Journal of the Korean Data & Information Science Society
2014, **25**(1), 1–10

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2014.25.1.1
한국데이터정보과학회지

보험상품 파산확률의 새로운 근사방법†

권청아[1] · 최승경[2] · 이의용[3]

[123]숙명여자대학교 통계학과

접수 2013년 10월 17일, 수정 2013년 11월 11일, 게재확정 2013년 11월 26일

요 약

본 논문에서는 보험상품 파산확률의 근사값을 구하는 두 가지 새로운 방법을 제시한다. 첫 번째 방법은 기존의 Cramér와 Tijms의 근사방법을 가중평균한 것으로, 초기잉여금 값이 클 때 파산확률에 가까운 Cramér 방법과 초기잉여금이 작은 값일 때 파산확률에 가까운 Tijms 방법의 장점을 모두 고려한 방법이다. 두 번째 방법은 De Vylder의 근사식에 Tijms의 아이디어를 이용하여 De Vylder의 근사식을 확장한 방법이다. 또한 두 가지 새로운 방법과 기존의 근사방법 중 어느 것이 더 실제 파산확률에 가까운지 예를 통해 비교해 보았다.

주요용어: 근사식, 보험상품, 잉여금, 파산확률.

1. 서론

노령화 사회가 진행되고 핵가족화가 심화되면서 사회 구성원의 가치관의 변화에 따라 보험에 대한 의존도가 높아지고 있다. 이를 반영하듯 다양한 보험 상품의 개발로 보험 가입자의 수가 빠르게 늘어나고 보험회사의 운용자산도 급격히 증가하고 있다. 따라서 각 보험회사는 건전한 자산운용이 요구되고 있고 이를 위해서는 보험 상품의 파산 모형에 대한 연구가 필수적이 되었다. 또한 현대 보험 산업은 금융시장의 자유화 이후 금융시장의 변동성이 증가하고 다양한 파생상품으로 인해 보험상품의 자산과 부채가 다양한 리스크에 많이 노출되어 있다. 이런 현상을 반영하듯 보험료 (premium) 산출 방식이 보험료에 영향을 미치는 다양한 경제적 환경변수를 고려하는 현금흐름방식 (cash-flow pricing; CFP)을 적용하고, 보험회사의 평가는 리스크를 기준으로 하는 리스크평가제도 (risk assessment and application system; RAAS)와 자기자본제도 (risk based capital; RBC)를 적용하므로써 보험 회사에서의 리스크 관리에 대한 역할이 중요하게 되었다. 그와 함께 보험상품의 리스크 판단 기준인 파산확률에 대한 연구가 필수적이 되었다.

파산확률 (ruin probability)은 파산모형에 의해 구해지는데 파산모형은 보험료에 의한 수입, 보험금 청구 (claim)에 따른 손실 등을 복합적으로 고려하여 보험상품의 잉여금 과정 (surplus process)을 확률과정론 (stochastic process) 등을 이용하여 수학적으로 모형화한 것이다. 이러한 파산모형에서 잉여금이 0 이하로 떨어지면 파산이 일어난다고 한다. 파산확률은 보험 설계하는 단계에서뿐만 아니라 잉여금의 운영 과정에서도 중요하게 고려되는 요인이다. 하지만 파산확률의 이론적 공식은 매우 복잡하여 실

† 본 연구는 숙명여자대학교 2012학년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.
[1] (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 석사.
[2] (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 박사.
[3] 교신저자: (140-742) 서울특별시 용산구 청파동 2가, 숙명여자대학교 통계학과, 교수.
E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

제 계산하는데 어려움이 있기 때문에 좀 더 쉽게 계산할 수 있는 근사방법에 대한 연구가 이루어지고 있다. 본 논문에서는 기존에 제시된 근사공식들을 이용하여 새로운 근사공식을 제시하고 기존의 근사공식들과 예를 통해 비교한다.

보험수리에 관한 연구는 최근 들어 우리나라에서도 활발히 연구되기 시작했다. 예를 들어, Jung (2011)은 이분형 로지스틱 회귀분석을 사용하여 비대면 채널을 선호하는 고객의 유형을 분석하였고, 송 등 (2012)은 보험료율이 잉여금 수준에 의존하는 리스크 모형에서 파산 전 후의 잉여금 상태와 파산 시점의 결합분포를 구하였다. Won 등 (2013)은 두 가지 유형의 보험 청구가 있고 확산 과정 (diffusion process)을 따라 움직이는 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률을 연구하였다.

본 논문 2절에서는 먼저 잉여금 과정과 파산확률을 정의한다. 그리고 3절에서는 기존에 연구된 주요 근사방법들을 간단히 소개하고, 본 논문에서 제시하는 새로운 근사방법을 설명한다. 4절에서는 기존의 근사방법과 새로운 근사방법을 수치적으로 비교하여 새로운 근사방법이 기존의 근사방법보다 실제 파산확률에 더 근접함을 보이고, 5절에서는 본 논문의 결과를 요약 정리한다.

2. 잉여금 과정과 파산확률

2.1. 잉여금 과정

이 절에서 보험수리 분야에서 일반적으로 사용하는 연속 시간 잉여금 과정을 정의한다. 어떤 보험상품의 잉여금은 초기 잉여금 $u > 0$에서 출발해서, 단위 시간당 일정한 보험료율 (premium rate) $c > 0$로 들어오는 보험료에 의해 증가하며 고객의 보험금 청구에 따라 감소한다. 이때 보험금 청구는 발생률 $\lambda > 0$인 포아송 과정 $\{N(t), t \geq 0\}$을 따라 발생하며, i번째 청구 금액인 X_i는 서로 독립이고 평균이 $\mu > 0$인 일반적인 분포함수 G를 갖는다. 이러한 보험상품의 잉여금 과정은 다음과 같다.

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

여기서 $U(t)$는 시간 $t > 0$에서 초기 잉여금이 u일 때 보험상품의 잉여금이고, $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$는 시간 $t > 0$까지 발생한 보험금 청구에 대해 보험 회사가 지불하는 총 금액이며, ct는 시간 $t > 0$까지 들어온 총 보험료이다. 그리고 보험회사에서 정하는 보험료율인 c는 보험료 지급 비율인 $\lambda\mu$ 보다 커야 한다. 따라서 c는 상대적인 보완 부가급 (relative security loading 또는 premium loading factor)인 $\theta > 0$를 반영해 다음과 같이 정의한다.

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

2.2. 파산확률

보험상품의 잉여금 과정에서 $U(t)$의 값이 0보다 작아지면 보험상품이 파산한다고 한다. 초기 잉여금이 u일 때 파산할 확률은 다음과 같이 정의된다.

$$\psi(u) = Pr\{U(t) < 0, \text{ for some } t > 0 \mid U(0) = u\}.$$

위에서 정의한 파산확률을 구하는 과정은 Klugman 등 (2004)에 잘 정리되어 있다. 그 내용을 간략히 소개하면 다음과 같다.

보험상품의 잉여금이 u 아래로 떨어질 때 드롭 (drop)이 발생했다고 한다. 이 드롭의 크기를 확률변수 Y_1이라고 하자. 드롭이 발생할 확률은 잉여금이 u보다 작아질 확률로 초기 잉여금인 u를 0이라고 하면 $U(t)$가 0이하로 떨어지는 확률과 같다. 드롭이 발생할 확률은 다음과 같다.

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

또한 드롭의 크기를 나타내는 확률변수 Y_1의 분포함수는 아래와 같다.

$$G_e(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y [1 - G(x)]dx.$$

여기서 $G_e(y)$는 G의 평형분포 (equilibrium distribution)이다.

초기 잉여금 u에서 첫 번째 드롭이 일어난 후의 남은 잉여금은 $(u-y)$인데 이 값이 0보다 크면 또 다시 드롭이 발생할 수 있다. 그 때의 드롭이 발생할 확률은 첫 번째 드롭과 같이 $\psi(0)$이고 드롭 크기의 분포함수도 첫 번째 드롭과는 독립적으로 $G_e(y)$를 갖는다. 이는 잉여금과정의 마르코프 성질 (Markov property)에 의한 것으로 매 드롭이 일어날 때마다 드롭의 크기는 첫 번째 드롭과 같은 분포를 따른다. 또한 드롭의 개수를 확률변수 K라고 하면 K는 다음과 같은 기하분포를 갖는다.

$$Pr(K=k) = [1-\psi(0)][\psi(0)]^k = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

이 때 j번째 드롭의 크기를 확률변수 Y_j라고 하면 최대 총 손실 (maximum aggregated loss)을 나타내는 확률변수 $L = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_K$로 복합기하 확률변수 (compound geometric random variable)이고 파산확률 $\psi(u)$는 다음과 같다.

$$\psi(u) = Pr\{L > u\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \overline{G}_e^{(k)}(u).$$

여기서 $G_e^{(k)}$는 G_e의 k차 공률 (k-fold recursive convolution)이고, $\overline{G}_e(x) = 1 - G_e(x)$이다.

보험금 크기의 확률분포인 G가 명확하게 주어져도 파산확률은 G의 평형분포 G_e의 k차 공률과 무한 합으로 이루어져 있기 때문에 실질적인 계산이 불가능하다. 이 때문에 Cramér (1930), Hadwiger (1940), Lundberg (1964), Beekman (1969), De Vylder (1978), Grandell (1977, 1991), Tijms (1994) 등 많은 연구자들이 파산확률을 근사하는 공식을 제안하였다. Grandell (2000)은 이렇게 다양한 근사방법들을 비교하였다. Lee 등 (2009)은 De Vylder의 근사식과 지수적인 근사식 (exponential approximation)을 일반화한 새로운 근사방법을 제안하였고, Choi 등 (2010)은 Cramér와 Tijms의 근사식을 확장한 근사방법과 지수적인 근사식을 확장한 근사방법을 연구하였다. 본 논문에서는 두 가지 근사방법을 제안한다. 첫 번째는 Cramér 와 Tijms의 근사식을 가중평균하는 근사방법이고, 두 번째는 De Vylder의 근사식에 Tijms의 아이디어를 이용하여 De Vylder의 근사식을 확장한 근사방법을 제시한다.

3. 파산확률의 근사방법과 근사방법 개선

3.1. Cramér와 Tijms의 근사방법

이 절에서는 적률생성함수를 이용하여 파산확률을 근사적으로 구하는 Cramér와 Tijms의 근사방법을 소개한다. 이 방법은 적률생성함수를 이용해 조정계수 (adjustment coefficient) κ를 구하고 그 조정계수를 이용하여 근사적으로 파산확률을 구한다.

3.1.1. 조정계수

조정계수 κ는 다음 방정식의 해가 존재한다면 그 해 중에서 가장 작은 양수이다.

$$1 + (1+\theta)\mu\kappa = M_X(\kappa).$$

여기서 $M_X(t)$는 보험 청구 금액의 크기 X_i의 적률생성함수이다. 만약 위의 방정식의 해가 쉽게 구해지지 않는다면 Newton-Rapson 공식을 이용해 조정계수를 구하는 방법도 있다.

3.1.2. Cramér의 근사방법

Cramér (1930)가 제시한 근사공식은 다음과 같다.

$$\psi_C(u) = Ce^{-\kappa u}.$$

여기서 $C = \mu\theta/[M'_X(\kappa) - \mu(1+\theta)]$이다. Cramér 근사식은 $u \to \infty$일 때 실제 파산확률로 수렴하며 그 수렴 속도는 보험금의 분포함수 G의 꼬리부분이 지수적으로 감소하는 경우 더 빨라진다. 만약 G가 혼합지수분포 (mixed exponential distribution) 또는 얼랑 (Erlang)분포이면 이 근사식에 의해 구해진 파산확률은 실제 파산확률에 가까운 값을 갖게되고, G가 지수함수를 따르는 경우에는 실제 파산확률과 같은 값을 갖는다. 하지만 일반적으로 u가 작은 경우에는 근사가 잘 되지 않는 한계점를 가지고 있다.

3.1.3. Tijms의 근사방법

Tijms (1994)는 Cramér 근사식의 한계점을 보완하기 위해 Cramér의 근사식에 지수항 $C_1e^{-\mu/\alpha}$ 을 추가하여 Cramér의 근사식을 확장하였다. Tijms의 근사 공식은

$$\psi_T(u) = C_1e^{-u/\alpha} + Ce^{-\kappa u}, \quad u \geq 0,$$

이다. 여기서 $C_1 = 1/(1+\theta) - C$인데, 이는 $\psi_T(0) = 1/(1+\theta) = \psi(0)$을 만족하도록 하는 값이다. 이 조건에 의해 u가 작을 때 근사가 잘 되지 않는 Cramér의 근사식의 한계점을 보완하였다. 그리고 α는 다음 식을 만족하는 상수이다.

$$\int_0^\infty \psi_T(u)du = E(L) = E(K)E(Y) = \frac{E(X^2)}{2\mu\theta}.$$

따라서 α는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{E(X^2)/(2\mu\theta) - C/\kappa}{1/(1+\theta) - C}.$$

Tijms의 근사식은 u가 작은 경우에 Cramér의 근사식보다 실제 파산확률에 가깝지만, u가 큰 경우에는 Cramér의 근사식보다 실제 파산확률과 차이가 더 난다는 문제점을 가지고 있다.

3.2. De Vylder의 근사방법

3.1절에서 소개한 Cramér와 Tijms의 근사방법은 보험 청구 금액 크기인 X의 적률생성함수를 이용해 조정계수를 구하고 이를 이용해 실제 파산확률의 근사치를 구하는 방법이다. 그런데 실제로 X의 적률생성함수를 구하기가 쉽지 않은 경우가 많다. 따라서 이번엔 적률생성함수를 이용하지 않고 근사 시키는 De Vylder (1978)가 제시한 근사방법을 소개한다. De Vylder는 잉여금 과정에서 $X(t) = (1+\theta)\lambda\mu t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$라고 놓고, 보험금 크기가 지수분포를 따르면서 아래와 같은 조건을 만족하는 잉여금 과정 $\tilde{X}(t)$를 찾는다.

$$E[X^k(t)] = E[\tilde{X}^k(t)], \quad k = 1, 2, 3.$$

$X(t)$와 3차 모멘트까지 일치하는 $\tilde{X}(t)$를 찾으면 해당하는 파산 확률을 구하고, 이를 실제 파산 확률의 근사 공식으로 쓰는 방법이다. 즉, $\tilde{X}(t) = (1+\tilde{\theta})\tilde{\lambda}\tilde{\mu}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \tilde{X}_i$. 여기서 $\tilde{X}_i$는 평균이 $\tilde{\mu}$인 지수확률변수이다. 위 조건을 만족하는 $\tilde{X}(t)$의 모수들을 구하면 아래와 같다.

$$\tilde{\mu} = \frac{\zeta_3}{3\zeta_2}, \quad \tilde{\theta} = \frac{2\zeta_1\zeta_3}{3\zeta_2^2}\theta \quad \left(\text{그리고} \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\zeta_2^3}{2\zeta_3^2}\lambda\right).$$

여기서 ζ_k는 G의 k차 모멘트인 $E[X_1^k]$를 나타낸다. 따라서 $\tilde{X}(t)$를 갖는 잉여금 과정의 파산확률 $\psi_{DV}(u)$는

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\tilde{\theta}}\ exp\left\{-\frac{\tilde{\theta}u}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})}\right\}$$

로 주어지고, $\tilde{\mu}$와 $\tilde{\theta}$를 대입하여 $X(t)$의 모수로 표현하면 아래와 같다.

$$\psi_{DV}(u) = \frac{3\zeta_2^2}{3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta}\ exp\left\{-\frac{6\zeta_1\zeta_2\theta u}{3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta}\right\}.$$

De Vylder의 근사공식의 특징은 보험금 크기가 지수분포를 따르는 경우 실제 파산확률 $\psi(u)$와 같게 된다. 하지만 u가 작은 값일 때는 근사가 잘 되지 않고, X 분포의 꼬리가 두꺼울 때도 잘 근사시키지 못하는 한계가 있다.

3.3. 근사방법의 개선

3.1절과 3.2절에서 소개된 기존의 근사방법들은 한계점들을 가지고 있다. 이 절에서는 그런 한계점들을 보완하여 좀 더 실제 파산확률에 가까운 새로운 근사방법들을 제시하고자 한다.

3.3.1. Cramér와 Tijms의 근사식을 이용한 근사방법

본 논문에서 첫 번째로 새롭게 제시하는 근사방법은 Cramér와 Tijms의 근사식을 조합하여 u에 상관없이 로버스트 (robust)하게 실제 파산확률에 근사되는 근사식을 제안한다.

새로운 근사식은 Cramér와 Tijms의 근사식을 가중평균한 형태로 u가 작을 때 근사가 잘 되는 Tijms의 식에는 $\frac{1}{u+1}$ 의 가중치를 주고 상대적으로 u가 클 때 더 근사가 잘되는 Cramér에 $\frac{u}{u+1}$의 가중치를 주었다. 따라서 u가 0에 수렴할 때는 Tijms 식의 가중치가 1 이 되고 u가 무한대로 갈 때는 Cramér 식의 가중치가 1이 된다. 새로운 근사식 $\psi_K(u)$의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\psi_K(u) &= \frac{1}{u+1}\psi_T(u) + \frac{u}{u+1}\psi_C(u)\\ &= Ce^{-\kappa u} + \frac{1}{u+1}C_1e^{-u/\alpha}.\end{aligned}$$

여기서 C, C_1, κ는 Tijms의 근사식에서 구한 값들을 사용한다. 그리고 α값은 두 가지 방법에 의해 결정된다. 첫 번째 방법은 Tijms의 근사식에서 구한 α와 같은 값을 이용하는 것이고, 두 번째 방법은 초기 잉여금인 u가 0일 때 새로운 근사식의 미분값과 실제 파산확률의 미분값이 일치하는, 즉 $\psi_K'(0) = \psi'(0)$을 만족하는 α를 이용하는 것이다. 첫 번째 방법의 α를 사용한 근사식을 $\psi_{K1}(u)$라 하고, 두 번째 방법의 α를 사용한 근사식을 $\psi_{K2}(u)$라 하자. 두 번째 방법의 α를 구하기 위해 $\psi_K(u)$와 $\psi(u)$를 미분해서 $u=0$을 대입하면

$$\begin{aligned}\psi_K'(0) &= -C\kappa - C_1 - \frac{1}{\alpha}C_1\\ \psi'(0) &= \frac{-\theta}{\mu(1+\theta)^2}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $C_1 = 1/(1+\theta) - C$을 대입한 후, α에 대해 정리하면 α값은 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{\mu[(1+\theta) - C(1+\theta)^2]}{\theta - \kappa C\mu(1+\theta)^2 - \mu[(1+\theta) - C(1+\theta)^2]}.$$

3.3.2. De Vylder의 근사식을 이용한 근사방법

이 절에서 소개하는 새로운 근사식은 De Vylder의 근사식에 Tijms의 아이디어를 이용하여 De Vylder의 근사식을 확장한 근사방법이다. 즉, 기존의 De Vylder의 근사식에 지수항 $De^{-u/b}$를 추가하여 기존식의 한계점을 보완한다. 새로운 근사식 $\psi_{DV-C}(u)$는 다음과 같다.

$$\psi_{DV-C}(u) = \frac{1}{1+\tilde{\theta}}\ exp\left\{-\frac{\tilde{\theta}u}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})}\right\} + De^{-u/b}.$$

여기서 D는 $\psi_{DV-C}(0) = \psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$를 만족하는 해로, Tijms에서 C를 구할 때처럼 초기 잉여금 u가 0일 때 실제 파산확률과 맞춰 주는 것이다. 새로운 식 $\psi_{DV-C}(0)$에 $u = 0$을 대입한 값 $\psi_{DV-C}(0) = \frac{1}{\tilde{\theta}} + D$이므로 D는

$$D = \frac{1}{1+\theta} - \frac{1}{1+\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{\theta}-\theta}{(1+\theta)(1+\tilde{\theta})}$$

이다. 여기서 $\tilde{\theta} = \frac{2\zeta_1\zeta_3}{3\zeta_2^2}\theta$이므로 D를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$D = \frac{(2\zeta_1\zeta_3 - 3\zeta_2^2)\theta}{(1+\theta)(3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta)}.$$

이 근사식에 포함된 또 다른 모수 b값을 결정하기 위해서 초기 잉여금 u가 0일 때의 미분값을 일치시키는 조건으로 $\psi'_{DV-C}(0) = \psi'(0) = \frac{-\theta}{\mu(1+\theta)^2}$을 이용한다. $\psi_{DV-C}(u)$를 미분하고, $u = 0$을 대입하면 각각 다음과 같다.

$$\psi'_{DV-C}(u) = \frac{-\tilde{\theta}}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})^2}exp\left[\frac{-\tilde{\theta}u}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})}\right] - \frac{D}{b}e^{-u/b}$$
$$\psi'_{DV-C}(0) = \frac{-\tilde{\theta}}{\tilde{\mu}(1+\tilde{\theta})^2} - \frac{D}{b}.$$

따라서 $\psi'_{DV-C}(0) = \psi'(0)$를 만족하는 b는

$$b = \frac{\mu\tilde{\mu}(1+\theta)^2(1+\tilde{\theta})^2}{\tilde{\mu}\theta(1+\tilde{\theta})^2 - \mu\tilde{\theta}(1+\theta)^2}D$$

이다. 여기서 $\tilde{\mu} = \frac{\zeta_3}{3\zeta_2}, \tilde{\theta} = \frac{2\zeta_1\zeta_3}{3\zeta_2^2}\theta$를 대입하여 $X(t)$의 모수로 b를 정리하면 아래와 같다.

$$b = \frac{\zeta_1(1+\theta)(3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta)(2\zeta_1\zeta_3 - 3\zeta_2^2)}{(3\zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_3\theta)^2 - 18\zeta_1^2\zeta_2^3(1+\theta)^2}.$$

4. 근사방법 비교

이 장에서는 3.3.1절에서 제시한 새로운 근사식들 $\psi_{K1}(u), \psi_{K2}(u)$를 보험 청구액의 분포 G가 얼랑분포인 경우에 Cramér와 Tijms의 근사식과 수치적으로 비교하고, 3.3.2절에서 제시한 새로운 근사식 ψ_{DV-C}를 G가 혼합지수분포인 경우에 De Vylder 의 근사식과 수치적으로 비교한다. 본 논문에서는 상대오차 (relative error)를 이용하여 기존의 근사방법들과 새로 제안된 근사방법을 비교한다. 여기서 근사 공식 $\psi_A(u)$의 상대오차는 아래와 같이 정의된다.

$$\varepsilon_A(u) = \frac{|\psi_A(u) - \psi(u)|}{\psi(u)} \times 100.$$

4.1. Cramér와 Tijms의 근사방법과의 비교

본 절에서는 G가 형태 모수 (shape parameter)는 3이고 평균이 1인 얼랑분포인 경우에 파산확률의 근사공식들을 비교한다. 즉, 보험 청구액의 확률밀도함수는 아래와 같다.

$$g(x) = \frac{27x^2e^{-3x}}{2}, \quad x > 0.$$

아래 Table 4.1은 기존의 근사공식들과 새로 제안된 근사공식의 실제 파산확률에 대한 상대오차이다. $\psi(u)$가 실제 파산확률이다. $\varepsilon_C(u)$는 Cramér의 근사식 상대오차, $\varepsilon_T(u)$는 Tijms의 근사식 상대오차, $\varepsilon_{K1}(u)$는 새로운 근사식 $\psi_{K1}(u)$의 상대오차, 그리고 $\varepsilon_{K2}(u)$는 또 다른 새로운 근사식 $\psi_{K2}(u)$의 상대오차이다.

Table 4.1 Comparison of Cramér, Tijms' type approximations

θ	u	$\psi(u)$	$\varepsilon_C(u)$	$\varepsilon_T(u)$	$\varepsilon_{K1}(u)$	$\varepsilon_{K2}(u)$
0.25	0.1	0.783	3.103	0.092	0.366	0.059
	0.25	0.756	1.938	0.075	0.447	0.201
	0.5	0.707	0.810	0.034	0.247	0.348
	0.75	0.658	0.308	0.076	0.089	0.341
	1	0.610	0.103	0.073	0.015	0.270
	1.25	0.564	0.040	0.041	0.004	0.178
	2.5	0.383	0.000	0.002	0.001	0.017
1	0.1	0.474	12.931	0.428	1.515	0.187
	0.25	0.434	8.252	0.431	1.995	0.748
	0. 5	0.366	3.972	0.035	1.347	1.459
	0.75	0.303	1.799	0.221	0.645	1.637
	1	0.248	0.743	0.305	0.219	1.501
	1.25	0.202	0.257	0.289	0.014	1.239
	2.5	0.071	0.046	0.025	0.040	0.188
4	0.1	0.184	44.304	1.069	4.999	0.527
	0.25	0.159	32.107	1.294	7.456	2.144
	0. 5	0.121	18.462	0.258	6.326	4.967
	0.75	0.088	10.441	0.740	4.052	6.697
	1	0.063	5.832	1.227	2.302	7.322
	1.25	0.044	3.110	1.421	1.096	7.318
	2.5	0.007	0.643	1.185	0.798	4.795

Table 4.1를 살펴보면 $\psi_{K1}(u)$의 경우 u가 커질수록 잘 근사되는 경향을 보이며, $\psi_{K2}(u)$의 경우 u가 작을수록 잘 근사되는 것을 볼 수 있다. $\psi_{K1}(u)$은 θ에 상관없이 u가 작을 때는 Cramér의 상대오차 $\varepsilon_C(u)$보다 작은 $\varepsilon_{K1}(u)$ 값을 갖고, u가 커질 때는 Tijms의 상대오차 $\varepsilon_T(u)$보다 작은 $\varepsilon_{K1}(u)$ 값을 갖는다. 반면 이 예제에서 $\psi_{K2}(u)$ 는 u가 작을 때를 제외하고는 기존의 근사식보다 좋다고 할 수 없어서, $\psi_{K1}(u)$가 $\psi_{K2}(u)$보다는 좀 더 로버스트한 근사식임을 알 수 있었다.

4.2. De Vylder의 근사방법과의 비교

De Vylder의 근사식과 새로운 근사식을 비교하기 위해 보험 청구액의 분포가 다음의 혼합지수분포를 따른다고 하자.

$$G(x) = 1 - 0.0039793e^{-0.014631x} - 0.1078392e^{-0.190206x} - 0.8881815e^{-5.514588x}.$$

여기서 $x \geq 0$이다 (Wikstad, 1971).

아래 Table 4.2는 기존의 근사공식과 새로 제안된 근사공식의 실제 파산확률에 대한 상대오차이다. $\psi(u)$가 실제 파산확률이다. $\varepsilon_{DV}(u)$ 는 De Vylder의 근사식 상대오차, $\varepsilon_{DV-C}(u)$는 $\psi_{DV-C}(u)$의 상대오차이다.

Table 4.2 Comparison of De Vylder's type approximations

u	θ	$\psi(u)$	$\varepsilon_{DV}(u)$	$\varepsilon_{DV-C}(u)$
0	5	0.952	7.721	0.000
	10	0.909	13.773	0.000
	15	0.870	18.645	0.000
	20	0.833	22.651	0.000
	25	0.800	26.003	0.000
	30	0.769	28.249	0.000
10	5	0.890	3.209	3.187
	10	0.799	5.424	5.398
	15	0.724	7.011	6.985
	20	0.661	8.148	8.126
	25	0.607	8.978	8.959
	30	0.561	9.581	9.565
100	5	0.714	0.373	0.373
	10	0.539	1.112	1.112
	15	0.425	1.915	1.915
	20	0.346	2.711	2.711
	25	0.289	3.380	3.380
	30	0.246	3.987	3.987

Table 4.2를 살펴보면 u가 0인 경우 새로운 근사식의 상대오차인 $\varepsilon_{DV-C}(u)$은 0이다. 즉, u가 0일 때는 새로운 근사식이 실제 파산확률과 같은 값을 갖는다. 또, 새로운 근사식은 u가 작은 값일 때는 De Vylder의 근사식보다 실제 파산확률에 더 잘 근사되고, u의 값이 커지면 De Vylder의 근사식과 같은 값을 갖게 됨을 알 수 있다.

5. 결론

보험 상품 잉여금의 파산확률은 이론적인 공식은 잘 알려져 있으나, 공률과 무한 합으로 이루어져 있어, 보험 청구의 빈도, 청구액의 분포함수 등이 알려져 있어도 실제 계산이 거의 불가능하다. 본 논문에서는 잉여금의 파산확률을 근사하는 Cramér, Tijms의 방법과 De Vylder의 방법을 개선하는 연구가 수행되었다. Cramér, Tijms의 방법을 개선하는 연구에서는 초기 잉여금의 값에 영향을 덜 받는 좀 더 로버스트한 근사방법이 제시되었고, De Vylder의 방법을 개선하는 연구에서는 초기 잉여금의 값이 작을 때도 실제 파산확률을 잘 근사하는 방법이 제시되었다.

대부분의 경우 실제 파산확률의 계산이 불가능하므로, 본 논문에서는 제시된 근사방법과 기존의 근사방법을 비교하는데, 보험 청구액이 얼랑분포와 혼합지수분포를 따르는 제한된 두 경우를 예제로 사용하였다. 두 예제에서 모두 제시된 근사방법이 기존 근사방법의 문제점을 보완하는 것을 알 수 있었다. 하지만 현실적으로 실제 보험 청구액의 분포가 달라지거나 모르는 상황이라면, 기존의 근사식이나 제시된 근사식이 일반적으로 실제 파산확률을 잘 근사하는지 판단하기가 어려울 것이다. 앞으로 본 논문에서와 같이 초기 잉여금이나 보험 청구액의 분포에 의존하지 않고 파산확률을 로버스트하게 잘 근사하는 근사식을 만드는 연구가 계속적으로 필요해 보인다.

References

Beekman, J. (1969). A ruin function approximation. *Transactions of the Society of Actuaries*, **21**, 41-48.

Choi, S. K., Choi, M. H., Lee, H. S. and Lee, E. Y. (2010). New approximations of ruin probability in a risk process. *Quality Technology* & *Quantitative Management*, **7**, 377-383.

Cramér, H. (1930). On the mathematical theory of risk. In *Harald Cramér Collected Works*, Vol. I, Springer, Berlin, 601-678.

De Vylder, F. E. (1978). A practical solution to the problem of ultimate ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, 114-119.

Grandell, J. (1977). A class of approximation of ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal* (Suppl.), 38-52.

Grandell, J. (1991). *Aspects of risk theory*, Springer, New York.

Grandell. J. (2000). Simple approximation of ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, 157-173.

Hadwiger, H. (1940). Über die wahrscheinlichkeit des ruins bei einer grossen zahl von geschäften. *Arkiv für Mathematische Wirtschaft-und Sozialforschung*, **6**, 131-135.

Jung, S. C. (2011). The preference for direct marketing according to the characteristics of policyholders in the life insurance industry. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 1137-1143.

Klugman, S. A., Panjer, H. and Willmot, G. E. (2004). *Loss models: From data to decision*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, Hoboken.

Lee, H. S., Choi, S. K. and Lee, E. Y. (2009). An improvement of the approximation of the ruin probability in a risk process. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **22**, 937-942.

Lundberg, O. (1964). *On random processes and their application to sickness and accident statistics*, 1st Edition, Almqvist & Wiksell, Uppsala.

Song, M. J., Kim, J. W. and Lee, J. Y. (2012). A compound Poisson risk model with variable premium rate. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **23**, 1289-1297.

Tijms, H. (1994). *Stochastic models- An algorithmic approach*, Wiley, Chichester.

Wikstad, N. (1971). Exemplification of ruin probabilities. *Astin Bulletin*, **6**, 147-152.

Won, H. J., Choi, S. K. and Lee, E. Y. (2013). Ruin probabilities in a risk process perturbed by diffusion with two types of claims. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **24**, 1-12.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2014, **25**(1), 1–10

http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2014.25.1.1
한국데이터정보과학회지

New approximations of the ruin probability in a continuous time surplus process†

Cheonga Kwon[1] · Seung Kyoung Choi[2] · Eui Yong Lee[3]

[123]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

Received 17 October 2013, revised 11 November 2013, accepted 26 November 2013

Abstract

In this paper, we study approximations of the ruin probability in a continuous time surplus process. First, we introduce the well-known approximation formulas of the ruin probability such as Cramér, Tijms' and De Vylder's methods. We, then, suggest new approximation formulas of two types, which improve the existing approximation formulas. One is Cramér and Tijms' type which makes use of the moment generating function of distribution of a claim size and the other is De Vylder's type which makes use of the surplus process with exponential claims. Finally, we compare, by illustrating numerical examples, the newly suggested approximation formulas with the existing approximation formulas of the ruin probability.

Keywords: Approximation, ruin probability, surplus process.

† This research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2012.
[1] Master, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.
[2] Doctor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea.
[3] Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr