

논문 2014-51-1-21

밀러 효과의 정확한 모델링을 이용한 공통 소스 증폭기의 주파수 특성 연구

(Frequency Response Analysis of Common-Source Amplifier Using the
Exact Modeling of Miller Effect)

이 순 재*, 이 동 건*, 정 향 근**

(Soonjai Yi, Dong-Keon Lee, and Hang-Geun Jeong[©])

요 약

본 논문은 공통 소스 증폭기의 부유 커패시턴스에 밀러 정리를 적용할 때 출력 커패시턴스를 고려한 AC 이득을 사용하여 정확한 밀러 효과 모델을 도출하였다. 정확한 AC 이득을 사용하면 부유 커패시턴스는 입력과 출력 부분에 C와 병렬 RC 회로의 직렬연결로 변환된다. 제안한 밀러 효과 모델로 구성된 등가회로의 주파수 응답 특성은 변환 전 회로의 주파수 응답 특성과 일치해 제안한 모델의 정확성이 확인되었다. 제안한 밀러 효과 모델과 소자 값이 다소 복잡하지만 공통 소스 증폭기의 특성을 이용하여 간략화 시킬 수 있다. 또한 개방 회로 시정수 방법을 사용하면 증폭기의 3-dB 주파수도 쉽게 예측이 가능하며 예측된 3-dB 주파수는 공통 소스 증폭기의 주 극점 근사 방법과 같은 값을 가진다.

Abstract

This paper presents a new model of the Miller effect. The new Miller effect model is obtained from the accurate AC gain which includes the effect of the output capacitance of the common-source (CS) amplifier. The new Miller effect model consists of the series connection of a capacitance and a parallel RC circuit, one at the input and the other at the output. The frequency response obtained by the new Miller effect model is equal to that obtained from the original circuit. Even though the new model is complicated, the 3-dB frequency can be easily estimated by using the open-circuit time constants method without the node analysis.

Keywords : Miller's Theorem, AC gain, Miller effect, common-source amp, frequency response

I. 서 론

주파수 응답 특성은 증폭기의 성능을 결정하는 중요한 특성 중 하나이며 증폭기를 설계할 때 고려해야 할

사항이다. 하지만 증폭기의 입력과 출력사이에 존재하는 부유 커패시턴스는 주파수 응답 특성의 해석을 복잡하게 만들어 증폭기 설계를 어렵게 한다. 공통 소스 증폭기는 이런 부유 커패시턴스가 존재해 노드 해석을 이용한 극점 계산이 매우 복잡하다^[1-2]. 공통 소스 증폭기의 주파수 응답 특성을 쉽게 해석하기 위해 주 극점 근사 방법을 사용하거나 밀러 정리를 이용한다. 밀러 정리를 적용할 때, 정확한 주파수 응답 특성 분석을 위해서는 AC 이득을 사용해야 하지만 계산의 편의를 위하여 대부분 DC 이득을 사용한다.

* 학생회원, ** 정회원, 전북대학교 전자공학부

(Dept. of Electronic Engineering Chonbuk National University)

© Corresponding Author(E-mail: hgjeong@jbnu.ac.kr)

※ 본 논문은 IDEC CAD tool과 한국연구재단 BK21플러스 사업의 지원을 받아서 수행되었습니다.

접수일자: 2013년4월17일, 수정완료일: 2013년12월23일

DC 이득을 사용한 DC 밀러(DCM) 모델은 부유 커패시턴스를 각각 입력과 출력 부분에 접지된 커패시턴스로 변환시킨다. DCM 모델을 사용하면 증폭기의 극점들은 비교적 쉽게 계산되지만 오차가 존재한다. 특히 두 번째 극점의 오차가 매우 큰 편이며 부유 커패시턴스로 인해 발생하는 영점은 나타낼 수 없다^[3].

DCM 모델의 한계를 극복하기 위해 출력 커패시턴스를 제외한 AC 이득이 사용되었고 이를 사용한 AC 밀러(ACM I) 모델이 도출되었다^[4]. ACM I 모델은 부유 커패시턴스를 입력과 출력 부분에 직렬 RC 회로로 변환시킨다. ACM I 모델은 추가된 저항으로 인해 주파수 응답 특성의 정확성이 개선되었으며 영점도 나타낼 수 있다.

ACM I 모델의 주파수 응답 특성은 DCM 모델과 비교하면 많이 개선되었지만 여전히 오차는 존재한다. 본 논문에서는 이러한 오차를 줄이기 위해 출력 커패시턴스를 고려한 정확한 AC 이득을 구하고 이를 사용하여 새로운 AC 밀러(ACM II) 모델을 제안하였다. 제안한 ACM II 모델은 부유 커패시턴스를 입력과 출력 부분에 C와 병렬 RC 회로의 직렬연결로 변환시킨다. 제안한 ACM II 모델의 주파수 응답 특성은 변환 전 회로의 주파수 응답 특성과 일치해 높은 정확성을 보여준다.

ACM II 모델은 기존 밀러 모델과 비교하면 등가회로가 다소 복잡해 보이지만 ACM II 모델을 적용할 때 유효한 파라미터 값만 바꾸어 사용하면 된다. 또한 주파수 응답 특성 분석을 위해 번거로운 노드 해석 없이 개방 회로 시정수 방법을 사용하여 증폭기의 3-dB 주파수를 쉽게 계산할 수 있다. ACM II 모델에 개방 회로 시정수 방법을 적용하면 계산된 3-dB 주파수는 공통 소스 증폭기의 주 극점 근사 방법과 같은 값을 가진다.

공통 소스 증폭기의 이득이 1보다 크다는 특성을 이용하면 등가회로 구조는 같지만 소자값의 연산이 훨씬 간편해지는 단순화된 ACM II 모델도 도출된다. 단순화된 ACM II 모델이지만 주파수 응답 특성은 기존 모델의 주파수 응답 특성보다 정확성이 향상되며 모의실험 결과를 통해 이를 보여준다.

II장에서는 기존의 밀러 효과 모델들과 제안된 밀러 효과 모델을 비교한다. III장에서는 제안된 밀러 효과 모델의 정확성과 유용성을 모의실험과 개방 회로 시정수 방법을 사용하여 확인한다. 그리고 마지막 IV장에서

결론을 맺는다.

II. 밀러 효과 모델

밀러 효과 모델들을 비교하기 위해서 그림 1과 같은 공통 소스 증폭기의 소신호 모델이 사용되었다. 그림 1의 부유 커패시턴스(C_{XY})에 밀러 정리를 적용하면 C_{XY} 는 입력과 출력 부분에 각각의 임피던스로 표현되며 식 (1)과 같다.

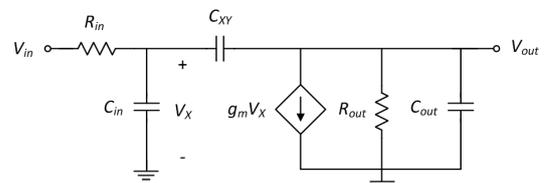


그림 1. 공통 소스 증폭기의 소신호 모델
Fig. 1. Small signal model of the CS amplifier.

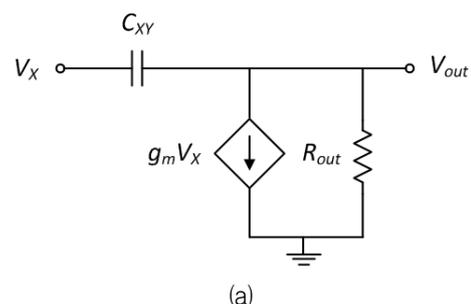
$$Z_X = \frac{1}{s C_{XY}(1 - A_V(s))}, Z_Y = \frac{1}{s C_{XY}\left(1 - \frac{1}{A_V(s)}\right)} \quad (1)$$

1. DCM 모델

정확한 밀러 정리의 적용을 위해서는 식 (1)의 $A_V(s)$ 에 AC 이득을 사용해야 한다. 하지만 DCM 모델은 AC 이득 대신에 DC 이득을 사용한다. 그림 1의 소신호 모델에서 부유 커패시턴스에 밀러 정리를 적용할 때 사용되는 DC 이득 회로를 그림 2 (a) 나타내었고 DCM 모델이 적용한 후의 등가회로는 그림 2 (b)처럼 된다.

그림 2 (b)에서 C_X 와 C_Y 의 커패시턴스는 식 (2)처럼 표현된다.

$$C_X = C_{XY}(1 - A_O), C_Y = C_{XY}\left(1 - \frac{1}{A_O}\right) \quad (2)$$



(a)

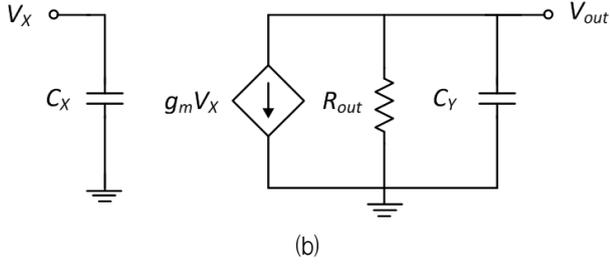


그림 2. (a) DC 이득 회로의 소신호 모델, (b) DCM 모델이 적용된 후의 등가회로
 Fig. 2. (a) Small signal model of DC gain, (b) equivalent circuit decomposed by the DCM model.

2. ACM I 모델

DCM 모델의 주파수 응답 특성을 보완하기 위해서 식 (1)의 $A_v(s)$ 에 그림 2 (a)에서 계산된 AC 이득이 사용되었다. 계산된 AC 이득은 DC 이득을 포함하고 있으며 부유 커패시턴스로 인해 하나의 극점과 하나의 영점을 갖는 모델로 표현될 수 있다. AC 이득의 모델을 식 (3)에 나타내었다.

$$A_v(s) = A_O \left[\left(1 - \frac{s}{\omega_z} \right) / \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \right] \quad (3)$$

ω_z 와 ω_p 는 그림 2 (a) 증폭기의 영점과 극점을 나타낸다. 식 (1)의 $A_v(s)$ 에 그림 2 (a)에서 계산된 AC 이득이 사용되면 부유 커패시턴스는 입력과 출력 부분에 직렬 RC 회로로 변환된다. 그림 3은 ACM I 모델이 적용된 후의 등가회로이다.

그림 3의 C_X 와 C_Y 는 DCM 모델의 값과 같으며 R_S 는 식 (4)처럼 표현된다. g_m 은 MOSFET의 트랜스 컨덕턴스이며 R_{out} 은 출력저항이다.

$$R_S = \left(\frac{1}{g_m} // R_{out} \right) \quad (4)$$

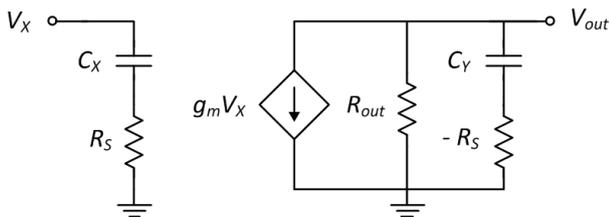


그림 3. ACM I 모델이 적용된 후의 등가회로
 Fig. 3. Equivalent circuit decomposed by the ACM I model.

3. ACM II 모델

ACM I 모델은 그림 2 (a)에서 보는 것처럼 공통 소스 증폭기의 출력 커패시턴스를 제외한 AC 이득을 사용하였다. 이로 인해 주파수 응답 특성에서 오차가 존재한다. 본 논문에서는 출력 커패시턴스를 포함하는 AC 이득을 적용하여 정확한 모델인 ACM II 모델을 도출한다. 그림 4 (a)는 출력 커패시턴스가 포함된 소신호 모델이다. 출력 커패시턴스가 포함되면 증폭기의 극점만 변하기 때문에 식 (3)의 AC 이득 모델은 식 (5)처럼 표현된다.

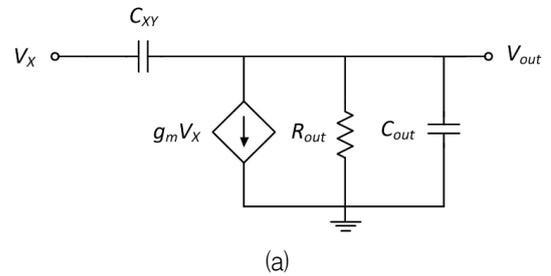
$$A'_v(s) = A_O \left[\left(1 - \frac{s}{\omega_z} \right) / \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \right] \quad (5)$$

ω_z 와 ω_p 는 그림 4 (a) 증폭기의 영점과 극점을 나타낸다. 식 (5)는 그림 4 (a)에서 하나의 노드 방정식을 이용하여 계산할 수 있으므로 쉽게 얻을 수 있다. 식 (1)의 $A_v(s)$ 에 식 (5)와 같은 AC 이득이 사용되면 부유 커패시턴스는 입력과 출력 부분에 C와 병렬 RC의 직렬 연결로 변환된다. 그림 4 (b)는 ACM II 모델이 적용된 후의 변환된 등가회로를 보여준다.

그림 4 (b)에서 C_X 와 C_Y 는 DCM 모델의 값과 같고 R_p 와 C_p 의 값은 다음과 같다.

$$R_p = \frac{-A_O(\omega_z + \omega_p)}{(1 - A_O)^2 \omega_z \omega_p C_{XY}}, \quad (6)$$

$$C_p = \frac{(1 - A_O)(\omega_z + A_O \omega_p) C_{XY}}{-A_O(\omega_z + \omega_p)}$$



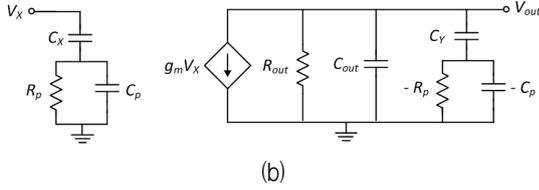


그림 4. (a) AC 이득 회로의 소신호 모델,
(b) ACM II 모델이 적용된 후의 등가회로
Fig. 4. (a) Small signal model of AC gain,
(b) equivalent circuit decomposed by the ACM II model.

4. 밀러 모델들의 비교

DCM, ACM I, ACM II 모델에서 사용한 이득과 파라미터 값을 표 1에 나타내었다. 그림 5는 부유 커패시턴스가 각각의 밀러 모델들에 의해서 변환된 등가회로이다. DCM 모델의 등가회로가 가장 단순하며 ACM I, ACM II 모델의 등가회로는 점진적으로 복잡해짐을 확인할 수 있다.

표 1. 밀러 효과 모델들에서 사용된 전압이득
Table 1. Voltage transfer function of the Miller effect models.

밀러 모델	$A_V(s)$
DCM	$A_O = -g_m R_{out}$
ACM I	$A_V(s) = A_O \left[\left(1 - \frac{s}{\omega_z} \right) / \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \right]$ $\omega_p = \frac{1}{R_{out} C_{XY}}, \omega_z = \frac{g_m}{C_{XY}}$
ACM II	$A'_V(s) = A_O \left[\left(1 - \frac{s}{\omega_z} \right) / \left(1 + \frac{s}{\omega'_p} \right) \right]$ $\omega'_p = \frac{1}{R_{out} (C_{XY} + C_{out})}, \omega_z = \frac{g_m}{C_{XY}}$

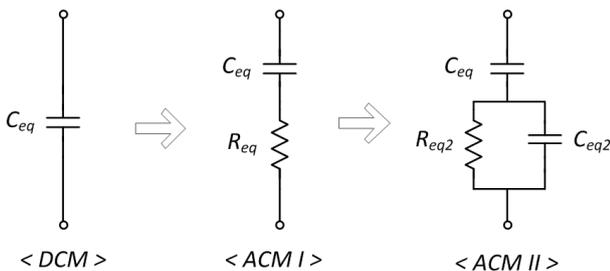


그림 5. 등가회로로 표현된 밀러 효과 모델들의 변화
Fig. 5. Evolution of the Miller effect models represented in equivalent circuits.

III. 모의실험

1. 공통 소스 증폭기

그림 1의 공통 소스 증폭기에 ACM II 모델을 적용하면 등가회로는 그림 6처럼 된다.

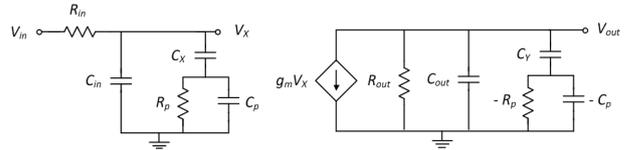


그림 6. ACM II 모델이 적용된 등가회로
Fig. 6. The equivalent circuit obtained by the ACM II model.

그림 6의 입력 부분은 2개의 극점과 1개의 영점으로 구성되며, 출력 부분은 1개의 극점과 1개의 영점으로 구성된다. 하지만 입력 부분의 영점이 출력 부분의 극점과 같아 등가회로 전체 전압이득은 2개의 극점과 1개의 영점으로 구성되어 공통 소스 증폭기 전압 이득과 일치한다.

표 1에 있는 파라미터 값을 이용하면 \$R_p\$와 \$C_p\$는 식 (7)처럼 표현된다. 만약 출력 커패시턴스가 0이라면 ACM II 모델은 ACM I 모델과 같다는 것을 확인할 수 있다.

$$R_p = \frac{R_{out} [(1-A_O)C_{XY} - A_O C_{out}]}{(1-A_O)^2 C_{XY}}, C_p = \frac{(1-A_O)C_{XY} C_{out}}{(1-A_O)C_{XY} - A_O C_{out}} \quad (7)$$

식 (7)이 복잡해 보이지만 증폭기의 DC 이득인 \$A_0\$가 1보다 충분히 크다면 식 (7)은 식 (8)처럼 단순화 시킬 수 있으며 등가회로는 그림 7과 같다. 식 (8)에서 보여 주듯이 등가회로를 구성하는 소자값의 계산이 훨씬 간단해지며 이를 단순화된(simplified) ACM II 모델이라고 한다.

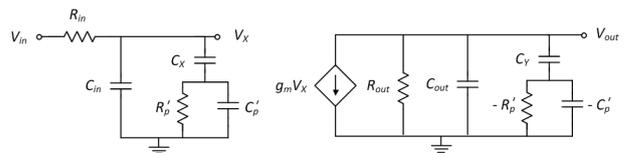


그림 7. 단순화된 ACM II 모델이 적용된 등가회로
Fig. 7. The equivalent circuit obtained by the simplified ACM II model.

$$R_p' = \frac{C_{XY} + C_{out}}{g_m C_{XY}}, C_p' = \frac{C_{XY} C_{out}}{C_{XY} + C_{out}} \quad (8)$$

2. 주파수 응답 특성

DCM, ACM I, ACM II, 그리고 단순화된 ACM II 모델의 주파수 응답 특성을 공통 소스 증폭기의 주파수 응답 특성과 비교하였다. CMOS 0.35 μm 공정 파라미터를 사용하였으며 전원전압은 3.3V, 전류는 100 μA, 입력저항 6 KΩ, 출력저항 16.5 KΩ이다. 사이즈 비율은 30이며 각각의 밀러 모델들에 따른 모의실험 결과를 그림 8에 나타내었다. ACM II 모델은 공통 소스 증폭기의 주파수 응답 특성과 일치하며 DCM 모델과 ACM I 모델은 오차를 가진다. 오차는 주파수가 높아질수록 더 크게 나타난다. 다만 ACM I 모델은 영점을 나타낼 수 있어 영점 주파수 근처에서만 오차가 줄어들는 특성이 있다. 단순화된 ACM II 모델의 주파수 응답 특성도 공통 소스 증폭기의 주파수 특성과 상당히 비슷해 단순화된 ACM II 모델의 정확성이 확인되었다.

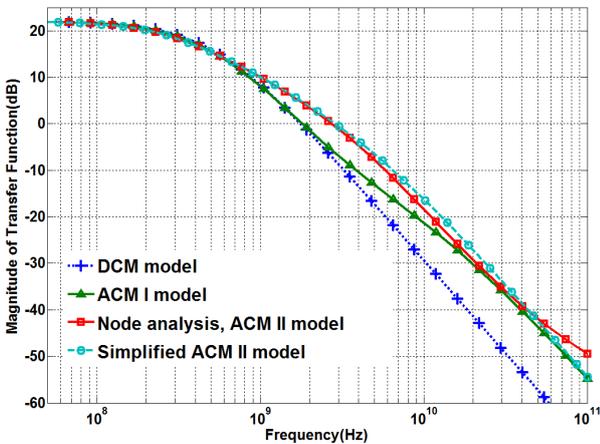


그림 8. 공통 소스 증폭기의 주파수 응답 특성
Fig. 8. The frequency response of the CS amplifier.

그림 9는 각 모델들의 주파수 응답 특성을 단위 이득 대역폭까지만 확대한 것이다. 주파수 응답 특성 그래프는 크게 2개의 그룹으로 분류된다. 공통 소스 증폭기, ACM II 모델, 그리고 단순화된 ACM II 모델의 주파수 응답 특성은 큰 차이가 없으며 DCM 모델과 ACM I 모델이 비슷한 오차를 가진다는 것을 확인할 수 있다.

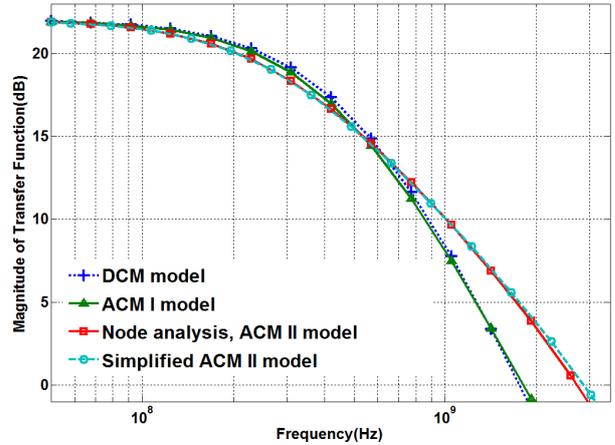


그림 9. 단위 이득 대역폭까지의 주파수 응답 특성
Fig. 9. The frequency response of the CS amplifier around unity gain frequency.

증폭기의 중요한 특성인 3-dB 주파수 부근을 확대해 보면 밀러 모델들의 주파수 오차를 확인할 수 있다. 그림 10이 각 밀러 모델의 3-dB 주파수 응답 특성이다. 공통 소스 증폭기와 ACM II 모델의 주파수 응답 특성은 일치하며 단순화된 ACM II 모델도 거의 비슷한 주파수 응답 특성을 보인다. 모의실험 결과 DCM 모델과 ACM I 모델의 3-dB 주파수 오차율은 각각 20%, 12%이다.

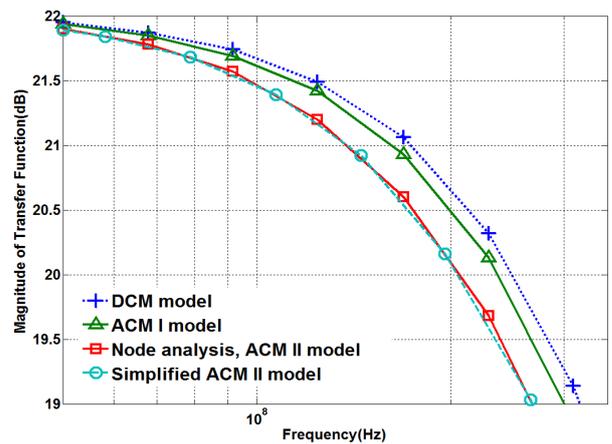


그림 10. 3-dB 부근의 주파수 응답 특성
Fig. 10. The frequency response of the CS amplifier around 3-dB frequency.

DCM 모델은 첫 번째 극점이 다소 크게 계산되지만 두 번째 극점은 매우 작게 계산된다. 그리고 영점은 나타낼 수 없다. 반면에 ACM I 모델은 추가된 저항이 2개의 극점 위치를 조정해 오차를 줄여준다. 그리고 영

점도 나타낼 수 있다. 본 논문에서 제안한 ACM II 모델은 추가된 저항에 병렬로 커패시턴스가 연결되어 회로는 다소 복잡해지지만 주파수가 높을 때 발생하는 오차를 없애 주파수 응답 특성은 공통 소스 증폭기와 같아진다. 그리고 단순화된 ACM II 모델의 주파수 응답 특성도 기존 모델보다는 정확성이 향상된다.

3. 3-dB 주파수

ACM II 모델의 등가회로가 조금 복잡해 보이지만 개방 회로 시정수 방법을 사용하면 3-dB 주파수를 쉽게 계산할 수 있다. 그림 6에서 개방 회로 시정수 방법을 적용해 입력 부분과 출력 부분의 3-dB 주파수를 구하면 다음과 같다.

$$\omega_{3dB, input} = \frac{1}{(1 - A_O)C_{XY}R_{in} + R_{in}C_{in} + R_{out}(C_{XY} + C_{out})},$$

$$\omega_{3dB, output} = \frac{1}{R_{out}(C_{XY} + C_{out})}$$

(9)

출력 부분의 분모 항은 입력 부분의 분모항에 이미 포함되어 있으며 입력 부분의 나머지 항들의 값도 충분히 크기 때문에 증폭기의 3-dB 주파수는 입력 부분에서 결정된다. 식 (9)에서 입력 부분의 3-dB 주파수 값은 공통 소스 증폭기에서 사용하는 주 극점 근사 방법의 결과와 일치한다. 각각의 밀러 효과 모델들에 개방 회로 시정수 방법을 사용하여 계산된 3-dB 주파수를 표 2에서 보여준다.

DCM 모델과 ACM I 모델이 약 48%, 32%의 큰 오차를 보이지만 ACM II 모델과 단순화된 ACM II 모델은 약 6%이내의 오차로 공통 소스 증폭기의 3-dB 주파수를 예측할 수 있다.

표 2. 개방 회로 시정수 방법을 사용한 3-dB 주파수
Table 2. 3-dB frequencies for different Miller effect models using open-circuit time constants method.

주파수 특성	밀러 효과 모델				Node analysis
	DCM	ACM I	ACM II	Simplified ACM II	
3-dB (MHz)	393	350	251	252	267
오차 (%)	48.3	32.1	-6	-5.6	0

ACM II 모델의 3-dB 주파수 예측에 관한 범용성을 확인하기 위해 CMOS 0.18 μm 공정 파라미터와 90 nm 공정 파라미터를 사용하여 공통 소스 증폭기를 설계하고 개방 회로 시정수 방법을 적용했다. 각 공정에 대한 밀러 모델들의 3-dB 주파수를 표 3에 나타내었다.

0.18 μm 의 경우 전류는 100 μA , 입력저항 3.6 K Ω , 출력저항 10 K Ω , 사이즈 비율은 30이다. 90 nm에서는의 경우 전류는 100 μA , 입력저항 6 K Ω , 출력저항 2.2 K Ω , 사이즈 비율은 30이다.

전체적으로 3-dB 주파수 오차가 줄어드는 경향은 있지만 DCM 모델은 약 26%의 오차를 보이며 ACM I 모델이 13%의 오차를 갖는다. ACM II 모델은 약 4%이내의 오차로 정확성이 매우 높음을 확인할 수 있다.

표 3. 0.18 μm 과 90 nm 공정 파라미터를 사용한 밀러 효과 모델들의 3-dB 주파수

Table 3. 3-dB frequencies for different Miller effect models using 0.18 μm and 90 nm CMOS parameter.

공정	주파수 특성	밀러 효과 모델			Node analysis
		DCM	ACM I	ACM II	
0.18 μm	3-dB (MHz)	396	356	327	315
	오차 (%)	25.7	13	3.8	0
90 nm	3-dB (GHz)	1.42	1.26	1.15	1.12
	오차 (%)	26.7	12.5	3.6	0

IV. 결 론

본 논문에서는 공통 소스 증폭기의 부유 커패시턴스에 밀러 정리를 적용할 때 정확한 AC 이득을 사용하여 ACM II 모델을 도출하였다. 제안한 ACM II 모델은 하나의 커패시턴스와 병렬 RC 회로의 직렬로 구성된다. 제안한 ACM II 모델을 사용한 주파수 응답 특성은 공통 소스 증폭기의 주파수 응답 특성과 일치해 ACM II 모델의 정확성이 확인되었다. 개방 회로 시정수 방법을 이용하여 3-dB 주파수도 예측 가능해 ACM II 모델의 효용성도 확인되었다.

REFERENCES

- [1] A. Sedra and K. Smith, *Microelectronic Circuit*. New York: Oxford, 1982.
- [2] B. Razavi, *Fundamentals of Microelectronics*. New York: Wiley, 2008.
- [3] Douglas N. Green, "An improved Miller effect model for high frequency behavior," *IEEE Trans. Educ.*, vol. 28, no. 3, pp 125-130, Aug. 1985.
- [4] A. B. Macnee, "On the presentation of Miller's theorem," *IEEE Trans. Educ.*, vol. E-28, no. 2, pp. 92-93, May 1985.
- [5] S. M. Potirakis and G. E. Alexakis, "The feedback decomposition theorem: The evolution of Miller's theorem," *Int. J. Electron.*, vol. 85, no. 5, pp. 571-587, Nov. 1998.
- [6] S. M. Potirakis and G. E. Alexakis, "An accurate calculation of Miller effect on the frequency response on the input and output impedance of feedback amplifier," *IEEE Trans. Circuit Syst. II*, vol. 52, no. 8, pp. 491-495, Aug. 2005.

저 자 소 개



이 순 재(학생회원)
2007년 전북대학교 전자정보
공학부 석사 졸업.
2013년 전북대학교 전자정보
공학부 박사 졸업.
<주관심분야 : Miller's Theorem,
Sigma-delta ADC, PLL>



이 동 건(학생회원)
2008년 전북대학교 전자정보
공학부 학사 졸업.
2010년 전북대학교 전자공학부
(전자공학) 석사 졸업.
2010년~현재 전북대학교 전자
정보공학부(전자공학)
박사과정.

<주관심분야 : 아날로그 IC, DC-DC 컨버터,
PMIC>



정 항 근(정회원)-교신저자
1977년 서울대학교 전자공학과
학사 졸업.
1979년 한국과학기술원 전기전자
공학 석사 졸업.
1989년 플로리다대학교 전기공학
박사 졸업.

1979년~1982년 한국 전자통신연구소 재직.
1989년~1991년 모토롤라 고급기술연구소 재직.
1991년~현재 전북대학교 전자정보공학부 교수
<주관심분야 : CMOS RF IC설계, PMIC, LED
driver>