

멀티 스케일 접근 방법에 의한 복합소재 적층 판구조의 HSDT 기반 고유진동 해석

이상열*

Lee, Sang-Youl*

Free Vibration Analysis based on HSDT of Laminated Composite Plate Structures Using Multi-scale Approach

ABSTRACT

This study carried out finite element vibration analysis of composite plate structures for construction using multi-scale approaches, which is based on the higher-order theory. The finite element (FE) models for composite structures using multi-scale approaches described in this paper is attractive not only because it shows excellent accuracy in analysis but also it shows the effect of the material combination. The FE model is used for studying free vibrations of laminated composite plates for various fiber-volume fractions. In particular, new results reported in this paper are focused on the significant effects of the fiber-volume fraction for various parameters, such as fiber angles, layup sequences, and length-thickness ratios. It may be concluded from this study that the combination effect of fiber and matrix, largely governing the dynamic characteristics of composite structures, should not be neglected and thus the optimal combination could be used to design such civil structures for better dynamic performance.

Key words : Multi-scale approach, Higher-order plate theory, Free vibration, Finite element analysis

초 록

본 연구에서는 건설용 복합소재 구조에 적합한 미시-거시적 멀티 스케일 접근 방법을 제시하고 고차항 이론에 기반한 유한요소 진동 해석을 수행하였다. 본 연구에서 제시하는 멀티-스케일 접근 방법에 의한 유한요소 모델은 해석의 정확성 뿐 아니라 재료 조합의 영향을 정확히 보여주는 점에서 장점을 갖는다. 적용된 유한요소 모델은 화이버의 함침비율의 변화에 따른 적층 판 구조의 고유진동을 상세 분석하기 위하여 개발되었다. 특히, 본 연구에서 제시한 결과는 적층 구조의 보강각도, 적층배열, 그리고 길이-두께비 등과 화이버 함침비율의 변화의 상호작용을 분석하는 데 초점을 두었다. 수치해석 결과로부터 화이버와 모재의 조합의 영향은 거시적 동적 특성을 조절할 수 있으므로 무시되면 안되며, 최적 배합을 통하여 건설용으로서 우수한 동적 구조성능을 만족하도록 설계할 수 있음을 보여준다.

검색어 : 멀티-스케일 접근 방법, 고차항 판이론, 고유진동, 유한요소 해석

1. 서론

복합소재는 성분이나 형태가 다른 두 종류 이상의 소재가 거시적으로 조합되어 효과적인 기능을 갖는 재료로서 구성 소재들 사이에 거시적으로 경계면을 갖는 것을 특징으로 한다. 복합소재는 중량 대비 강도 등이 우수하여 항공, 자동차 및 선박 분야 등의 정밀구조에 대하여 주로 사용되었다. 최근 복합소재의 역학적인 장점을 건설구조 분야에도 도입하여 활용하고자 국내외적으로 다양한 연구개발을

* 정회원 · 교신저자 · 안동대학교 토목공학과 조교수 (Corresponding Author · Andong National University · lsy@anu.ac.kr)

Received August 27, 2013/ revised December 11, 2013/ accepted December 23, 2013

수행하였다. 그러나 기존의 콘크리트와 같은 건설재료에 비하여 경제성 면에서 단점이 부각되어 보다 적극적인 개발이 미진한 실정이다. 정밀 기계부품에 적용하는 고가의 복합소재를 대형 건설 구조분야에 적용하기 위해서는 경제적인 소재조합 기술이 필요하다. 구조물에 요구되는 성능을 만족시킬 수 있도록 효율적으로 재료를 조합한다면 고가의 복합소재를 건설 분야에 경제적으로 활용할 수 있을 것이다.

효율적인 복합소재의 적용을 위해서는 복합소재를 구성하는 재료의 상호관계를 미시역학적으로 규명하는 것이 필요하다. 복합소재는 모재(Matrix)와 화이버(Fiber)의 조합으로 구성되며, 이 재료들의 적절한 상호 조합은 거시역학적으로 강성 및 강도에 크게 영향을 주게 된다. 복합소재의 미시역학적인 목적은 화이버와 모재의 각각의 물성과 상대적인 비율로부터 조합된 재료의 물성, 강성 및 강도 등을 추정하는 것이다. 특히, 모재에 함침되는 화이버의 비율은 조합된 재료의 탄성계수 등에 중요한 영향을 미친다. 또한 고가의 화이버를 효율적으로 함침한다면 복합소재의 경제성을 확보하는 데 크게 기여할 수 있을 것이다. 복합소재에 대한 멀티스케일 접근 방법을 적용한 다양한 연구가 진행되었다. Ji et al. (2004)는 LS-DYNA 프로그램을 사용하여 DNS (Direct Numerical Simulation) 멀티스케일 모델링에 의하여 복합재료 평판의 충격해석을 수행하였다. Jin et al. (2010)은 멀티스케일 접근방법에 의한 복합재 압력용기의 수명예측을 제시하였다. 최근, Zuo et al. (2013)은 최대 고유진동수 추출을 위하여 BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) 알고리즘을 적용하여 복합재료 및 1차원 Beam-type 구조의 멀티스케일 설계를 수행하였다.

그러나, 기존 연구들은 주로 항공 및 기계분야에 대한 적용을 목표로 하며, 미세한 화이버 자체를 유한요소 모델링하는 방법을 주로 적용하였다. 대형 건설구조물에 대한 복합소재의 미시역학적인 관점은 화이버 각각에 대한 모델링보다는 화이버의 적절한 함침량을 결정하여 경제적인 거시역학적 설계로 연계하는 것이라고 할 수 있다. 또한, 기존의 연구들은 미시역학적으로는 상세한 모델링을 시도하였으나, 거시역학적 해석으로 1차원변형 판이론 (First-order Shear Deformation Theory, FSDT)가 적용된 상용프로그램을 적용하였다(Kruijff et al., 2007; Goupee and Vel, 2007). 그러나, 대형 건설구조물에 적용하기 위한 멀티스케일 접근방법은 미시적으로는 화이버의 함침비율을 기준으로 강성을 추정하고, 거시역학적으로는 보다 정밀한 해석을 통하여 전체 거동을 상세 규명할 필요가 있으며, 이에 관한 기존 연구는 미미한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 고차원변형 판이론(Higher-order Shear Deformation Theory, HSDT)에 기반한 멀티스케일 고유진동 해석 프로그램을 개발하였으며, 수치해석 예제를 통하여 미시역학 기반의 화이버의 함침비율에 따른 강성 추정으로부터 거시적 동적

특성에 미치는 영향을 적층배열 및 길이-두께 비 등의 매개변수에 대하여 분석하도록 한다.

2. 기본 이론 및 접근 방법

2.1 미시역학적 접근 방법

본 연구에서는 미시역학적으로 화이버의 함침비율에 따른 탄성 물성치의 추정 방법을 기술하고, 가장 효율적인 접근 방법을 결정한다. 또한 추정된 물성치로부터 거시적 진동 해석을 위하여 HSDT 기반된 접근 방법을 요약 기술하며, 두 접근 방법을 연계한 멀티스케일 해석에 대하여 정식화하기로 한다. 복합소재에 대한 미시역학적인 접근 방법의 목적은 복합소재를 구성하는 모재와 화이버의 각 탄성 물성값의 조합 비율로부터 합성된 복합소재의 탄성계수, 강성 또는 강도를 추정하는 것이다. 예를 들면, 복합소재의 탄성 물성치는 화이버와 모재의 물성치와 화이버와 모재의 상대적인 체적비율로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{ij} = C_{ij}(E_f, \nu_f, V_f, E_m, \nu_m, V_m) \quad (1)$$

여기서, E_f, E_m 은 등방성 화이버 및 모재의 탄성계수, ν_f, ν_m 는 등방성 화이버 및 모재의 프와송비, 그리고 V_f, V_m 은 전체 복합소재의 체적에 대한 화이버 및 모재 체적의 비율을 각각 의미한다. 재료 역학적 접근 방법에서 가장 중요한 가정 사항은 Fig. 1과 같이 일방향 화이버 보강된 복합소재의 화이버 방향으로의 변형률은 모재에서의 화이버의 변형률과 같다는 것이다. 변형률이 같지 않다는 것은 화이버와 모재사이에 균열이 발생하였음을 의미한다. 이러한 가정에 의하여, 모재와 화이버가 거시적으로 합성된 복합소재 1방향 탄성계수인 E_1 은 혼합법칙(rule of mixtures)에 의하여 모재와 화이버 탄성계수(E_m, E_f)의 선형적 관계로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2)$$

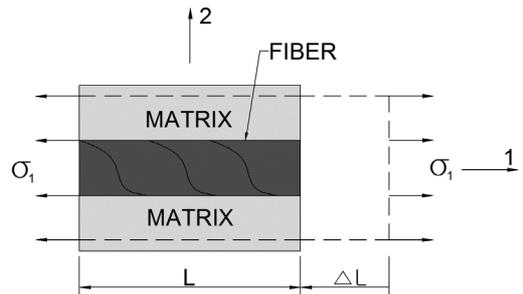


Fig. 1. Representative Volume Element Loaded in the 1-Direction

거시적 복합소재의 프아송비 ν_{12} 도 유사한 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (3)$$

한편, 거시적으로 합성된 복합소재에 대한 2방향 탄성계수 E_2 와 전단탄성 계수 G_{12} 는 다음과 같은 비선형적 관계이며, 화이버보다는 모재에 지배적인 특성을 보인다.

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m}, \quad G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_m G_f + V_f G_m} \quad (4)$$

Eq. (4)는 화이버가 모재에 일정한 간격으로 정렬되어 있다는 가정 하에 유도된 것이다. 그러나 실제로는 화이버는 모재에서 불규칙하게 정렬되어 있다. 이러한 불규칙성을 고려하여 화이버 함침비율에 따라 비선형 관계를 보이는 E_2 와 G_{12} 의 값은 탄성론적 관점으로 정확해를 통하여 다음과 같이 산정할 수 있다(Jones, 1998).

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m) V_m] \quad (5)$$

$$[(1 - \xi) \frac{\lambda_f (2\lambda_m + G_m) - G_m (\lambda_f - \lambda_m) V_m}{(2\lambda_m + G_m) + 2(\lambda_f - \lambda_m) V_m} + \xi \frac{\lambda_f (2\lambda_m + G_f) + G_f (\lambda_m - \lambda_f) V_m}{(2\lambda_f + G_f) - 2(\lambda_m - \lambda_f) V_m}]$$

$$G_{12} = (1 - \xi) G_m \frac{2G_f - (G_m - G_m) V_m}{2G_m + (G_m - G_m) V_m} \quad (6)$$

$$+ \xi G_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m) V_m}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m) V_m}$$

여기서, $\lambda_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}$, $G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$, $\lambda_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}$, $G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$ 이며, ξ 는 Fig. 2와 같은 화이버 정렬상태에 따라 결정되는 계수이다.

그러나 Eqs. (5) and (6)은 수식이 다소 복잡하여 적용하기에 다소 난해하다. 따라서 Halpin and Tsai (1969)는 사용하기 적합한 다음과 같은 근사식을 제안하였다.

$$\frac{\Phi(E_2, G_{12}, \nu_{12})}{\Phi_m(E_m, G_m, \nu_m)} = \frac{1 + \beta \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (7)$$

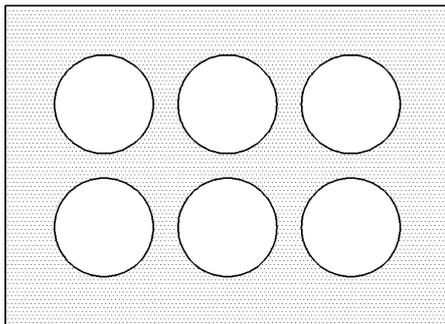
여기서,

$$\eta = \frac{(\Phi_f(E_f, G_f, \nu_f) / \Phi_m(E_m, G_m, \nu_m)) - 1}{(\Phi_f(E_f, G_f, \nu_f) / \Phi_m(E_m, G_m, \nu_m)) + \beta} \quad (8)$$

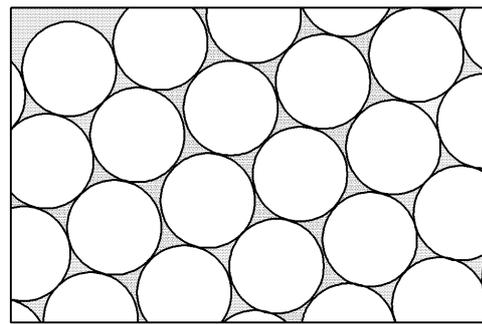
Eqs. (7) and (8)에서 Φ 및 Φ_m 은 거시적 복합소재의 재료 물성 및 모재의 물성을 각각 의미하며, 복합소재 물성 E_2 , G_{12} , 및 ν_{12} 은 Eq. (7)의 비선형 관계로 표현된다. 예를 들면, E_2 를 예측하는 경우, Eqs. (7) and (8)을 조합하여 정리하면 다음과 같은 계산식을 도출할 수 있다.

$$E_2 = E_m \frac{1 + \beta V_f (V_f - 1)}{1 - V_f (V_f - 1)} \quad (9)$$

G_{12} 와 ν_{12} 도 Eq (9)로부터 E_2 와 E_m 대신 각각 대입하면 동일한 식으로 계산이 가능하다. 한편, Hewitt and Malherbe (1970)은 V_f 가 0.5 이상이고, 사각형 배열을 갖는 원형 화이버 배열의 경우에는 Eq. (8)은 실제값보다 작은 값을 갖는다는 것을 밝히고 β 에 대하여 보정된 다음과 같은 식을 제안하였다.



(a) $\xi = 0$



(b) $\xi = 1$

Fig. 2. Extremes of Fiber Contiguity

$$\beta_{E_2} = 2 + 40 V_f^{10}, \beta_{G_{12}} = 1 + 40 V_f^{10} \quad (10)$$

본 연구에서는 E_1 및 ν_{12} 은 일반적으로 혼합법칙에 대하여 실제 실험결과와 비교하여 정확한 결과를 보이는 것으로 알려져 있으므로 Eqs. (2) and (3)을 적용하기로 한다. 한편, E_2 및 G_{12} 는 혼합법칙을 만족하지 않고, Eqs. (5) and (6)의 정확해는 실용적으로 적용하기에는 복잡하므로 정확해에 의한 비선형 관계를 만족하면서 실용적으로 적용하기 편리한 Eq. (7)을 적용하여 해석하기로 한다.

2.2 거시역학적 접근 방법

전술한 바와 같이 본 연구의 특징은 2.1절의 미시역학적 접근 방법으로 산정한 복합소재 물성값을 입력값으로 하여 HSDT에 기반한 거시 동역학적 접근방법을 적용한 것이다. 건설용 복합소재 구조는 거시역학적으로 보다 정밀한 해석이 요구된다. HSDT는 Fig. 3과 같이 변형 전 판에서 중립면의 수직관계는 변형 후에도 수직한다는 고전적 판이론(Classical Plate Theory, CLPT)과 FSDT의 기본가정은 달리 변형 후에 중립면의 횡 방향 변위의 비선형성까지 고려하게 되며 실구조물과 같이 구조물의 상·하면에 전단 응력이 0으로 나타나게 된다. 복합소재 적층판에 대한 비선형 HSDT에 의한 변위는 다음과 같은 관계로 표현할 수 있으며 상세한 정식화 과정은 참고문헌을 참조하기로 한다(Lee and Chang, 2010; Lee and Wooh, 2004).

$$\begin{aligned} u(\xi_1, \xi_2, x_3, t) &= u_o(\xi_1, \xi_2, t) + x_3 \phi_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2, t) \\ &\quad - c_1 x_3^3 (\phi_{\xi_1} + c_0 w_{0, \xi_1}) \\ v(\xi_1, \xi_2, x_3, t) &= v_o(\xi_1, \xi_2, t) + x_3 \phi_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2, t) \\ &\quad - c_1 x_3^3 (\phi_{\xi_2} + c_0 w_{0, \xi_2}) \\ w(\xi_1, \xi_2, x_3, t) &= w_0(\xi_1, \xi_2, t) \end{aligned} \quad (11)$$

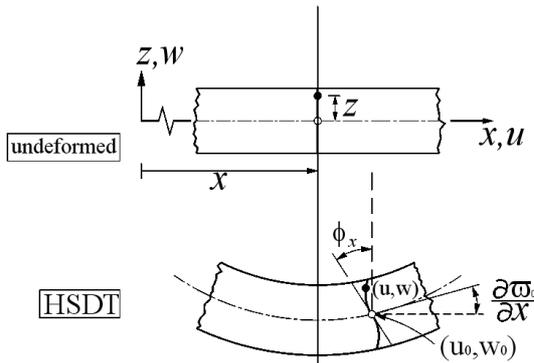


Fig. 3. Higher-Order Shear Deformation Theory

여기서 c_0 과 c_1 은 전단변형의 3차항을 나타내는 변수로서 0으로 놓으면 Eq. (11)은 FSDT의 가정식과 동일하게 된다. 본 연구에서는 요소당 4절점을 갖는 HSDT에 기반된 유한요소 해석을 위하여 판의 중립면에서의 ξ_1 , ξ_2 그리고 x_3 방향으로의 변위(u_0, v_0, w_0)와 변위각($w_{0, \xi_1}, w_{0, \xi_2}$), 그리고 회전각($\phi_{\xi_1}, \phi_{\xi_2}$)이 고려된 요소의 절점당 7개의 자유도를 갖는 Nonconforming 요소가 사용되었으며 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi_{\xi_1} \\ \phi_{\xi_2} \end{Bmatrix} &= \sum_{j=1}^4 \Phi_j [L_4] \begin{Bmatrix} u_{0j} \\ v_{0j} \\ \phi_{\xi_1 j} \\ \phi_{\xi_2 j} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_{0, \xi_1} \\ w_{0, \xi_2} \end{Bmatrix} &= \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} \Psi_j & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_j^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_j^\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0j} \\ w_{0j, \xi_1} \\ w_{0j, \xi_2} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $[L_4]$ 는 4×4 크기를 갖는 Identity 행렬, Φ 는 Lagrangian 보간함수, Ψ, Ψ^α , 그리고 Ψ^β 는 Hermite 보간함수, Ψ 의 1차 및 2차 미분을 각각 의미한다. 수치적분의 용이함을 위하여 전체좌표계(ξ_1, ξ_2)에서의 강성행렬은 -1.0부터 1.0까지의 일정한 범위로 변환된 새로운 국부좌표계(η_1, η_2)에서의 강성행렬 $[K]_T$ 로 재구성하게 되며 다음의 식으로 요약하여 나타낼 수 있다(Bathe, 1996).

$$[K]_T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{B}]^T [D]_s [\bar{B}] |J| d\eta_1 d\eta_2 \quad (13)$$

Eq. (13)에서 $[D]_s$ 는 13×13의 크기를 갖는 전체좌표계의 강성행렬을, $[\bar{B}]$ 는 13×28의 크기를 갖는 변환된 국부좌표계의 변형률-변위 관계 행렬을, 그리고 $|J|$ 는 Jacobian 변환행렬을 각각 의미하며, $[D]_s$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[D]_s = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & E_{ij} & 0 & 0 \\ B_{ij} & D_{ij} & F_{ij} & 0 & 0 \\ E_{ij} & F_{ij} & H_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{A_{ij}} & \overline{D_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{D_{ij}} & \overline{F_{ij}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서, $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ 는 단면력과 변형률의 관계를 나타내는 강성을 의미한다. A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 적층판의 강성과 두께의 관계를 나타내며 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} 는 두께에 대하여 3차 이상의 비선형 고차항 효과를 나타낸다. 미시역학으로부터 계산되는 최종 값은 화이버 함침비율(V_f)에 따른 $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ 등이며, 이 값들을 거시역학 해석을 위한 입력값으로 그대로 대입하기

때문에 Eq. (14)는 일반 거시역학 해석에서 사용하는 식과 동일한 형태를 갖게 된다. 만약, 미시역학적으로 화이버와 모재의 함침비율이 변화되는 경우 E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} 은 Eq. (7)에서 재계산되어 거시역학 해석의 입력값으로 반복적으로 대입되는 알고리즘을 갖는다(Fig. 4 참조).

비선형 HSDT를 적용한 평판에서의 관성행렬 $\{S\}$ 와 가속도 벡터 $\{A\}$ 는 Eq. (15)와 같이 나타낼 수 있다. Eq. (10)에서 Nonconforming 요소의 w_0 와 관련된 3개의 절점당 가속도 $\ddot{\Delta}_i$ 는 $\ddot{\Delta}_1 = \ddot{w}_0$, $\ddot{\Delta}_2 = \ddot{w}_{0,x}$, 그리고 $\ddot{\Delta}_3 = \ddot{w}_{0,y}$ 이다.

$$\{S\} = [\rho]\{A\} = \begin{Bmatrix} I_0 & 0 & -4I_3/3h^2 & J_1 & 0 \\ 0 & I_0 & -4I_3/3h^2 & 0 & J_1 \\ -4I_3/3h^2 & -4I_3/3h^2 I_0 + 16I_6/9h^4 & J_4 & J_4 & \\ J_1 & 0 & J_4 & K_2 & 0 \\ 0 & J_1 & J_4 & 0 & K_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0 \\ \ddot{v}_j \\ \ddot{\Delta}_j \\ \ddot{\phi}_{xj} \\ \ddot{\phi}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서,

$$I_i = \sum_{k=1}^m \int_{x_{3_k}}^{x_{3_{k+1}}} \rho^{(k)} x_3^i dz \quad (i=0,1,2,\dots,6), \quad J_i = I_i - 4I_i/3h^2 + 2, \quad K_2 = I_2 - 8I_4/3h^2 + 16I_6/9h^4$$

이며 적층판의 관성을 의미한다. 또한, m 은 전체 적층수이다. 유사한 방법으로 국부좌표계(η_1, η_2)에서의 평판 요소에서의 질량행렬 $[M]_T$ 은 다음과 같은

관계로 표시된다(Lee et al., 2007).

$$[M]_T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{H}]^T [\rho] [\bar{H}] J |d\eta_1 d\eta_2 \quad (16)$$

여기서, $[\bar{H}]$ 는 Lagrangian과 Hermite 형상함수의 조합행렬이다. 고유 진동 해석을 수행하기 위하여 앞서 구성한 국부 강성행렬과 질량행렬을 이용하여 전체 시스템 행렬시스템의 강성행렬 $[K]$ 와 질량행렬 $[M]$ 을 구성한 후 고유치 문제로 계산한다.

본 연구에서는 전술한 복합소재 구조에 대한 미시적·거시적 접근 방법을 조합하여 멀티-스케일 고유진동해석을 위한 해석 프로그램 코드를 개발하였다. 개발한 프로그램은 Fortan 언어를 사용하였으며, 전술한 바와 같이 2.1절의 미시적 접근 방법에 의하여 화이버 함침비율 변화에 따른 최적의 복합재료 물성(E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12})을 산정한 후에, 이를 대입하여 HSDT 기반 거시적 고유진동 해석을 수행하였다. Fig. 4는 개발한 멀티-스케일 해석 프로그램의 흐름도를 보여준다.

3. 수치 해석 예제

3.1 프로그램 검증

개발한 프로그램을 검증하기 위하여 Table 1과 같은 물성을 갖는 복합소재 구조에 대하여 고유진동해석을 실시하였다. Table

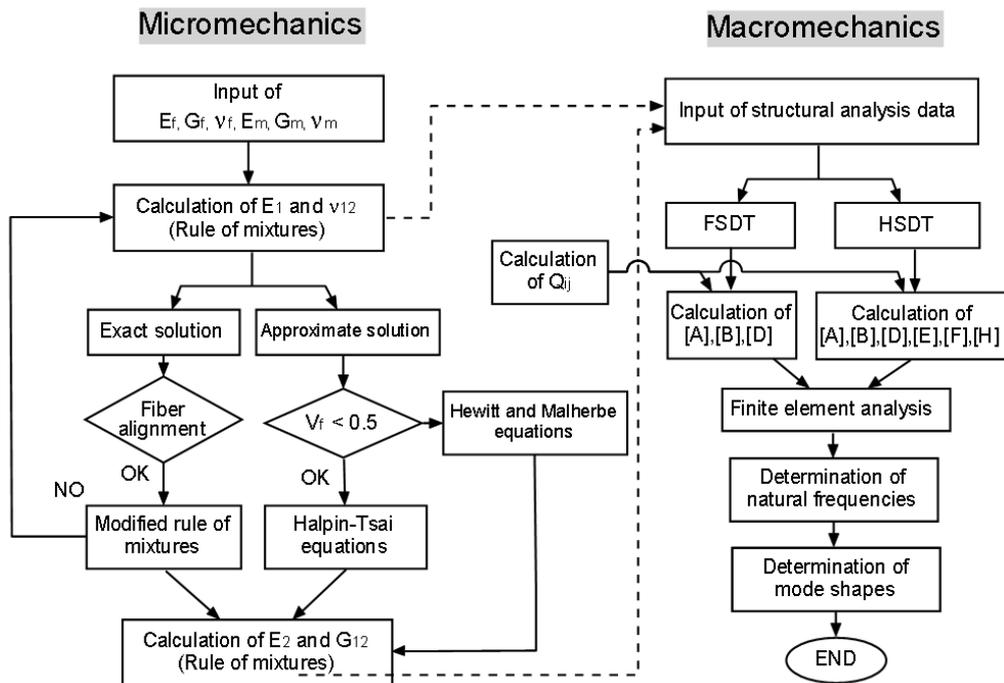


Fig. 4. A Flow Chart of Micro- and Macro-Mechanics of Free Vibrating Composite Structures

Table 1. Mechanical and Physical Properties of the Materials Used in this Study

Material	Source	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	G_{23}	G_{13}	ρ
I	Singha and Daripa (2007)	4000.0	100.0	0.25	$0.5E_2$	$0.6E_2$	$0.5E_2$	1.0
II	Kumar and Shrivastava (2005)	130.0	10.0	0.35	5.0	3.3	5.0	1,500.0

Note that the properties of materials I is normalized by E_2 . And the units of E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} , and G_{13} of material II are GPa and that of ρ is kg/m^3 , respectively.

Table 2. Normalized Natural Frequencies of Simply Supported Plates ($\omega = \bar{\omega}\alpha^2/\pi^2 h\sqrt{\rho/E_2}$, [90/0/90/0/90], Material I).

L/h	Source	Mode				
		I	II	III	IV	V
L/h=1000	Singha and Daripa (2007) [FSDT]	1.9140	3.9741	6.6541	7.6528	8.1492
	Wang (1997) [FSDT]	1.9141	3.9742	6.6567	7.6564	8.1511
	Present study [FSDT]	1.9099	3.9687	6.6593	7.5915	8.1870
	Present study [HSDT]	1.9079	3.9605	6.5883	7.5763	8.1046
L/h=10	Singha and Daripa (2007) [FSDT]	1.5700	3.0386	3.7422	4.576	5.1667
	Wang (1997) [FSDT]	1.5699	3.0371	3.7324	4.5664	5.1469
	Present study [FSDT]	1.5699	3.0369	3.7297	4.5631	5.1466
	Present study [HSDT]	1.5701	2.9034	3.7813	4.6212	6.2438

Table 3. Normalized Natural Frequencies of Simply Supported Square Plates ($\omega = \bar{\omega}b^2\sqrt{\rho/E_2}/h$, $b/h = 75$, $[(\pm 45^\circ/0^\circ)_3(90^\circ/0^\circ/90^\circ)_2]_s$, Material II)

Source	Mode			
	I	II	III	IV
Kumar and Shrivastava (2005) [FSDT]	13.590	29.113	37.792	53.934
Kumar and Shrivastava (2005) [HSDT]	13.714	29.503	38.309	54.852
Present study [HSDT]	13.592	29.003	37.665	53.607

2는 단순지지된 크로스-플라이 복합소재 적층판의 무차원화된 고유진동을 비교한 것이다. 재료 1을 사용하였으며 L/h는 1000과 10에 대하여 HSDT와 FSDT를 적용한 결과를 FSDT를 적용한 기존 연구 문헌과 비교하였다. 표로부터 본 연구에서 개발한 프로그램에 의한 결과는 기존 문헌과 잘 일치하고 있음을 관찰할 수 있다. Table 3은 HSDT과 FSDT를 사용한 다른 문헌 결과를 HSDT를 사용한 본 해석프로그램 결과와 무차원 비교하였으며, 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Tables 2 and 3는 FSDT와 HSDT에 대한 해석 결과의 차이는 작게 나타났으나, HSDT 및 FSDT는 판의 길이-두께비, 하중 및 경계조건 및 기하학적 형상 등에 따라 값의 차이가 크게 발생할 수 있다(Lee and Wooh, 2004). 따라서 본 연구에서는 가장 정밀한 판 해석 이론으로 알려진 HSDT에 기반한 고유진동 해석을 수행하기로 한다.

3.2 화이버 함침비율에 따른 강성 변화

수치해석 예제는 건설 분야에 주로 사용되는 Glass fiber가

Epoxy에 함침된 GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) 판 구조 대하여 수행하였다. 화이버와 모재의 재료 물성은 $E_m=3.45$ GPa, $E_f=85.3$ GPa, $G_f=35.5$ GPa, $G_m=1.26$ GPa, $\rho_m=0.35$, $\rho_f=0.20$ 이며, $\xi = 2.0$ 이다. Table 4는 화이버 함침비율 변화에 따른 단순지지된 비대칭 크로스-플라이 적층 판의 강성값의 변화를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 비대칭 적층 형태이므로 면내면 외 연계강성 [B]가 0이 아닌 값을 갖게 되며, 연계강성의 고차항 [E]도 값을 갖게 되어 거시적 동적 특성에 영향을 주게 된다. 또한, 화이버의 함침량이 증가함에 따라 전체적인 강성값은 비례되어 증가되는 경향을 보이나, $V_f = 0.6 \sim 0.8$ 인 경우에는 $[a_{66}]$, $[d_{66}]$ 등의 값이 매우 크게 증가함을 관찰할 수 있다. 이는 화이버의 함량이 0.6 이상으로 증가함에 따라, E_2 와 G_{12} 가 비선형적으로 기하급수적인 증가를 보이는 특성 때문이다. 또한, HSDT의 고차항에 해당하는 $[E]$, $[F]$, $[H]$, $[\bar{D}]$, 및 $[\bar{F}]$ 도 발생되어 동적 특성에 복합적인 영향을 줄 수 있음을 유의해야 한다.

Table 4. Stiffness Matrices of Simply Supported Anti-Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions (L/h=10, [0/90/0/90])

Stiffness		Fiber-volume Fraction (%)				
		10	20	40	60	80
[A]	[a ₁₁]	0.841E+09	0.131E+10	0.232E+10	0.346E+10	0.500E+10
	[a ₁₂]	0.156E+09	0.187E+09	0.271E+09	0.404E+09	0.678E+09
	[a ₆₆]	0.163E+09	0.209E+09	0.339E+09	0.570E+09	0.110E+10
[B]	[b ₁₁]	-0.468E+07	-0.910E+07	-0.172E+08	-0.237E+08	-0.256E+08
	[b ₂₂]	0.468E+07	0.910E+07	0.172E+08	0.237E+08	0.256E+08
[D]	[d ₁₁]	0.700E+06	0.109E+07	0.193E+07	0.288E+07	0.416E+07
	[d ₁₂]	0.130E+06	0.156E+06	0.225E+06	0.336E+06	0.564E+06
	[d ₆₆]	0.136E+06	0.174E+06	0.282E+06	0.475E+06	0.916E+06
[E]	[e ₁₁]	-0.102E+05	-0.199E+05	-0.377E+05	-0.520E+05	-0.560E+05
	[e ₂₂]	0.102E+05	0.199E+05	0.377E+05	0.520E+05	0.560E+05
[F]	[f ₁₁]	0.105E+04	0.164E+04	0.289E+04	0.432E+04	0.624E+04
	[f ₁₂]	0.195E+03	0.234E+03	0.338E+03	0.505E+03	0.847E+03
	[f ₆₆]	0.204E+03	0.261E+03	0.423E+03	0.712E+03	0.137E+04
[H]	[h ₁₁]	0.187E+01	0.293E+01	0.517E+01	0.771E+01	0.111E+02
	[h ₁₂]	0.348E+00	0.418E+00	0.605E+00	0.902E+00	0.151E+01
	[h ₆₆]	0.364E+00	0.466E+00	0.756E+00	0.127E+01	0.245E+01
[\bar{A}]	[\bar{a}_{44}]	0.193E+09	0.246E+09	0.398E+09	0.666E+09	0.127E+10
[\bar{D}]	[\bar{d}_{44}]	0.160E+06	0.205E+06	0.331E+06	0.555E+06	0.105E+07
[\bar{F}]	[\bar{f}_{44}]	0.241E+03	0.308E+03	0.497E+03	0.832E+03	0.158E+04

Table 5. Natural Frequencies (Hz) of Simply Supported Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions and Layup Sequences (L/h=100)

Layup Sequence		Fiber-volume Fraction (%)				
		10	20	40	60	80
[0]	I	236.934	285.250	372.012	460.572	578.000
	II	513.286	584.643	742.883	946.565	1274.264
	III	703.500	888.697	1183.328	1437.876	1700.614
	IV	932.766	1112.886	1413.755	1802.136	2277.248
[0/90/0]	I	236.945	285.270	372.042	460.601	578.017
	II	521.616	598.866	764.110	969.536	1292.635
	III	697.700	879.821	1170.719	1423.477	1687.358
	IV	932.816	1120.807	1456.649	1810.552	2277.387
[0/90] _{2s}	I	236.949	285.281	372.061	460.618	578.026
	II	541.017	631.455	812.383	1022.168	1335.563
	III	683.105	857.466	1138.950	1387.321	1654.246
	IV	933.334	1122.369	1463.058	1812.691	2277.600
[0/90/0] _{2s}	I	236.959	285.302	372.096	460.652	578.045
	II	569.471	678.293	881.094	1097.798	1398.774
	III	660.030	822.007	1088.507	1330.009	1602.068
	IV	933.666	1123.626	1464.914	1814.348	2278.335
[0/90] _{4s}	I	236.971	285.327	372.135	460.691	578.068
	II	598.786	725.763	950.175	1174.477	1464.193
	III	634.048	781.469	1030.472	1264.481	1543.482
	IV	933.967	1124.815	1467.277	1816.348	2278.952

3.3 화이버 함침비율-적층배열 변화에 따른 고유진동수 변화

Table 5는 3.2절과 동일한 화이버와 모재를 갖는 단순지지된 대칭적층판에 대하여 화이버 함침비율과 적층배열을 변화시킨 경

우에 대한 고유진동수를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이, 0°와 90°를 사용한 경우, 적층 배열 및 개수변화가 고유진동수에 미치는 영향은 미미한 것으로 나타났다. 반면, 화이버 함침비율의 증가에 따라 고유진동수는 60%까지는 거의 선형으로 증가하다가

Table 6. Natural Frequencies (Hz) of Simply Supported Anti-Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions and Layup Sequences (L/h=100)

		Fiber Volume Fraction (%)				
Layup Sequence	Mode	10	20	40	60	80
[0/90]	I	222.826	257.867	330.019	417.917	550.735
	II	573.309	671.020	863.525	1089.189	1417.103
	III	578.155	676.700	870.841	1098.409	1429.079
	IV	879.465	1018.510	1303.951	1650.842	2173.935
[0/90] _{2n}	I	233.537	278.760	362.134	450.4472	571.402
	II	604.410	732.352	958.487	1185.813	1478.738
	III	609.500	738.518	966.556	1195.798	1491.200
	IV	920.937	1099.550	1428.636	1777.085	2254.009
[0/90] _{3n}	I	235.463	282.449	367.757	456.201	575.138
	II	609.960	743.076	974.930	1202.732	1489.806
	III	615.092	749.321	983.120	1212.842	1502.350
	IV	928.359	1113.783	1450.340	1799.296	2268.429
[0/90] _{4n}	I	236.132	283.728	369.704	458.196	576.439
	II	611.888	746.786	980.608	1208.587	1493.655
	III	617.033	753.058	988.840	1218.739	1506.227
	IV	930.938	1118.711	1457.843	1806.989	2273.446

Table 7. Natural Frequencies (Hz) of Simply Supported Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions and L/h Ratios ([0/90]_{2S})

		Fiber Volume Fraction (%)				
L/h	Mode	10	20	40	60	80
5	I	4154.333	4914.559	6362.607	7964.720	10209.347
	II	6513.569	7365.816	9378.592	12166.502	16892.536
	III	8435.502	9607.134	12287.942	15645.154	20910.796
	IV	10003.672	11935.433	15501.452	19430.045	24653.927
10	I	2285.522	2732.627	3555.639	4417.165	5578.752
	II	5006.849	5778.731	7418.513	9374.863	12349.005
	III	6194.885	7446.401	9474.005	12253.883	15003.306
	IV	6677.977	7583.753	9983.018	12383.446	17413.553
20	I	1175.426	1410.493	1838.461	2278.043	2863.253
	II	2658.531	3079.195	3959.030	4987.420	6531.012
	III	3343.098	4143.139	5495.077	6707.598	8046.082
	IV	4590.504	5715.961	7595.706	9184.605	11179.083
50	I	474.142	569.662	742.894	919.814	1154.479
	II	1083.698	1257.482	1617.640	2035.690	2660.546
	III	1370.480	1705.857	2265.485	2760.349	3292.989
	IV	1884.850	2265.868	2957.285	3661.446	4567.509
100	I	237.376	285.281	372.061	460.618	578.026
	II	543.463	631.455	812.383	1022.168	1335.563
	III	687.829	857.466	1138.950	1387.321	1654.246
	IV	943.773	1122.369	1463.058	1812.691	2277.600

60%이상부터는 증가의 비율이 다소 감소함을 알 수 있다. 미시역학적으로 V_f 의 증가는 탄성론적으로 E_2 및 G_{12} 의 기하급수적 증가를 유발하여, 거시적 동적특성에도 유사한 영향을 줄 것으로 예상할 수 있으나, 대칭 적층의 경우는 $[B]$, $[E]$ 의 값이 0이 되어 고유진동수의 변화 폭이 적음으로 분석된다.

한편, Table 6과 같은 비대칭 적층의 경우는 적층 개수에 따라서 고유진동수는 증가하는 경향을 보이고 있으나, $[0/90]_{3n}$ 이상부터는 수렴하는 것을 관찰할 수 있다. 하이버 함침비를 증가에 따라 고유진동수는 대칭적층보다 증가의 폭이 5~10%정도 크게 나타났다. 표 5~6으로부터, 대칭적층과 비대칭 적층은 크로스-플라이 경우 3n이상의 적층배열부터는 거의 동일한 동적특성을 보이게 되며, V_f 의 증가에 따라 고유진동수는 선형 증가하는 특성을 보임을 알 수 있다. 이러한 특성은 실용적 관점에서 건설용 재료로서 구조적 성능을 만족하는 적절한 하이버의 비율을 결정하여 경제성을 확보 하면서, 적층배열 최적 설계로 고유진동수를 조절하여 공진현상의 방지를 가능하도록 한다.

3.4 하이버 함침비율-L/h 비율 영향에 따른 고유진동수 변화

Table 7은 하이버 함침비를 증가와 L/h의 변화에 따른 대칭 적층된 복합소재 판구조의 고유진동수를 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 L/h와 V_f 의 변화는 고유진동수에 큰 영향을 미치고

있음을 알 수 있다. 특히 L/h가 작을 수록 V_f 의 변화에 따른 고유진동수 변화의 폭은 크게 나타났으며, L/h가 증가함에 따라 고유진동수의 변화는 감소하여 L/h=100의 경우에는 차이가 크게 감소함을 관찰할 수 있다. 이러한 경향은 Fig. 5와 같은 비대칭 적층의 경우에도 유사한 경향을 보였다. 이는 판의 두께가 얇아짐에 따라 고유진동수에 대한 하이버의 영향은 점차 감소하기 때문이다.

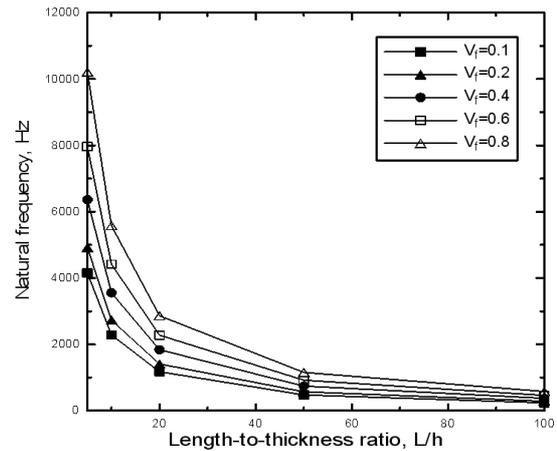


Fig. 5. First Natural Frequencies (Hz) of Simply Supported Anti-Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions and L/h Ratios ($[0/90]_{2n}$)

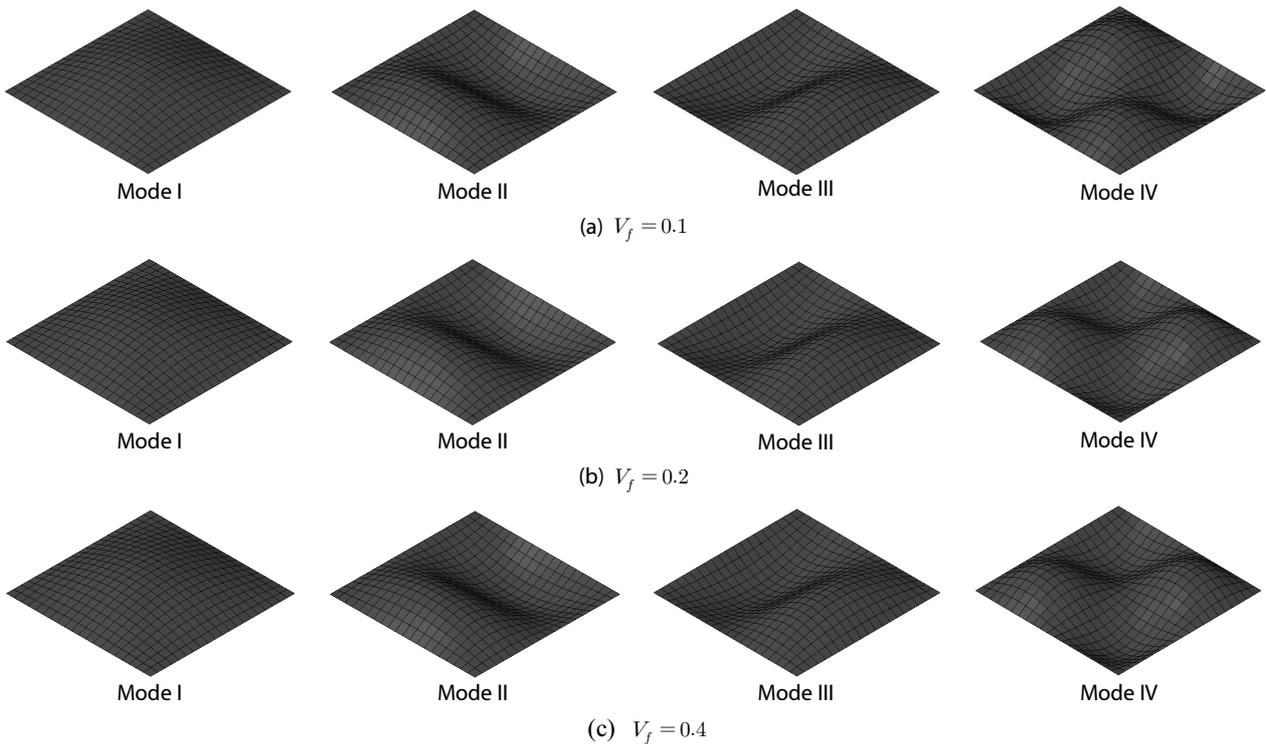


Fig. 6. Mode Shapes of Simply Supported Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions and Layup Sequences ($[0/90]_{2s}$, L/h=100)

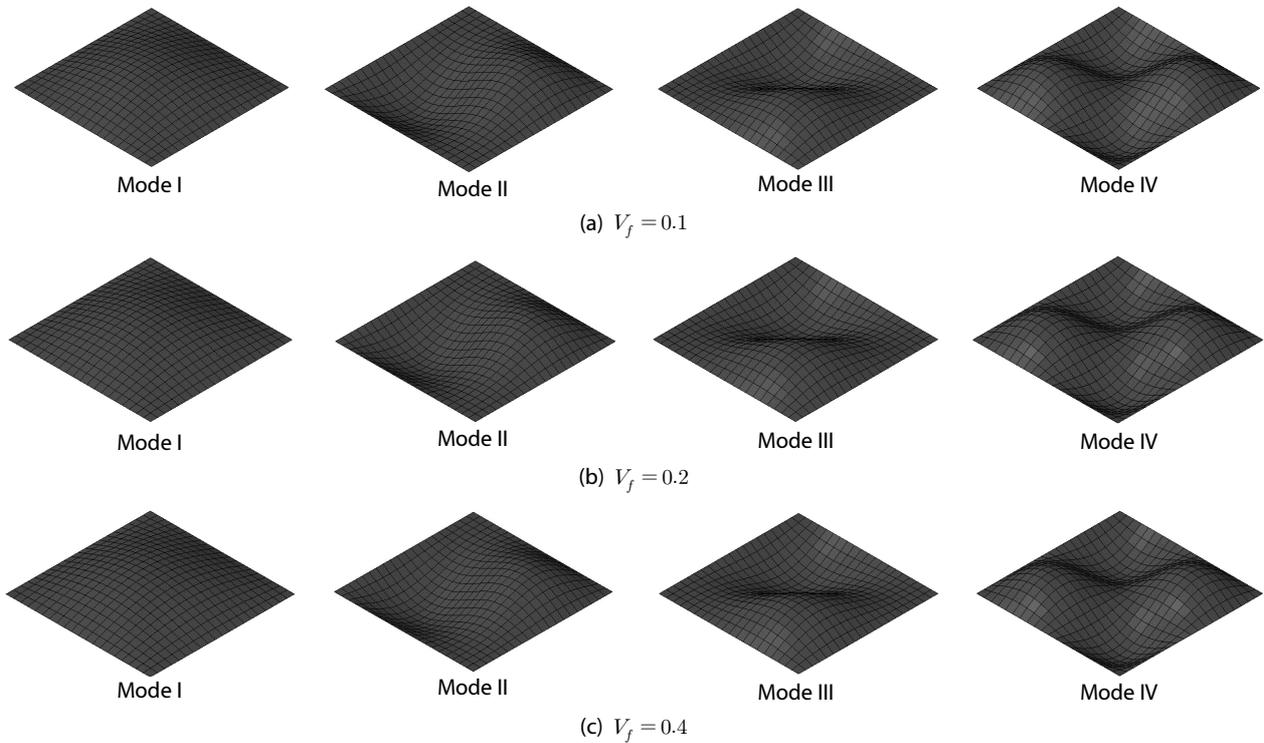


Fig. 7. Mode Shapes of Simply Supported Anti-Symmetric Laminated Composite Plates for Different Fiber-Volume Fractions and Layup Sequences ($[0/90]_{2n}$, $L/h=100$)

반면, 판의 두께가 두꺼울수록 화이버의 함침량에 따라 고유진동수는 크게 변화하고 있음을 알 수 있다.

3.5 모드 형상

Fig. 6은 대칭 적층된 판구조에 대하여 V_f 의 변화에 따른 모드형상을 비교한 것이다. 동일한 적층배열에 대하여 화이버 함침비를 변화에 따른 모드형상은 Mode IV를 제외하고는 유사한 경향을 보임을 알 수 있다. 모드형상은 첫 번째 형상이 지배적이므로 화이버 함침비의 변화가 모드 형상에 미치는 영향은 미미하다고 할 수 있다. 반면 비대칭 적층인 Fig. 7의 경우는 대칭적층과 비교하였을 때, 두 번째 모드형상부터 상이함을 알 수 있다. 이는 전술한 바와 같이, 비대칭 적층에서 발생하는 강성값 $[B]$, $[E]$ 의 영향으로 고유진동수 뿐만 아니라 모드형상에도 변화를 주고 있다. 따라서, 동일한 크로스플라이 적층배열이라도 중립축을 중심으로 대칭과 비대칭 적층배열은 복합소재 판구조의 거시적 동적 특성에 큰 영향을 준다는 것에 유의해야 한다.

4. 요약 및 결론

본 연구에서는 건설용 복합소재의 경제적 적용을 위한 목적으로

복합소재를 구성하는 재료의 상호관계가 고유진동에 미치는 영향을 멀티-스케일 해석 접근으로 규명하였다. 미시역학적으로는 화이버와 모재의 재료 물성을 각각 고려하고, 조합비율에 대한 효율적인 관계식을 적용하였으며, 거시역학적으로는 HSDT 기반된 정밀해석으로 동적특성을 분석하였다. 본 해석을 위하여 개발한 프로그램 코드는 기존 문헌과 잘 일치하였다. HSDT 기반한 수치해석 예제로부터 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- (1) 화이버의 함침량이 증가함에 따라 전체적인 강성값은 비례되어 증가되는 경향을 보이나, $V_f = 0.6 \sim 0.8$ 인 경우에는 $[a_{66}]$, $[d_{66}]$ 등의 값이 매우 크게 증가한다. 이는 화이버의 함침량이 크게 증가함에 따라, E_2 와 G_{12} 가 비선형적으로 기하급수적인 증가를 보이는 특성 때문이다.
- (2) HSDT의 고차항에 해당하는 강성값 $[E]$, $[F]$, $[H]$, $[\bar{D}]$, 및 $[\bar{F}]$ 도 화이버의 함침량 등에 따라 발생되어 동적 특성에 복합적인 영향을 줄 수 있음을 유의해야 한다.
- (3) 0° 와 90° 의 화이버 보강각도를 사용한 경우, 적층 배열 및 개수변화가 고유진동수에 미치는 영향은 미미하다. 반면, 화이버 함침비의 증가에 따라 고유진동수는 60%까지는 거의 선형으로 증가하다가 60%이상부터는 증가의 비율이 다소 감소

소한다. 이는 미시역학적으로 V_f 의 증가는 탄성론적으로 E_2 및 G_{12} 의 기하급수적 증가를 유발하여, 거시적 동적특성에도 유사한 영향을 미치지만, 대칭 적층의 경우는 $[B]$, $[E]$ 의 값이 0이 되어 고유진동수의 변화 폭이 작기 때문이다.

- (4) L/h 와 V_f 의 변화는 고유진동수에 큰 영향을 미친다. 이는 판의 두께가 얇아짐에 따라 고유진동수에 대한 화이버의 영향은 점차 감소하기 때문이다. 반면, 판의 두께가 두꺼울수록 화이버의 함침률에 따라 고유진동수는 크게 변화한다.
- (5) 동일한 적층배열의 경우 화이버 함침비율의 변화가 모드 형상에 미치는 영향은 미미한 반면, 대칭과 비대칭 적층배열에 대하여, 두 번째 모드형상부터 서로 상이하게 나타났다. 따라서, 동일한 크로스-플라이 적층배열이라도 중립축을 중심으로 대칭과 비대칭 적층배열은 복합소재 관구조의 거시적 동적 특성에 큰 영향을 준다는 것에 유의해야 한다.

본 연구의 결과로부터 미시적인 관점에서의 화이버와 모재의 최적 조합으로 거시적 동적특성을 조절하여 동적 구조성능을 만족시키는 것이 가능하다는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 최적 조합에 의하여 경제성을 확보하면서 구조적 성능을 만족하는 건설용 복합소재 구조 설계에 대한 가이드라인을 제시할 수 있을 것으로 기대된다. 그러나, 향후 더욱 다양한 매개변수에 대한 상세 분석이 필요하며, 실제 재료실험을 통한 경제적인 미시적 재료 조합 설계로부터 최적 조합에 대한 상세 연구가 지속적으로 필요할 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 국토해양부 건설기술연구사업 연구비 지원(과제번호: 12CCTI-B063597-01, 10MW급 강재 및 3MW급 복합 합성구조 풍력발전타워 설계기술 개발)과 2012년도 교육과학기술부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업입(No. 2012R1A1A1014722).

References

Bathe, K. J. (1996). "The finite element procedures in engineering analysis." *Prentice-Hall*, Englewood Cliffs, NJ.
 Goupee, A. J. and Vel, S. S. (2007). "Multi-objective optimization of functionally graded materials with temperature-dependent

material properties." *Material Design*, Vol. 28, pp. 1861-1879.
 Halpin, J. C. and Tsai, S. W. (1969). "Effects of environmental factors on composite materials." *AFML-TR-67-423*.
 Hewitt, R. L. and Malherbe, M. C. (1970). "An approximation for the longitudinal shear modulus of continuous fiber composites." *Journal of Composite Materials*, pp. 280-282.
 Ji, K. H., Paik, S. H. and Kim, S. J. (2004). "Impact analysis of composite plate by multiscale modeling." *Proc. of Composite Materials, Korean Society for Composite Materials*, pp. 67-70 (in Korean).
 Jin, K. K., Ha, S. K., Kim, J. H., Han, H. H. and Kim, S. J. (2010). "Life prediction of composite pressure vessels using multi-scale approach." *Journal of The Korea Academia-Industrial cooperation Society*, Vol. 11, No. 9, pp. 3176-3183 (in Korean).
 Jones, R. M. (1998) *Mechanics of composite materials. Taylor & Francis, PA.*
 Kruijff, N., Zhou, S., Li, Q. and Mai, Y. W. (2007). "Topological design of structures and composite materials with multiobjectives." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 7092-7109.
 Kumar, A. and Shrivastava, R. P. (2005). "Free vibration of square laminates with delamination around a central cutout using HSDT." *Composite Structures*, Vol. 70, No. 3, pp. 317-333.
 Lee, S. Y. and Chang, S. Y. (2010). "Dynamic Instability of delaminated composite structures with various geometrical shapes." *Journal of Korean Society. for Advanced Composite Structures*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-8 (in Korean).
 Lee, S. Y. and Wooh, S. C. (2004). "Finite element vibration analysis of composite box structures using the high order plate theory." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 277, pp. 801-814.
 Lee, S. Y., Noh, M. H. and Park, T. (2007). "Nonlinear shear deformation effects on the free vibration of skew concrete plates with laminated composite face plates." *Journal of the Korean Society of Civil Engineers, KSCE*, Vol. 27, No. 2-A, pp. 247-256 (in Korean).
 Singha, M. K. and Daripa, R. (2007). "Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skewplates by finite element method." *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 42, pp. 1144-1152.
 Wang, S. (1997). "Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation theory." *Computers and Structures*, Vol. 63, pp. 525-538.
 Zuo, Z. H., Huang, X., Rong, J. H. and Xie, Y. M. (2013). "Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies." *Materials and Design*, Vol. 51 pp. 1023-1034.