

## 일별 온도의 연속형 자기회귀모형 연구 - 6개 광역시를 중심으로 -

김지영<sup>1</sup> · 정기호<sup>2</sup>

<sup>1</sup>가톨릭대학교 법정경학부 경제학전공 · <sup>2</sup>경북대학교 경제통상학부

접수 2013년 12월 3일, 수정 2013년 12월 27일, 게재확정 2014년 1월 10일

### 요약

본 연구는 기후파생상품의 가격결정 연구를 위한 중간과정으로서 우리나라 일별 평균기온에 대한 연속형 시계열 모형을 추정한다. 6개 광역도시를 대상으로 1954년 1월 1일부터 2010년 12월 31일까지의 57년간 일별 기온 시계열을 추세, 계절성, 불규칙 변동으로 구분하여 분석하였다. 특히 불규칙 성분은 연속형 자기회귀모형을 적용하였다. 분석결과, (1) 57년의 비교적 장기간 온도 시계열을 적용함으로써, 우리나라 선행연구의 결과와는 다르게 추세 성분이 통계적 유의성을 갖는 것으로 나타났다. 특히 추세성분의 기울기가 양의 부호를 가짐으로써 지구온난화의 추이가 우리나라에서 진행 중임을 보였다. (2) 추세와 계절성분이 제거된 불규칙성분에 대해 단위근 검정을 적용한 결과, 6개 광역시 모두에 대해 단위근이 없는 안정적인 것으로 나타났다. (3) 불규칙 성분에 대해 연속형 모형인 CAR모형을 적용한 결과, 차수가 3인 CAR(3)가 적합한 것으로 나타났으며 이러한 결과는 국외문헌의 결과와도 일치한다. 파생상품의 가격결정에는 기초자산의 연속형 시계열 모형의 개발이 가장 중요하므로 본 연구의 결과는 기후파생상품의 가격결정 연구에 활용될 수 있을 것이다.

주요용어: 기후파생상품, 단위근, 연속형 자기회귀, 일별 평균 온도.

### 1. 머리말

지구 곳곳에서 기후변화에 따른 이상기후의 출현 빈도와 변동성이 빠르게 커져가고 있으며 이에 따른 경제적 손실 규모도 천문학적으로 증대하고 있다. 세계 각국은 이에 따라 기후변화에 대한 중장기적 대응과 단기적인 적응의 관점에서 다양한 방안들을 모색하고 있다. 우리나라는 지금까지 주로 대응에 초점을 맞추어 정책을 입안하여 왔으나, 최근 들어 기후변화에 민감한 산업들을 중심으로 적응 방안의 모색을 시작하고 있다. 그러나 주로 산업구조 조정이나 제도적 접근에만 관심이 치우쳐 있고 금융 측면에서의 적응에 해당하는 기후 리스크 관리 접근은 관심이 부족하다. 반면에 선진국은 보험과 파생상품 분야에서 기후 리스크를 관리할 수 있는 기후 상품들이 이미 거래되고 있어서, 우리나라에도 이에 대한 준비가 시기적으로 요망된다. 본 논문은 기후파생상품과 연관되어 진행되고 있는 연구의 중간 결과이다.

기후파생상품의 경우 시장을 개발하고 보급하는데 있어서 핵심은 기후파생상품의 초기 가격을 결정하는 것이다. 즉, 기후지수의 움직임을 모형화하여 지수를 예측하고 파생상품의 초기가격을 결정하는 것이다. 그러나 기후파생상품은 일반 금융파생상품과 달리 시장이 불완전하고 현물시장에서 거래되는 기

<sup>1</sup> (420-743) 경기도 부천시 원미구 지봉로 43, 가톨릭대학교 법정경학부 경제학전공, 부교수.

<sup>2</sup> 교신저자: (702-701) 대구광역시 북구 산격동, 경북대학교 경제통상학부, 교수.

E-mail: khjeong@knu.ac.kr

초자산이 없기 때문에 기존의 금융파생상품 가격결정에 보편적으로 적용되는 블랙숄즈모형을 활용할 수 없다. 따라서 가격결정을 위한 모형개발이 별도로 필요하며 이러한 기후파생상품 가격결정 모형의 핵심은 기후의 시간적 변동을 정확히 설명할 수 있는 모형의 도출이다. 본 논문의 초점은 우리나라 일별 기온의 시계열모형을 도출하는 데에 있다.

기온변동 모형의 선행연구들은 크게 이산형 시계열모형 접근과 연속형 시계열모형 접근의 두 가지 유형으로 구분된다. 이산형 접근의 경우, Cao와 Wei (2000)는 아틀란타 등 5개 미국 도시의 20년간 일별 기온 자료에 AR모형을 적용하였으며, Campbell과 Diebold (2002)는 AR (autoregressive model)모형을 확장하여 절단 푸리에 급수 (truncated Fourier Series)를 적용하였다. Syroka와 Toumi (2001)는 기온의 자기상관함수 (autocorrelation function; ACF)가 멱함수적으로 0으로 수렴함을 보였고, Caballero 등 (2002)도 유사하게 장기 기온시계열의 경우 ARMA (autoregressive moving average model)모형과 ARFIMA (autoregressive fractionally integrated moving average model)모형을 동시에 사용할 것을 제안하였다. 한편 연속형 접근의 경우에는, 기온이 특정범위 내에서 평균으로 회귀하는 특성에 착안하여 주식보다는 단기 이자율 분석에 적용되는 금융 확산모형 (Hull과 White, 1990)이 주로 적용되어 왔다. Dischel (1998a), Dornier와 Queruel (2000), Alaton (2002)은 확산모형의 임의충격 항에 대해 정규분포를 가정한 반면에 Dischel (1998b), Benth와 Saltyte (2005a), Benth (2007)는 비정규분포를 가정하였다. 국내에서는 Kim과 Kim (1992), Lee (2002), Kim과 Kim (2004), Bae와 Jeong (2009) 등이 기온변동에 대한 시계열모형을 연구하였다. Kim과 Kim (1992)와 Kim과 Kim (2004)은 이산형 모형을 고려한 반면에 Lee (2002), Bae와 Jeong (2009)는 평균회귀과정의 Vasicek모형과 브라운운동의 연속형 모형을 각각 고려하였다. 6개 광역시 기온의 가중 평균을 고려한 Kim과 Kim (2004)를 제외하고, 이들 국내 선행연구들은 서울의 기온자료에 초점을 맞추어 분석하였으며, 30년 내지 40년 기간의 시계열자료를 이용하였는데 지구온난화에 따른 추세적 기온상승이 통계적 유의성을 갖지 못하는 것으로 나타났다.

본 연구는 일별 기온지수에 기초한 기후파생상품 가격결정을 위한 기초 연구로서 우리나라 일별 기온지수에 대한 연속형 시계열 모형을 추정하고자 한다. 파생상품 가격결정을 위한 기초상품의 시계열 모형은 연속형 시계열 모형이어야 하기 때문이다. 구체적으로는 우리나라 6개 광역도시를 중심으로 기온 시계열을 추세, 계절성, 불규칙 변동의 3개 부분으로 구분하며 특히 기온의 불규칙성은 연속형 자기회귀 (continuous-time autoregression; CAR)모형을 적용하여 분석한다. 금융파생상품을 포함하여 파생상품의 기초상품에 대한 기존의 연속형 시계열모형 연구는 3개의 모수가 확률과정을 결정하는 CEV (constant elasticity volatility)모형을 주로 활용하고 있다 (Chan 등, 1992). 이 3개 모수들 중에서 1개 내지 3개의 모수를 특정한 상수값으로 고정시키면 기존에 사용되는 대부분의 확률과정 모형이 도출될 수 있다. 그러나 CEV모형은 3개의 모수만으로 확률과정 형태를 결정하기 때문에 다양한 시계열과정을 포함할 수 없는 단점이 있다. CAR모형은 모형의 차수를 유연하게 결정함으로써 3개의 모수만으로는 다룰 수 없는 다양한 확률과정을 모형화할 수 있으며 또한 기존의 이산형 AR (autoregressive model)의 추정과정을 이용할 수 있다는 장점을 갖는다. 참고로 Hull과 White (1990)이 제시한 연속형 모형도 CEV모형이 갖는 3개 모수의 단점을 극복하였지만 모형의 구축과정이 2단계에 걸쳐 매우 복잡한 과정을 거쳐야만 하는 단점을 갖는다 (Hull과 White, 1996). CAR모형은 최근 해외문헌에서 기후파생상품의 가격결정과 관련하여 일별 기온지수에 대해 활발하게 적용되고 있다 (Benth 등, 2007; Härdle와 Osipenko, 2011; Härdle와 Cabrera, 2012). 기온 시계열에 대한 CAR모형의 적용은 국내에서는 처음으로 시도되는 것이다. 한편 선행연구들에 비해 비교적 장기의 시계열 자료를 분석함으로써 선행연구들에서는 통계적 유의성이 없는 것으로 나왔던 추세 성분의 통계적 유의성 여부를 재검토하려고 한다.

이후 본 연구의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 본 연구에서 고려하는 기온지수의 확률모형을 추세와 계절성분 그리고 불규칙성분으로 구분하여 논의한다. 3절에서는 2절서 논의된 모형을 실제 자료를 이용

하여 추정한다. 마지막으로 4절에서는 연구결과를 요약하고 결론을 제시한다.

## 2. 기온지수 확률모형

### 2.1. 추세 및 계절성 성분의 모형

$T_t$ 를  $t$ 일의 일별 평균기온 (daily average temperature; DAT)의 이산형 시계열로 표기할 때 아래와 같이 구성성분들로 분해하여 나타낼 수 있다.

$$T_t = X_t + \Lambda_t \quad (2.1)$$

단,  $X_t$  : 불규칙 성분 (irregularpart)

$\Lambda_t$  : 추세 + 계절성 (trend + seasonality)

$\Lambda_t$ 의 계절성 성분에 대해서는 주기성을 고려하여 아래와 같이 sine함수를 기본으로 하는 모형을 적용할 수 있다.

$$\Lambda_t = \sin(\omega t + \phi) \quad (2.2)$$

식 (2.2)는 1년의 주기가 365일이므로  $\omega$ 의 값은  $\frac{2\pi}{365}$ 이며 매년 1월1일의 기온이 최저가 아니므로 sine함수를 시간 축에서 평행 이동시키는 모수로서  $\phi$ 를 도입한 형태이다.

$\Lambda_t$ 의 추세 성분으로서 지구 온난화 현상에 따른 기온의 상승 추세를까지 고려하면, 전체  $\Lambda_t$ 는 다음의 식(2.3)으로 나타낼 수 있다 (Alaton 등, 2002).

$$\Lambda_t = \beta_1 + \beta_2 t + M \sin(\omega t + \phi) \quad (2.3)$$

여기서  $M$ 은 시계열에서 계절성 성분의 계수이다. 식 (2.3)의 계수들의 추정은 다음 식(2.4)를 추정함으로써 이루어진다.

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(\omega t) + \beta_4 \cos(\omega t) \\ &= \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin\left(\frac{2\pi}{365}t\right) + \beta_4 \cos\left(\frac{2\pi}{365}t\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

식 (2.3)과 식 (2.4)의 계수들의 관계는 다음의 일련의 수학적 관계를 통해 설정된다.

$$M \sin(\omega t + \phi) = M \cos(\phi) \sin(\omega t) + M \sin(\phi) \cos(\omega t)$$

$\beta_3 = M \cos(\phi)$ ,  $\beta_4 = M \sin(\phi)$ 로 표기하면,

$$\begin{aligned} \beta_3^2 + \beta_4^2 &= M^2(\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2) \\ &= M^2 \end{aligned}$$

이므로

$$M = \sqrt{\beta_3^2 + \beta_4^2}$$

가 된다.

## 2.2. 불규칙 성분의 CAR( $p$ ) 모형

본 연구는 이산형 AR( $p$ )모형의 연속형에 해당하는 CAR( $p$ ) 모형 (continuous-time autoregressive model)을 식(2.1)의 불규칙 성분  $X_t$ 에 대해 적용한다. CAR( $p$ )모형은 Phillips (1959)에 의해 처음으로 연구되었고 기후과생상품에 대해서는 Benth 등 (2007)에 의해 적용된 바 있다. CAR( $p$ )모형은 다음과 같이 식(2.5)와 식(2.6)으로 표현되는 벡터 Ornstein-Uhlenbeck 식을 따르는  $p$ 차원 실수공간에서의 확률과정으로 정의된다 (Benth 등, 2007).

$$dX(t) = AX(t)dt + e_p\sigma(t)dB(t) \quad (2.5)$$

여기서  $X(t)$ 는 연속시간형  $p$ 차 벡터 확률변수,  $e_p$ 는 1로 구성된  $p$ 차 벡터,  $B(t)$ 는 브라운운동 확률변수이며,  $A$ 는 아래와 같이 정의되는  $p \times p$ 행렬이다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Gillespie (1996)은 식(2.5)의 확률미분방정식의 해가 다음과 같음을 보였다.

$$X(s) = \exp\{A(s-t)x\} + \int_t^s \exp\{A(s-u)\} e_p\sigma(u)dB(u) \quad (2.7)$$

$X(t)$ 의 정상성은 행렬  $A$ 의 고유근이 모두 음의 실수 부분을 가지면 보장된다 (Ichihara와 Kunita, 1974).

Phillips (1959)는 CAR( $p$ ) 모형의 추정을 위해 이산형 AR( $p$ )모형을 먼저 추정하고 두 모형 사이의 근사적 관계를 이용하여 CAR모형의 모수를 추정하는 방법을 제시하였다. 구체적으로는  $p$ 차 벡터 확률변수인  $X(t)$ 의 첫 번째 항인  $X_1(t)$ 이 이산형과의 근사적 관계에 이용된다. 본 연구도 Phillips 방법을 따르며, 구체적인 과정은 Härdle와 Osipenko (2011)과 Benth 등 (2007)에서 제시된 근사적 관계식을 채택한다. 아래에서  $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_p$ 는 AR( $p$ )모형의 계수이며  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 는 CAR( $p$ )모형의 계수이다.

$$\text{CAR(1) 모형: } X_1(t) = \tilde{\alpha}_1 X_1(t-1) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\approx (1 - \alpha_1)X_1(t-1) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\text{CAR(2) 모형: } X_1(t) = \tilde{\alpha}_1 X_1(t-1) + \tilde{\alpha}_2 X_1(t-2) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\approx (2 - \alpha_1)X_1(t-1) + (\alpha_1 - \alpha_2 - 1)X_1(t-2) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\text{CAR(3) 모형: } X_1(t) = \tilde{\alpha}_1 X_1(t-1) + \tilde{\alpha}_2 X_1(t-2) + \tilde{\alpha}_3 X_1(t-3) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\approx (3 - \alpha_1)X_1(t-1) + (2\alpha_1 - \alpha_2 - 3)X_1(t-2)$$

$$+ (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1)X_1(t-3) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\text{CAR(4)모형: } X_1(t) = \tilde{\alpha}_1 X_1(t-1) + \tilde{\alpha}_2 X_1(t-2) + \dots + \tilde{\alpha}_4 X_1(t-4) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

$$\approx (4 - \alpha_1)X_1(t-1) + (3\alpha_1 - \alpha_2 - 6)X_1(t-2)$$

$$+ (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - 3)X_1(t-3)$$

$$+ (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - 1)X_1(t-4) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

선형연구들 (Benth 등, 2007; Härdle와 Osipenko, 2011; Härdle와 Cabrera, 2012)에서 일별 기온에 대한 CAR모형의 차수는 대체로 3 내외의 값을 갖는 것으로 나타나므로 일반적인 응용을 위해서는 위의 근사적 관계식으로 충분할 것이다. 따라서 만약 일별 온도에 대해 CAR(3)모형이 식별되었다면, 먼저 이산형 AR(3)모형을 이용하여  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ 의 값을 추정하고 아래와 같은 연립방정식을 이용하여 CAR(3)의 계수인  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 를 최종적으로 추정할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\alpha}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 3. 경험적 분석

#### 3.1. 자료 설명 및 기초 분석

일별 평균기온은 기온측정일의 기상청이 측정한 기온평균값이다. 한국전쟁이후 기온데이터가 정확히 측정되었으므로 1954년 1월 1일부터 2010년 12월 31일까지의 57년간의 일별 평균기온을 분석대상으로 한다. 다만 6개 광역시 중에서 대전은 1969년부터 일별 기온데이터가 측정되었으므로 분석기간이 1969년 1월 1일부터 2010년 12월 31일까지 42년간으로 하였다.

Figure 3.1은 서울과 대구를 대표적으로 선택하여 일정기간의 일별 평균기온을 그림으로 나타낸 것이다. 선형추세는 미미하게 나타나 추가 확인이 필요하지만 계절적인 주기성은 뚜렷하게 나타나고 있다.

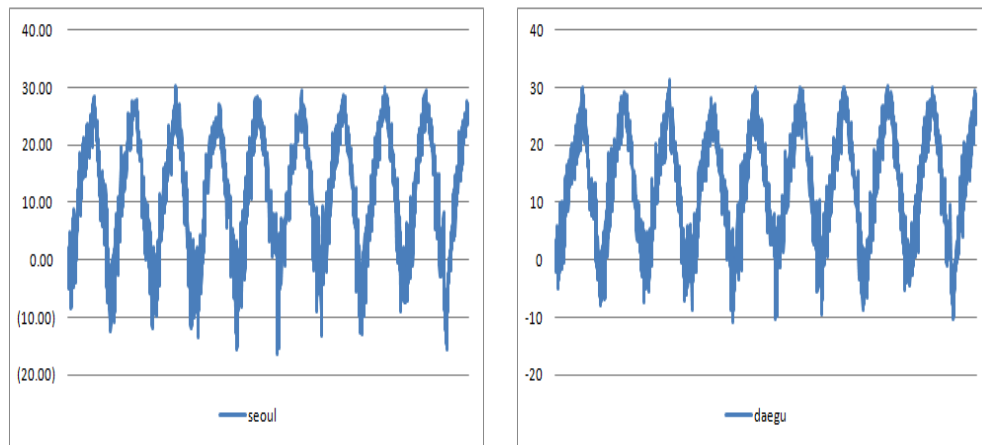


Figure 3.1 Daily temperature in Seoul and Daegu (°C)

Figure 3.2는 6개 도시에 대해 일별 평균기온의 확률밀도함수를 비모수 커널방법으로 추정하여 그림으로 나타낸 것이다. 사용된 커널함수는 Epanechnikov이며 평활모수의 결정에는 분포가 정규분포임을 가정하고 Silverman's rule (Campbell과 Diebold, 2005)을 따라  $h = 0.9\hat{\sigma}T^{-0.2}$ 이 사용되었다. 그림에서는 모든 도시에서 5도 내외와 23도 내외에서 각각 쌍봉을 갖는 형태를 나타내고 있다.

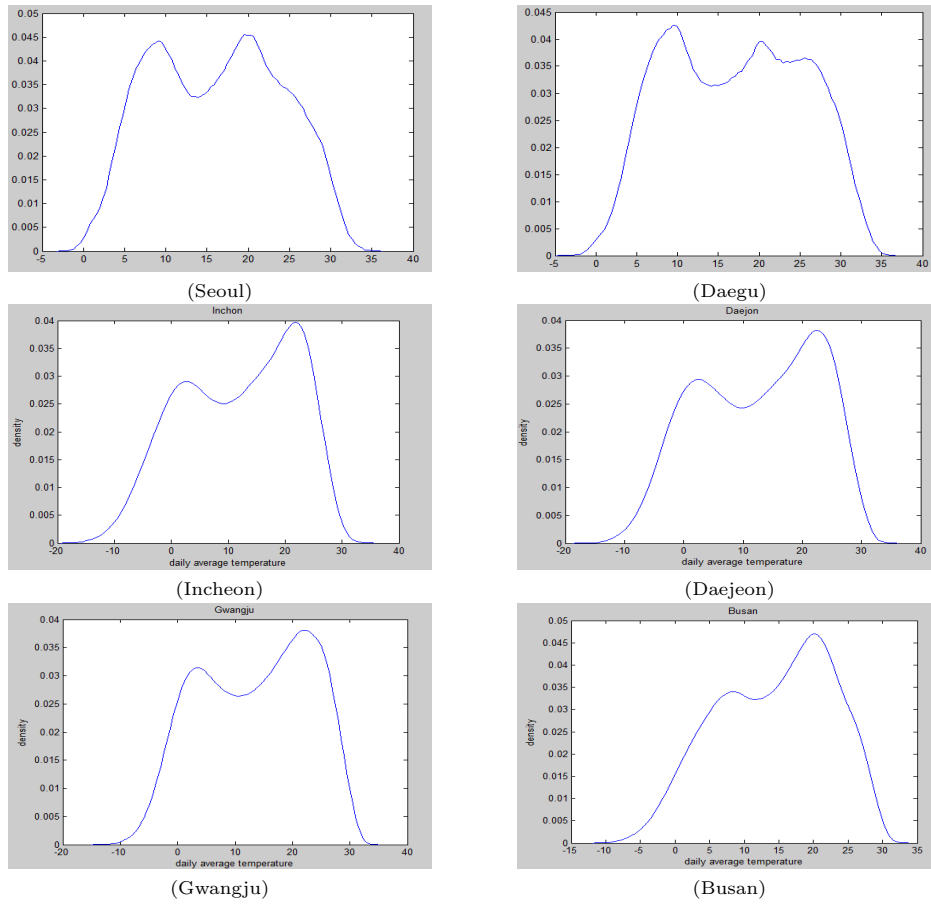


Figure 3.2 Kernel estimate of probability density function of daily temperature in 6 metropolitan cities

3.2. 추세 및 계절성 성분의 추정

식(2.4)의 추세와 계절성 성분을 비선형최소자승법을 이용하여 추정한 결과는 Table 3.1에 주어져 있다.

**Table 3.1** Estimates of coefficients of  $\Lambda_t$

	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$R^2$
Seoul	11.2240 *** (0.0468)	0.0001 *** (0.0000)	-4.9813 *** (0.0331)	-13.0158 *** (0.0331)	0.8952
Incheon	10.8807 *** (0.0433)	0.0001 *** (0.0000)	-5.4926 *** ( 0.0306 )	-12.2018 *** (0.0306)	0.9021
Daejeon	11.6826 *** (0.0492)	0.0001 *** (0.0001)	-4.5291 *** (0.0348)	-12.7413 *** (0.0348)	0.9082
Daegu	12.5598 *** (0.0420)	0.0001 *** ( 0.0000)	-4.4301 *** (0.0297)	-12.1315 *** (0.0297)	0.9014
Gwangju	12.8502 *** (0.0404)	0.0001 *** (0.0000)	-4.6483 *** ( 0.0286)	-11.8754 *** (0.0286)	0.9056
Busan	12.8531 *** (0.0404)	0.0001 *** (0.0000)	-4.6481 *** ( 0.0285)	-11.8742 *** (0.0286)	0.9056

\* Numbers in parentheses are standard deviations.  
 \* \*\*\* denote significance levels of 1%.

모형은 1% 유의수준에서 설명력이 있는 것으로 나타났으며, 계수들도 모두 통계적으로 유의성을 갖는 것으로 나타났다. 특히 추세성분의 기울기를 나타내는  $\beta_2$ 는 모든 도시에서 크기는 매우 작지만 양의 값으로 추정되었고 1% 유의수준에서 통계적 유의성을 갖는 것으로 나타나서, 우리나라 주요 도시들에서 온난화 추세가 존재함을 보여준다. 이것은 지금까지 30~40년 기간의 일별 온도에 대해 시계열모형을 적용한 국내 연구결과 (Kim 등, 2004)에서 추세성분이 통계적인 유의성을 갖지 못한 것으로 나타났던 것과는 다른 결과이다.

### 3.3. 단위근 검정

CAR모형을 이산형 AR모형으로 근사시키기 위해서는 먼저 이산형 AR모형 추정에 사용되는 시계열의 안정성을 검정할 필요가 있다. 본 절에서는 시계열의 안정성 여부를 판단하기 위해 ADF (Augmented Dickey-Fuller) 검정을 실시한다.

$$\Delta x_t = \alpha + \beta t + \gamma x_{t-1} + \delta_1 \Delta x_{t-1} + \dots + \delta_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \epsilon_t \quad (3.1)$$

ADF 검정에서는 위 회귀식에서 시차변수의 계수인  $\gamma$ 가 0인지 여부를 통해 단위근 존재를 결정하며, 절편과 추세항의 포함 여부에 따라 세 가지 경우로 구분하여 고려한다.

**Table 3.2** Three models for testing unit-root

Model	Specification	Parameters
Model 1	no intercept and no trend	$\alpha = 0, \beta = 0$
Model 2	only intercept	$\alpha \neq 0, \beta = 0$
Model 3	both intercept and trend	$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

**Table 3.3** Unit-root test results

	ADF statistics		
	Model 1	Model 2	Model 3
significance levels of 5%	-1.94	-2.86	-3.41
Seoul	-5.7553	-9.1461	-9.4016
Incheon	-9.0329	-15.1703	-15.1862
Daejeon	-7.0815	-11.9986	-12.0021
Daegu	-8.1684	-14.9488	-14.9742
Gwanju	-8.0460	-15.1062	-15.1165
Busan	-6.2573	-13.9540	-13.9629

분석결과 모든 지역에서 5% 유의수준에서 자료가 단위근을 가진다는 가설을 기각하여 안정적이라는 결론을 내릴 수 있다.

### 3.4. CAR모형의 식별과 추정

Table 3.4는 서울과 대구의 두 광역시에 대해서 계절성이 제거된 일별 평균기온 데이터의 자기상관함수 (autocorrelation function; ACF)와 편자기상관함수 (partial autocorrelation function; PACF)를 보여주고 있다. 두 함수의 패턴을 보면 외국 문헌에서 주로 채택되는 AR(3)모형이 우리나라에서도 역시 적용될 수 있는 것을 알 수 있으며 논문에서는 제시되지 않지만 나머지 네 개의 광역시에서도 동일한 결과를 보이고 있다.

**Table 3.4** ACF and PACF of daily temperatures in Seoul (above) and Daegu (bottom)

ACF		PACF		ACF	PACF	Q-Stat	Prob	
*****		*****		1	0.646	0.646	1372.2	0.00
***		*		2	0.39	-0.047	1872.6	0.00
**		*		3	0.299	0.112	2166.5	0.00
**				4	0.271	0.074	2408	0.00
**				5	0.233	0.023	2587.4	0.00
*				6	0.205	0.04	2726.3	0.00
*				7	0.184	0.024	2837.9	0.00
*				8	0.164	0.016	2926.3	0.00
*				9	0.157	0.034	3007.3	0.00
*				10	0.147	0.014	3078.2	0.00

ACF		PACF		ACF	PACF	Q-Stat	Prob	
*****		*****		1	0.753	0.753	11812.	0.00
****		**		2	0.469	-0.228	16392.	0.00
**		*		3	0.316	0.130	18465.	0.00
**				4	0.243	0.018	19698.	0.00
**				5	0.210	0.048	20614.	0.00
*				6	0.191	0.029	21373.	0.00
*				7	0.175	0.023	22008.	0.00
*				8	0.166	0.038	22581.	0.00
*				9	0.162	0.028	23131.	0.00
*				10	0.158	0.022	23648.	0.00

AR모형 차수 결정에 대해 AIC (Akaike information criterion)와 SIC (Schwartz information criterion)를 적용하면, 6개 도시에 대해 AR(3)이나 AR(4)가 최적 모형으로 제시되고 있다.

**Table 3.5** AICs and SICs of AR models

		AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Seoul	AIC	4.4814	4.4301	4.4145	4.4145
	SIC	4.4833	4.4338	4.4202	4.4219
Incheon	AIC	4.3193	4.2805	4.2610	4.2602
	SIC	4.3194	4.2813	4.2621	4.2618
Daegjeon	AIC	4.3094	4.2863	4.2691	4.2688
	SIC	4.3099	4.2873	4.2707	4.2708
Daegu	AIC	4.3982	4.3896	4.3577	4.3496
	SIC	4.4000	4.3933	4.3632	4.3571
Gwangju	AIC	4.1536	4.1068	4.0956	4.0950
	SIC	4.1540	4.1075	4.0968	4.0965
Busan	AIC	4.1890	4.1457	4.1279	4.1271
	SIC	4.1894	4.1465	4.1290	4.1287

최종적인 모형 차수의 결정을 위해, 각 도시별로 실제 CDD지수 (actual index)와 각 AR모형에 의해 추정된 CDD지수 (simulated index)의 상대오차를 계산하여 최소화하는 차수(p)를 선택한다. 57년간 자료로 분석한 6개 도시의 누적CDD지수의 실제지수와 추정지수간의 상대오차를 비교해본 결과 모든 도시에서 AR(4)보다는 AR(3)가 적합한 것으로 나타났다. 이러한 결과는 외국문헌에서 AR(3)가 주로 채택되는 것과 일치한다.



**Table 3.6** Comparing relative errors between actual values and estimates of cumulative CDD index

City	Cumulative CDD index			Relative Error	
	actual	estimate		AR(3)	AR(4)
Seoul	38,809	45,115	138,360	16.25	206.68
Incheon	33,037	45,948	115,970	39.08	152.39
Daejeon	29,387	29,944	107,950	1.90	260.51
Daegu	45,065	52,688	169,470	16.92	221.65
Gwanju	43,377	48,877	212,630	12.68	335.03
Busan	37,888	47,583	155,350	25.59	226.48

AR(3)모형은 다음과 같으며

$$X_{t+3} = \tilde{\alpha}_1 X_{t+2} + \tilde{\alpha}_2 X_{t+1} + \tilde{\alpha}_3 X_t + \sigma_t \epsilon_t \tag{3.2}$$

6개 광역시에 대해 추정된 결과는 아래 표와 같다.

**Table 3.7** Estimated results of AR(3) model in Seoul and Daegu

- Seoul -				
parameter	estimate	standard error	t	p-value
$\tilde{\alpha}_1$	0.955874	0.006875	139.0437	0.0000
$\tilde{\alpha}_2$	-0.349618	0.009236	-37.85183	0.0000
$\tilde{\alpha}_3$	0.131057	0.006875	19.06229	0.0000
R <sup>2</sup>	0.597716			
Durbin-Watson statistics (DW)	2.004731			
* model : Seoul <sub>t</sub> = $\tilde{\alpha}_1$ Seoul <sub>t-1</sub> + $\tilde{\alpha}_2$ Seoul <sub>t-2</sub> + $\tilde{\alpha}_3$ Seoul <sub>t-3</sub> + $\epsilon_t$				
- Daegu -				
parameter	estimate	standard error	t	p-value
$\tilde{\alpha}_1$	1.042401	0.006759	154.2287	0.0000
$\tilde{\alpha}_2$	-0.272753	0.009713	-28.08006	0.0000
$\tilde{\alpha}_3$	0.223507	0.006759	33.06997	0.0000
R <sup>2</sup>	0.953896			
Durbin-Watson statistics (DW)	2.053888			
* model : Daegu <sub>t</sub> = $\tilde{\alpha}_1$ Daegu <sub>t-1</sub> + $\tilde{\alpha}_2$ Daegu <sub>t-2</sub> + $\tilde{\alpha}_3$ Daegu <sub>t-3</sub> + $\epsilon_t$				

**Table 3.8** Estimates of AR(3) model in 6 cities

	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_3$	R <sup>2</sup>	DW
Seoul	0.9559 *** (0.0069)	-0.3496 *** (0.0092)	0.1311 *** (0.0069)	0.5977	2.0047
Incheon	0.9128 (0.0069)	-0.3191 (0.0091)	0.1395 (0.0069)	0.5741	2.0079
Daejeon	0.8944 (0.0080)	-0.2653 (0.0106)	0.1308 (0.0080)	0.5793	2.0053
Daegu	1.0424 (0.0068)	-0.2728 (0.0097)	0.2235 (0.0068)	0.9539	2.0539
Gwangju	0.9324 (0.0069)	-0.3106 (0.0092)	0.1058 (0.0069)	0.5858	2.0058
Busan	0.9347 (0.0069)	-0.3271 (0.0092)	0.1334 (0.0069)	0.5915	2.0077

\* Numbers in parentheses are standard errors.  
 \* \*\*\* denote significance levels of 1%.

계수  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ 의 추정값을 아래의 식 (3.3)에 적용하면 CAR(3)의 계수인  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 를 계산할 수 있다. 서울의 경우를 예로 들면  $\alpha_1 = -2.0442$ ,  $\alpha_2 = -1.4380$ ,  $\alpha_3 = -0.2627$ 가 계산된다.

$$\begin{aligned} \text{AR(3)모형} : X_1(t) &= \tilde{\alpha}_1 X_1(t-1) + \tilde{\alpha}_2 X_1(t-2) + \tilde{\alpha}_3 X_1(t-3) + \sigma_t \epsilon_t \\ &\approx (3 - \alpha_1) X_1(t-1) + (2\alpha_1 - \alpha_2 - 3) X_1(t-2) \\ &\quad + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 1) X_1(t-3) + \sigma(t) \epsilon(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

CAR(3)모형의 정상성 여부는 행렬  $A$ 의 고유근이 모두 음의 실수 부분을 가지는지 여부로 판정된다 (Ichihara와 Kunita, 1974). 이 사실을 이용하면 고유근이 모두 음의 실수를 가질 때까지 차수  $p$ 를 최대한 증가시킴으로써 안정적인 CAR모형의 차수 ( $p$ )를 확인하는 방법도 고려할 수 있다.

위의 과정을 6개 도시 전체에 적용한 결과는 아래의 표와 같다. CAR(3)모형에서 행렬  $A$ 의 고유근이 모두 음의 실수 부분을 갖기 때문에 정상적임을 알 수 있다. 또한 행렬  $A$ 의 고유근이 모두 음의 실수 부분을 갖는  $p$ 의 최대값도 역시 3인 것으로 나타나서 우리나라 6개 광역시의 일별 평균온도 시계열에 대해 CAR(3)모형이 적절한 것으로 확인되었다.

**Table 3.9** Parameters of CAR(3) model in 6 cities ( $p=3$ )

city	CAR			eigen value ( $\lambda_1, \lambda_2$ )		
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	max. of $p$
Seoul	2.0442	1.4380	0.2627	-0.2769	-0.8836	3
Incheon	2.0871	1.4934	0.2667	-0.2632	-0.9120	3
Daejeon	2.1056	1.4764	0.2401	-0.2296	-0.9380	3
Daegu	2.0573	1.3760	0.1388	-0.1217	-0.9678	3
Gwangju	2.0676	1.4459	0.2724	-0.2952	-0.8862	3
Busan	2.0653	1.4577	0.2590	-0.2635	-0.9009	3

#### 4. 결론

본 논문은 일별 기온지수에 기초한 기후파생상품 가격결정을 위한 기초 연구로서 우리나라 6개 광역시의 일별 기온지수에 대해 연속형 시계열 모형을 추정하였다. 연속형 모형으로서는, 최근 해외문헌에서 기후파생상품의 가격결정과 관련하여 일별 기온지수에 대해 활발하게 적용되고 있는 CAR모형을 적용하였다. 구체적으로는 일평균기온 시계열을 추세, 계절성, 불규칙 변동의 3개 부분으로 구분하며 이 중에서 불규칙성분은 CAR모형을 적용하여 추정하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 57년 (1954.1.1 ~ 2010.12.31)의 비교적 장기간 온도 시계열을 적용한 결과, 우리나라 선행연구의 결과와는 다르게 추세 성분이 통계적 유의성을 갖는 것으로 나타났다. 특히 추세성분의 기울기가 양의 부호를 가짐으로써 지구온난화의 추이가 우리나라에서 진행 중임을 보였다. 둘째, 추세와 계절성분이 제거된 불규칙성분에 대해 단위근 검정을 적용한 결과, 6개 광역시 모두에 대해 단위근이 없는 안정적인 것으로 나타났다. 셋째, 불규칙 성분에 대해 이산형 모형인 AR모형을 적용한 결과, 차수가 3인 AR(3)가 적합한 것으로 나타났으며 이러한 결과는 국외문헌의 결과와도 일치한다. 넷째 CAR모형의 경우 벡터 Ornstein Uhlenbeck 확산모형에서 행렬  $A$ 의 고유치 (eigenvalue)가 모두 음의 실수를 가져야 안정적이므로, 차수  $p$ 값을 점점 확대하다가 고유치가 양의 실수가 되기 직전의 차수를 적정차수로 결정하는 접근법을 고려할 수 있는데 이러한 접근법에서도 역시 3의 차수가 적정차수인 것으로 나타났다.

본 연구는 우리나라에 기후파생상품 시장이 구축될 경우의 전초작업으로서 기초자산이 되는 광역시들의 기온지수에 대한 연속형 시계열 모형화를 시도했다는 것에 의미가 있다. 파생상품 가격결정에서 기초자산의 연속형 시계열모형의 개발이 가장 중요한 역할을 하기 때문에, 본 연구의 결과는 향후 진행될

기후 위험의 시장가치 (market price of risk; MPR)의 추정을 통한 기후파생상품의 가격결정 연구에서 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 선행 연구 (Benth 등, 2009)에서 아시아의 기후파생상품 분석을 시도한 적은 있으나 아직 우리나라를 대상으로 연구된 것은 없기 때문에 우리나라의 기온특성을 반영한 모형 구축에 기초를 마련했다는 점이 본 연구의 기여이다.

한편 향후 연구주제로서 여러 분야에서 좋은 예측력을 갖는 것으로 밝혀진 서포트벡터기계 (support vector machine; Shim과 Lee, 2009; Choi와 Lim, 2013; Shim과 Hwang, 2013)를 기온지수 시계열에 적용하는 것을 고려할 수 있다. 다만 이러한 접근은 기온지수에 대한 예측력을 개선할 수 있는 가능성은 있지만, 추정결과를 기후 파생상품의 가격결정으로 연결하기 위해서는 복잡한 확률미분방정식을 풀어야 하는 난점 때문에 쉽게 기후파생상품 가격결정에 활용할 수 없는 한계가 있다.

또 다른 연구주제로서 모형구축과 추정과정이 복잡한 Hull과 White (1990)의 모형을 기온지수에 적용하고 이를 기초로 기후 파생상품의 가격결정으로 연결하는 것을 고려할 수 있다. 해외문헌에서도 이러한 연구는 아직 시도되지 않았기 때문에 CAR모형에 기초한 연구결과와 비교하는 연구는 매우 흥미로울 것으로 기대된다.

본 연구는 6대 광역도시를 대상으로 진행했지만 프랙탈 차원을 이용해 지리적으로 기후관측소 구성의 균형을 높이는 관측후보지점을 선정하는 연구를 참고하여 관측 도시선정 기준을 정교화할 필요도 있다 (Kim과 Lee, 2013).

## References

- Alaton, P., Djehiche, B. and Stillberger, D. (2002). On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, **9**, 1-20.
- Bae, G. and Jeong, J. (2009). Model of pricing weather derivatives. *Korean Journal of Futures and Options*, **17**, 49-66.
- Benth, F. S. and Šaltytė-Benth, J. (2005a). Stochastic modelling of temperature variations with a view towards weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, **12**, 53-85.
- Benth, F. E. (2007). Putting a price on temperature derivatives. *Scandinavian Journal of Statistics*, **34**, 746-767.
- Benth, F. E., Šaltytė-Benth, J. and Janlinskas, P. (2007). A spiral temporal model for temperature with seasonal variance. *Journal of Applied Statistics*, **34**, 823-841.
- Caballero, R., Jewson, S. and A. Brix, A. (2002). Long memory in surface air temperature detection, modeling and application to weather derivative valuation. *Climate Research*, **21**, 127-140.
- Campbell, S. and Diebold, F. (2002). *Weather forecasting for weather derivatives*, Working paper, Rodney White Center for Financial Research, University of Pennsylvania, U.S.A.
- Campbell, S. and Diebold, F. (2005). Weather forecasting for weather derivatives. *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 6-16.
- Cao, M. and Wei, J. (2000). *Equilibrium valuation of weather derivatives*, Working paper, University of Toronto.
- Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F. and Sanders, B. (1992). An empirical comparison of alternative models of short-term interest rate. *Journal of Finance*, **47**, 1209-1228.
- Choi, H. and Lim, D. (2013). Bankruptcy prediction using ensemble svm model. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 113-1125.
- Dischel, B. (1998a). Black-Scholes won't do. *Energy and Power Risk Management*, 8-9.
- Dischel, B. (1998b). At last: A model for weather risk. *Energy and Power Risk Management*, 20-21.
- Dornier, F. and Queruel, M. (2000). Caution to the wind, weather risk special report. *Energy and Power Risk Management Risk Magazine*, 30-32.
- Gillespie, D. (1996). Exact numerical simulation of the Orstein-Uhlenbeck process and its integral. *Physical Review*, **54**, 2084-2091.
- Härdle, W. and Osipenko, M. (2011). Spatial risk premium on weather derivatives and hedging weather exposure in electricity. *The Energy Journal*, **33**, 149-170.

- Härdle, W. and Cabrera, B. L. (2012). Implied market price of weather risk. *Applied Mathematical Finance*, **19**, 59-95.
- Hull, J. and White, A. (1990). Pricing interest-rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, **3**, 573-592.
- Hull, J. and White, A. (1996). Using Hull-White interest rate trees. *Journal of Derivatives*, **3**, 26-36.
- Ichihara, K. and Kunita, H. (1974). A classification of the second order degenerate elliptic operators and its probabilistic characterization. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **30**, 235-254.
- Kim, M. and Kim, J. (2004). Study on pricing weather option. *Korea Financial Engineering Society*, 1-26.
- Kim, H. and Kim, T. (1992). Stochastic model of winter temperature in Seoul. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **5**, 59-80.
- Kim, H. and Lee, Y. (2013). A study on the density analysis of climatological stations using the correlation integral method in the fractal dimension. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 53-62.
- Lee, J. (2002). A Study on the valuation of the CDD/HDD weather options. *Korean Journal of Financial Studies*, **31**, 229-255.
- Phillips, A. W. (1959). The estimation of parameters in systems of stochastic differential equations. *Biometrika*, **46**, 67-76.
- Shim, J. and Lee, J. (2009). Kernel method for autoregressive data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 949-964.
- Shim, J. and Hwang, C. (2013). Expected shortfall estimation using kernel machines. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 625-636.
- Syroka, D. J. and Toumi, R. (2001). Scaling and persistence in observed and modelled surface temperature. *Geophysical Research Letters*, **28**, 3255-3259.

## The research on daily temperature using continuous AR model

Ji Young Kim<sup>1</sup> · Kiho Jeong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Law, Public Administration and Economics, The Catholic University of Korea

<sup>2</sup>School of Economics and Trade, Kyungpook National University

Received 3 December 2013, revised 27 December 2013, accepted 10 January 2014

### Abstract

This study uses a continuous autoregressive (CAR) model to analyze daily average temperature in six Korean metropolitan cities. Data period is Jan. 1, 1954 to Dec. 31, 2010 covering 57 years. Using a relative long time series reveals that the linear time trend components are all statistically significant in the six cities, which was not shown in previous studies. Particularly the plus sign of its coefficient implies the effect on Korea of the global warming. Unit-root test results are that the temperature time series are stationary without unit-root. It turns out that CAR(3) is suitable for stochastic component of the daily temperature. Since developing suitable continuous stochastic model of the underlying weather related variables is crucial in pricing the weather derivatives, the results in this study will likely prove useful in further future studies on pricing weather derivatives.

*Keywords:* Continuous autoregressive model, daily average temperature, weather derivative.

---

<sup>1</sup> Associate professor, School of Law, Public Administration and Economics, The Catholic University of Korea, Bucheon 420-743, Korea.

<sup>2</sup> Corresponding author: Professor, School of Economics and Trade, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea. E-mail: khjeong@knu.ac.kr