N. G Park, "Vibration Analysis and Dynamic Design Optimization of a Rack and Pinion Typed Feed Drive System for a Router Machine" Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 21, No. 10, pp. 170-179, (2004)
- [5] N. J. Youn, D. J. Lee, S. Y. Won, H. K. Kim and D. M. Kang, "Machine Design" Samsung Books, pp.306-308, pp. 447-448, (2002)
- [6] D. W. Dudley, "Handbook of Practical Gear Design" CRC Press, Chapter 2. 7, (1994)
- [7] T. Y. Chong, C. K. Moon. and Y. W. Ha, "Strength Estimation of Injection Molded Plastic Stepped Spur Gear" KSMTE, Vol. 15, No. 3, pp. 17-23, (2006)
- [8] K. W. Youm, S. H. Ham, and S. H. Oh, "A Study on the Shift Motor Driving System Optimization of 4-WD Power Transformation Device" Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 30, No. 11, pp. 1187-1192, (2013)