

# 트리검색 기법을 이용한 희소신호 복원기법

이 재 석\*, 심 병 호<sup>o</sup>

## Sparse Signal Recovery Using A Tree Search

Jaeseok Lee\*, Byonghyo Shim<sup>o</sup>

### 요 약

본 논문에서는 트리검색 기반의 GTMP (matching pursuit with greedy tree search)이라는 새로운 희소신호 복원기법을 제안한다. 트리검색은 비용함수 (cost function)를 최소화함으로써 희소신호 복원 성능을 향상시키기 위해 적용하였다. 또한 각 노드마다 트리제거 (tree pruning)기법을 이용하여 효율적인 알고리즘을 개발하였다. 본 논문에서는 알고리즘의 성능분석을 통해 희소신호에서 영(0)이 아닌 값의 위치를 정확히 찾아내는 조건을 도출하였다. 그리고 실험을 통해 GTMP가 기존의 희소신호 복원기법에 비해 성능이 향상되었음을 보였다.

**Key Words** : Compressed sensing, greedy algorithm, sparse recovery, tree pruning, tree search

### ABSTRACT

In this paper, we introduce a new sparse signal recovery algorithm referred to as the matching pursuit with greedy tree search (GTMP). The tree search in our proposed method is implemented to minimize the cost function to improve the recovery performance of sparse signals. In addition, a pruning strategy is employed to each node of the tree for efficient implementation. In our performance guarantee analysis, we provide the condition that ensures the exact identification of the nonzero locations. Through empirical simulations, we show that GTMP is effective for sparse signal reconstruction and outperforms conventional sparse recovery algorithms.

### I. 서 론

문제로 표현할 수 있다.

근래 희소신호 (sparse signal)를 복원하는 기법으로서 압축센싱 (compressed sensing)이 많은 주목을 받고 있다<sup>1-10)</sup>. 압축센싱은 신호에 내재된 희소성을 이용하여 적은 수의 관측치 만으로 원 신호를 완벽하게 복원하는 새로운 패러다임을 일컫는다. 원 신호벡터  $x$ 가 희소한 경우 측정신호 (measurement)  $y = \Phi x$ 로부터 원 신호를 복원하는 문제는 아래에 보이는 것처럼  $l_0$ -norm 최소화 ( $l_0$ -norm minimization)

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{subject to } y = \Phi x \quad (1)$$

여기서  $\Phi \in R^{M \times N}$ 는 측정행렬 혹은 센싱행렬 (sensing matrix)로 불리우며  $M < N$ 인 경우 과소결정 행렬 (underdetermined matrix)이 된다.  $l_0$ -norm 최소화 문제를 풀기 위해서는 신호벡터의 영 아닌 원소의 개수를 증가시켜 가면서 (1)식의 제약조건을 만

\* 본 연구는 미래창조과학부 및 정보통신기술연구진흥센터의 정보통신·방송 연구개발사업의 일환으로 수행하였음. [I291101110-13001 0100100, 차세대 무선통신 시스템을 위한 주파수 효율 향상 기술 연구]

※ 이 논문은 2013년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2012R1A2A2A01047510)."

• First Author : Korea University School of Information and Communication jslee@islab.snu.ac.kr, 학생회원

o Corresponding Author : Seoul National University Department of Electrical Engineering bshim@snu.ac.kr, 종신회원

논문번호 : KICS2014-10-427, Received October 22, 2014; Revised November 27; Accepted November 27, 2014

즉시키는 해를 찾는 과정이 필요하며 NP-hard의 복잡도를 갖는다. 지난 몇 년간  $l_0$ -norm 최소화 방법의 복잡도를 줄이기 위한 여러 종류의 희소신호 복원기법들이 제안되었다. 이러한 기법들은 큰 관점에서 두 종류로 분류할 수 있다. 첫째는,  $l_1$ -norm 최소화에 기반한 기법으로, 이에 Basis Pursuit (BP)<sup>[1]</sup>, BP Denoising (BPDN)<sup>[5,10]</sup>, Dantzig Selector (DS)<sup>[6]</sup> 등이 존재한다. 또 다른 방식으로는 greedy 기법이 있으며 이에 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)<sup>[7]</sup>, Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP)<sup>[8]</sup>, generalized OMP (gOMP)<sup>[9]</sup> 등이 있다. Greedy 기법은 반복적인 방식으로, 즉 한 번에 하나씩 영이 아닌 원소의 위치를 찾아가면서, 희소 신호의 서포트 (support, 영이 아닌 값의 위치)를 추정한다. 잘 알려진 직교매칭퍼슈트 (orthogonal matching pursuit, OMP)기법의 경우<sup>[7]</sup> 센싱행렬 중 측정신호 혹은 잔차 (residual)와 가장 상관도 (correlation)가 높은 열벡터 (column vector)를 선택한 후, 선택한 열벡터들을 이용하여 잔차 (residual)를 갱신하는 과정을 반복함으로써 서포트를 추정해낸다. 일반적으로 greedy 기법은  $l_1$ -norm 최소화기법에 비해 복잡도가 낮고 쉽게 구현할 수 있지만, 성능이 다소 떨어진다는 단점이 있다.

본 논문에서는 효과적인 희소신호 복원을 위한 GTMP (matching pursuit with greedy tree search)기법을 제안한다. GTMP기법은 기본적으로 greedy 알고리즘과 트리검색 기법을 결합함으로써 희소신호 복원성능을 향상시키는 알고리즘이다. 트리검색에 요구되는 복잡도를 줄이기 위하여 가능성이 없는 노드를 신속하게 제거하는 트리제거 (tree pruning)기법을 이용하여 트리검색의 효율성을 향상시킨다. 여기서 트리를 구성하는 노드 (node) 혹은 경로 (path)는 인덱스의 조합으로 이루어지는데, 이는 각자 위치한 층 (layer)에 해당하는 숫자만큼의 인덱스를 포함하고 있다 (그림 1 참고). GTMP기법의 목적은  $K$ 개의 인덱스로 이루어진 서포트를 검출하는 것인 만큼, 트리는  $K$ 개의 층으로 구성되어 있다. GTMP기법은 사전탐색 (pre-search)과 트리검색 (tree search)의 두 단계로 구성되어 있다. 사전탐색 단계에서는 트리를 구성하는 경로의 수를 줄이기 위해, 즉 트리검색의 복잡도를 사전에 제어하기 위해, 센싱행렬  $\Phi$ 의 열벡터의 일부를 사전에 선택한다. 전체 인덱스의 집합을  $\Omega$ 라고 할 때 ( $|\Omega| = N$ ), 사전탐색을 통해 얻어진 인덱스 집합  $\Theta$ 는  $\Omega$ 의 부분집합이며  $\Theta$  집합의 원소의 수는  $N$ 보

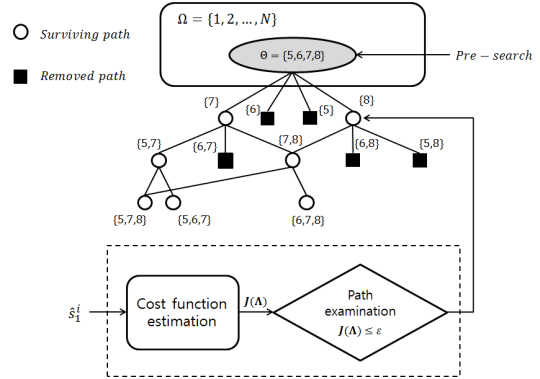


그림 1. GTMP기법의 구조  
Fig. 1. Illustration of GTMP algorithm

다 작다 ( $|\Theta| \ll N$ ). 본 과정을 통해 트리검색 단계에서 방문해야 하는 노드의 수를  $\binom{N}{K}$ 에서  $\binom{|\Theta|}{K}$ 로 크게 줄일 수 있다. 트리검색 단계에서는 각 열벡터의 인덱스 (vector index)의 조합으로 이루어진 경로들로 구성된 트리구조에서 서포트를 추정한다 (그림 1 참고). 그리고 트리검색의 복잡도를 낮추기 위해 불필요한 경로에 대한 탐색을 사전에 차단하는 트리제거 기법을 적용한다. 본 논문에서 제안하는 트리제거 기법은 부분적 비용함수만 사용하는 종래의 트리검색 기법과는 달리<sup>[11-13]</sup>, 기본적으로 검색의 중간 단계에서 각 경로의 비용함수를 예측하여 비용함수가 클 것으로 예측되는 경로를 제거함으로써 이루어진다. 구체적으로는, 각 경로마다 이미 방문한 사전경로 (causal path)와 향후 방문할 것으로 예상되는 사후경로 (noncausal path)를 결합하여 가상의 경로를 구성한 후 이 경로의 비용함수 (cost function)를 주어진 문턱값 (threshold)과 비교하여 경로의 제거여부를 결정한다. 주어진 경로의 비용함수가 문턱값보다 큰 경우 궁극적으로 선택되기 어려운 경로로 간주하여 트리로부터 바로 제거한다.

본 논문에서는 GTMP기법을 제한함과 동시에, 서포트의 크기가  $K$ 인 희소신호를 완벽하게 복원하기 위한 충분조건을 분석한다. 구체적으로는 제한적 등방성 (restricted isometry property, RIP)을 사용하여, 잡음환경에서 최소도가  $K$ 인 희소신호의 서포트를 오류 없이 검출하기 위한 충분조건을 분석한다. 또한 모의 실험을 통해 GTMP가 기존의 기법들보다 성능이 우수하면서도 복잡도가 크게 증가하지 않음을 보인다. 특히, GTMP의 성능을 오라클 추정기 (oracle estimator)와 비교하는데, 오라클 추정기는 희소신호

의 서포트에 대한 사전정보가 주어진 추정기로서 회소신호의 복원성능의 하한을 제공한다. 모의실험을 통해 GTMP의 성능이 오라클 추정기의 성능에 근접함을 보임으로써 GTMP가 최적으로 가까운 알고리즘인 것을 보인다.

## II. 본 론

### 2.1 Greedy 트리검색을 이용한 매칭퍼숫

#### 2.1.1 사전탐색

사전탐색의 목적은 서포트일 확률이 높은 열벡터의 인덱스를 선택하는 것이다. GTMP는 사전탐색 과정을 통해 측정신호 ( $y$ 로 표시) 혹은 잔차 ( $r$ 로 표시)와 상관도가 큰 열벡터들의 인덱스를 미리 선택하고, 미리 선택된 인덱스들로만 이루어진 트리를 구성한다. 사전탐색을 통해 선택한 인덱스의 집합을  $\Theta$ 라고 하면,  $\Theta$ 가 전체 인덱스 집합  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ 의 부분집합임은 자명하다. 사전탐색을 수행하기 위해서는 기존에 사용되는 greedy 기법을 이용할 수 있는데, 원신호의 회소도인  $K$ 보다 많은 인덱스를 선택함으로써 서포트 인덱스 (support index)의 오검출율 (mis-detection ratio)을 충분히 낮게 만드는 것이 중요하다. 본 논문에서는 사전탐색 알고리즘으로 일반화된 직교매칭퍼숫 (generalized OMP; gOMP)기법<sup>[9]</sup>을 사용한다. gOMP기법은 한번에  $L$ 개의 인덱스를 선택하는 과정을 원신호의 회소도 만큼 ( $K$ 회) 반복한다. gOMP에서  $L$ 은 주로 1보다 큰 수를 선택하는데, 선택하는 인덱스가 충분히 많은 만큼 (총  $LK$ 개의 인덱스를 선택) 서포트 인덱스의 오검출율을 매우 낮게 만들 수 있다.

#### 2.1.2 트리검색

사전탐색을 통해  $\Theta$ 를 얻은 후에 트리검색을 수행하여 서포트를 검출한다. 트리는  $K$ 개의 층 (layer)으로 이루어져 있고, 각 층의 노드는 신호벡터의 인덱스들로 구성되어 있다.

트리검색의 목적은 트리의 경로 중 비용함수를 최소화하는 경로를 찾는 것이며, 이 비용함수는 잔차의  $l_2$ -norm으로 정의된다 ( $J(\Lambda) = \|r_\Lambda\|_2 = \|y - \Phi_\Lambda x_\Lambda\|_2$ ). 트리구조의 각 노드는 지금까지 구한 인덱스에 포함되지 않은  $\Theta$ 의 원소를 사용하여 새로운 자식노드를 만든다 (그림 1 참고). 주어진 노드에서 트리제거를 수행하기 위해서는 사전경로

(causal path) 외에도 사후경로 (noncausal path)를 예측한 후 사전경로와 사후경로를 결합한 경로의 비용함수를 계산해야 한다. 예를 들어,  $i$ 번째 층에서의 경로를  $\hat{s}_1^i$ 라고 하면,  $\hat{s}_1^i = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$ 는 첫 번째부터  $i$ 번째 층까지 선택한 인덱스들로 이루어진 사전경로이다. 이에 대한 사후경로는 사전경로  $\hat{s}_1^i$ 로부터 얻은 잔차와 가장 큰 상관도를 가지는  $K-i$ 개의 열벡터 인덱스들을 선택함으로써 얻을 수 있다. 사후경로는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{s}_{i+1}^{-K} = \arg \max_{s \subset \Omega \setminus \hat{s}_1^i} \|\Phi_s' r_{\hat{s}_1^i}^{-K}\|_2 \quad (2)$$

여기서  $r_{\hat{s}_1^i}^{-K} = y - \Phi_{\hat{s}_1^i} \hat{x}_{\hat{s}_1^i}$ 이고,  $\hat{x}_{\hat{s}_1^i} = \Phi_{\hat{s}_1^i}^+ y$ 이다. 사후경로를 얻은 후 이를 사전경로와 결합하여 가장의 경로  $\tilde{s}_1^{-K}$  ( $\tilde{s}_1^{-K} = \hat{s}_1^i \cup \tilde{s}_{i+1}^{-K}$ )를 만들어내며, 이를 이용하여 잔차 및 비용함수를 예측한다.

$$r_{\tilde{s}_1^{-K}} = y - \Phi_{\tilde{s}_1^{-K}} \hat{x}_{\tilde{s}_1^{-K}} \quad (3)$$

$$J(\tilde{s}_1^{-K}) = \|y - \Phi_{\tilde{s}_1^{-K}} \hat{x}_{\tilde{s}_1^{-K}}\|_2 \quad (4)$$

다음으로 경로  $\hat{s}_1^i$ 의 제거 여부를 결정하기 위해서 예측한 비용함수를 문턱값과 비교한다. 만일 비용함수가 문턱값보다 작다면 (즉,  $J(\tilde{s}_1^{-K}) \leq \epsilon$ ) 이 경로의 인덱스들은 서포트일 가능성이 높다고 판단하여 계속 탐색하고, 반대의 경우 이 경로를 트리로부터 제거한다. 또한 각 층에서 살아남은 경로들에 한해서, 그 중 가장 작은 비용함수를 이용하여 다음 층에서의 문턱

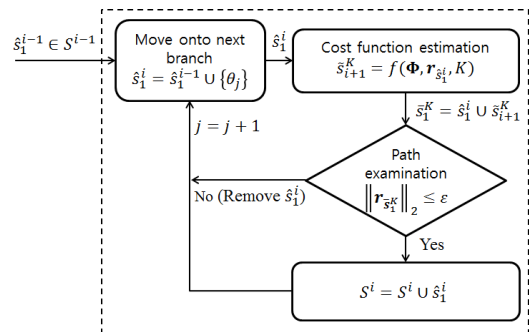


그림 2. 트리검색 단계에서의 트리제거 기법  
Fig. 2. Tree pruning strategy in tree search stage

표 1. GTMP기법  
Table 1. The GTMP Algorithm

---

**Input :** measurement  $y$ , sensing matrix  $\Phi$ , sparsity level  $K$ , initial threshold  $\epsilon_1$

**Output :** Reconstructed signal  $\hat{x}$

**Initialization :**  $i = 0, S^0 = \emptyset$

---

$\Theta = f(y, \Phi, K)$

**while**  $i < K$  **do**

$i := i + 1, S^i := \emptyset, \epsilon_{i+1} := \epsilon_i$

**for**  $l = 1$  **to**  $|S^{i-1}|$  **do**

$\theta := \Theta \setminus \widehat{s}_1^{i-1}(l)$

**for**  $j = 1$  **to**  $|\theta|$  **do**

$\widehat{s}_1^i := \widehat{s}_1^{i-1}(l) \cup \{s_i(j)\}$

**if**  $\widehat{s}_1^i \not\subseteq S^i$

$\widehat{s}_{i+1}^K = \arg \max_{s \subset \Omega, |s|=K-i} \|\Phi_s' r_{\widehat{s}_1^i}\|_2$

$\widehat{s}_1^K = \widehat{s}_1^i \cup \widehat{s}_{i+1}^K, x_{\widehat{s}_1^K} = \Phi_{\widehat{s}_1^K}^+ y$

$r_{\widehat{s}_1^K} = y - \Phi_{\widehat{s}_1^K} x_{\widehat{s}_1^K}$

**if**  $\|r_{\widehat{s}_1^K}\|_2 \leq \epsilon_i$

$S^i := S^i \cup \widehat{s}_1^i, I^* = \widehat{s}_1^K$

**if**  $\|r_{I^*}\|_2 \leq \epsilon_{i+1}$

$\epsilon_{i+1} := \|r_{I^*}\|_2$

**end if**

**end if**

**end for**

**end for**

**end while**

**return**  $\hat{x}^* = \Phi_{I^*}^+ y$

---

값을 갱신한다. 트리검색 단계에서는 이러한 과정을 통해  $K$ 번째 층에서 최종적으로 살아남은 인덱스 조합 중 가장 작은 비용함수를 가지는 인덱스 조합을 서포트의 예측치로 결정한다 (그림 2 참고). 본 논문에서 제안하는 GTMP기법의 과정을 표 1에 정리하였다.

### 2.2 성능 분석

본 절에서는 GTMP기법이 잡음환경에서 희소도가  $K$ 인 신호  $x$ 의 서포트를 완벽하게 검출하기 위한 충분조건을 분석한다. 참고로 잡음이 있는 환경에서는 서포트  $T$ 를 완벽히 식별하더라도 아래의 식에서 보이는 바와 같이 원 신호의 완벽한 복원은 가능하지 않다.

$$\hat{x}_T = \Phi_T^+ y = \Phi_T^+ (\Phi_T x_T + v) = x_T + \Phi_T^+ v \quad (5)$$

GTMP가 서포트를 완벽히 검출하기 위한 충분조건은 아래에 나타난 바와 같이 사전탐색 조건과 트리검색 조건을 결합하여 구할 수 있다.

사전탐색 조건: 사전탐색을 통해 최소한 하나의 서포트 인덱스가 선택되어야 한다 ( $T \cap \Omega \neq \emptyset$ ).

트리검색 조건: 서포트 인덱스만을 포함한 경로 ( $\widehat{s}_1^i \subset T$ )가 제거되지 않고 트리검색에서 살아남아야 한다.

앞서 언급한 바와 같이 본 논문에서는 사전탐색을 위해 gOMP기법을 사용하는데, 주어진 사전탐색 조건은 다음의 조건을 만족할 때 성립한다.

**정리 1:** 희소도가  $K$ 인 신호벡터  $x$ 가 다음에 주어진 조건을 만족하는 경우, 사전선택에서 최소한 하나의 서포트 인덱스가 선택된다.

$$\min_{j \in T} |x_j| \geq \frac{(\sqrt{K} + \sqrt{L}) \sqrt{1 + \delta_{L+K}} \|v\|_2}{\sqrt{L}(1 - \delta_K) - \sqrt{K}(\delta_{L+K})} \quad (6)$$

증명:

본 증명에서는 측정신호  $y$ 와 센싱행렬  $\Phi$ 의 열벡터들 간의 상관도를 비교한다. 구체적으로 서포트에 해당하는 열벡터들과 측정신호와의 상관도 중 최대값을  $\rho$ , 서포트가 아닌 열벡터들과 측정신호와의 상관도 중  $L$ 번째로 큰 값을  $\eta$ 라고 하였을 때,  $\rho$ 의 값이  $\eta$ 보다 큰 경우 사전선택을 통해 최소한 하나의 서포트 인덱스를 선택할 수 있다. 서포트 인덱스의 선택을 보장하기 위한 조건을 구하기 위해서  $\rho$ 의 하한이  $\eta$ 의 상한보다 클 조건을 구한다. 여기서  $\rho$ 은

$$\rho = \max_{j \in T} |\phi_j' y| = \|\Phi_T' y\|_\infty \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{\sqrt{|T|}} \|\Phi_T' y\|_2 \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{|K|}} \left( \|\Phi_T' \Phi_T x_T\|_2 - \|\Phi_T' v\|_2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

와 같이 표현할 수 있는데, 제한적 등방성(RIP)을 이용하여 (8)식의 각 항의 하한과 상한을 구하면 다음과 같다.

$$\| \Phi_T' \Phi_T x_T \|_2 \geq (1 - \delta_K) \| x_T \|_2 \quad (9)$$

$$\| \Phi_T' v \|_2 \leq \sqrt{1 + \delta_K} \| v \|_2 \quad (10)$$

그러므로  $\rho$ 의 하한은

$$\rho \geq \frac{1}{\sqrt{|K|}} ((1 - \delta_K) \| x_T \|_2 - (1 + \delta_K) \| v \|_2) \quad (11)$$

와 같다. 다음으로,  $\eta$ 는 서포트가 아닌 열벡터들과 측정신호와의 상관도 중  $L$ 번째로 큰 값이며 다음을 만족한다.

$$\sqrt{L} \eta \leq \sqrt{\sum_{j \in L} |\phi_j' y|} = \| \Phi_{L'}' y \|_2 \quad (12)$$

여기서 (12)의 오른쪽 항의 상한은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \| \Phi_{L'}' y \|_2 &= \| \Phi_{L'}' (\Phi_T x_T + v) \|_2 \\ &\leq \delta_{L+K} \| x_T \|_2 + \sqrt{1 + \delta_L} \| v \|_2 \end{aligned} \quad (13)$$

그러므로  $\eta$ 의 상한은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta \leq \frac{(\delta_{L+K} \| x_T \|_2 + \sqrt{1 + \delta_L} \| v \|_2)}{\sqrt{L}} \quad (14)$$

정리 1의 충분조건은 (8)과 (14)식 및  $\rho \geq \eta$ 의 관계로부터 얻을 수 있다. ■

다음으로 트리검색 단계에서의 조건은 다음의 두 가지 조건이 성립할 때 만족된다.

사후경로 조건: 인덱스가 모두 서포트인 경로  $\hat{s}_1^i \subset T$ 에 대해서, 이에 대한 사후경로 역시 서포트 인덱스만을 포함해야 한다 ( $\tilde{s}_{i+1}^K \subset T \setminus \hat{s}_1^i$ ).

서포트 조건:  $\hat{s}_1^i \subset T$ 를 만족하는 경로가 트리검색 과정에서 제거되지 않아야 한다. 즉, 첫 번째 조건을 만족하는  $\hat{s}_1^i \subset T$ 의 경우  $\| r_{\hat{s}_1^i}^- \|_2 = \| r_T \|_2 < \epsilon$ 를 만족한다.

사후경로 조건은 센싱행렬  $\Phi$ 가 다음의 RIP조건을

만족할 때 성립한다.

**정리 2:** 서포트 인덱스만을 포함한 경로  $\hat{s}_1^i$  ( $\hat{s}_1^i \subset T$ )에 해당하는 사후경로는 다음의 조건을 만족할 때 서포트 인덱스만을 포함한다 ( $\tilde{s}_{i+1}^K \subset T \setminus \hat{s}_1^i$ ).

$$\min_{j \in T} |x_j| > \frac{2(1 - \delta_K) \sqrt{1 + \delta_M}}{1 - \delta_K - \delta_{K+1} - \delta_M} \| v \|_2 \quad (15)$$

증명:

본 증명을 위해 다음 두 상수를 정의한다.

$$\beta^i = \min_{j \in T \setminus \hat{s}_1^i} |\phi_j' r_{\hat{s}_1^i}| \quad (16)$$

$$\alpha^i = \max_{j \in \Omega \setminus T} |\phi_j' r_{\hat{s}_1^i}| \quad (17)$$

즉,  $\beta^i$ 는  $\hat{s}_1^i \subset T$ 를 만족하는 경로로부터 얻은 잔차와 서포트 열벡터 사이의 가장 작은 상관도를 뜻하고,  $\alpha^i$ 는 서포트가 아닌 열벡터와의 가장 큰 상관도를 나타낸다. 정리 2의 조건을 구하기 위해서는  $\beta^i \geq \alpha^i$ 의 조건을 얻을 필요가 있는데, 이를 위해 본 증명에서는  $\beta^i$ 의 하한과  $\alpha^i$ 의 상한을 구하여 비교한다. 먼저  $\beta^i$ 의 하한은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} |\phi_j' r_{\hat{s}_1^i}| &= \| \phi_j' r_{\hat{s}_1^i} \|_2 = \| \phi_j' P_{\hat{s}_1^i}^\perp y \|_2 \\ &\geq \left( 1 - \delta_M - \frac{\delta_{K+1} \delta_K}{1 - \delta_K} \right) \| x_{T \setminus \hat{s}_1^i} \|_2 \\ &\quad - \sqrt{1 + \delta_M} \| \phi_j' P_{\hat{s}_1^i}^\perp v \|_2 \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $P_{\hat{s}_1^i} = \Phi_{\hat{s}_1^i} (\Phi_{\hat{s}_1^i}' \Phi_{\hat{s}_1^i})^{-1} \Phi_{\hat{s}_1^i}'$ 는 투영행렬 (projection matrix)이다. 다음으로  $\alpha^i$ 의 상한은 다음과 같다.

$$|\phi_j' r_{\hat{s}_1^i}| = \| \phi_j' r_{\hat{s}_1^i} \|_2 = \| \phi_j' P_{\hat{s}_1^i}^\perp y \|_2 \quad (19)$$

$$\leq \left( \delta_{K+1} + \frac{\delta_{K+1}\delta_K}{1-\delta_K} \right) \|x_{T \setminus s_1}\|_2 + \sqrt{1+\delta_M} \|v\|_2 \quad (20)$$

정리 2의 조건은 (22)에서  $\beta^i$ 의 하한과 (27)에서  $\alpha^i$ 의 상한을 비교하여  $\beta^i \geq \alpha^i$ 가 되는 조건을 얻음으로써 구할 수 있다. ■

다음으로 서포트 조건을 만족하기 위해서는  $K$ 개의 인덱스로 이루어진 인덱스 조합 중 서포트에 해당하는 잔차의 norm값이 최소값을 가져야 한다. 즉,  $T = \arg \min_{|I|=K} \|r_I\|_2$  를 만족해야 하는데 이에 대한 충분조건은 다음과 같다.

**정리 3:** 희소신호가 다음의 조건을 만족할 때, 서포트  $T$ 로부터 얻어진 잔차의 norm값이 모든 인덱스 조합 중 최소값을 가진다.

$$\min_{j \in T} |x_j| > \frac{2(1-\delta_K)}{1-3\delta_{2K}} \|v\|_2 \quad (21)$$

증명:

정리 3의 조건은 서포트의 잔차 norm값의 상한과 서포트가 아닌 인덱스 조합의 잔차의 하한을 비교, 즉  $\|r_T\|_2 < \|r_I\|_2$ 를 만족하는 조건을 구함으로써 얻을 수 있다( $|I|=|T|=K$ ,  $I \neq T$ ). 먼저  $\|r_T\|_2$ 의 상한은 다음과 같다.

$$\|r_T\|_2 = \|P_T^\perp y\|_2 \leq \|v\|_2 \quad (22)$$

그리고  $\|r_I\|_2$ 의 하한은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \|r_I\|_2 &= \|P_I^\perp y\|_2 \\ &= \|P_I^\perp (\Phi_T x_T + v)\|_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sqrt{1-\delta_{2K}} \|x_{T \setminus I}\|_2 \\ &- \frac{\sqrt{1+\delta_K}\delta_{2K}}{1-\delta_K} \|x_{T \setminus I}\|_2 - \|v\|_2 \end{aligned} \quad (24)$$

정리 3을 만족하는 조건은 (30)과 (34)를 비교하여  $\|r_T\|_2 < \|r_I\|_2$ 인 조건을 구하여 얻는다. ■

정리하면, GTMP기법은 정리 1부터 정리 3까지의 조건들이 동시에 충족되었을 때 서포트를 완벽하게 검출해낸다. 정리 1, 2, 그리고 3을 종합하면 다음과 같다.

**정리 4:** GTMP기법은 아래에 주어진 조건이 만족될 때 희소도가  $K$ 인 신호벡터의 서포트를 완벽하게 검출해낸다.

$$\min_{j \in T} |x_j| > \gamma \|v\|_2 \quad (25)$$

여기서  $\gamma = \max\{\nu, \mu, \xi\}$ ,  $\mu = \frac{2(1-\delta_K)}{1-3\delta_{2K}}$ ,  $\nu = \frac{(\sqrt{K} + \sqrt{L})\sqrt{1+\delta_{L+K}}}{\sqrt{L}(1-\delta_K) - \sqrt{K}\delta_{L+K}}$ , 그리고  $\xi = \frac{2(1-\delta_K)\sqrt{1+\delta_M}}{1-\delta_K-\delta_{K+1}-\delta_M}$  이다.

정리 4를 만족하는 희소신호의 경우 GTMP는 서포트를 완벽히 검출할 수 있다. (25)식은 서포트의 완벽한 검출을 위해서는 신호의 크기가 잡음의  $l_2$ -norm보다 충분히 큰 경우 성립하는데, 이는 근본적으로 GTMP기법은 높은 신호 대 잡음비 (signal-to-noise ratio; SNR) 환경에서 오라클 추정기의 성능에 가까워지는 것을 의미한다. 다음 장에서의 실험 결과로부터 이를 확인할 수 있다.

### III. 모의실험

#### 3.1 실험 환경

모의실험에서는 GTMP기법의 성능 확인을 위해 제안하는 GTMP기법과 BPDN기법, OMP, CoSaMP, 그리고 gOMP를 비교 실험하였다. 또한 GTMP기법의 성능이 최적의 성능에 근접함을 확인하기 위하여 서포트의 정보가 주어진 오라클 최소제곱법 (oracle least square; oracle LS) 추정기법 역시 실험하였다. 모의실험에는 가우스 분포로 이루어진  $100 \times 256$  크기의 5,000 가지 관측행렬과 가우스 분포 값으로 구성된 희소신호를 사용하였다. 잡음환경에서는 원 신호의 완벽한 복원이 어렵기 때문에 성능을 측정하기 위해 MSE를 측정하였다. 모의실험을 수행하면서 GTMP의 복잡도를 조정하기 위해 트리구조의 각 층에서의 총 노드 수를  $N_{\max} = 10$ 으로 제한한 경우에 대한 실험을 수행하였다. GTMP의 사전선택 단계에서는  $L = 2$ 인 gOMP기법을 사용하였다.

### 3.2 실험 결과

그림 3과 그림 4는 잡음이 있는 상황에서 영이 아닌 신호의 개수(희소도)가 20 그리고 35일 때의 MSE 성능결과로서 x축은 SNR, y축은 MSE를 나타낸다. 그림 4의 경우, OMP와 GTMP가 SNR이 높아질수록 오라클 LS에 근접한 성능을 나타내는 동시에 OMP, CoSaMP, gOMP, 그리고 BPDN기법보다 MSE 성능이 좋았다. 영이 아닌 신호의 개수가 35인 그림 5에서는 GTMP기법과 다른 기법들의 성능 차이가 더욱 벌어짐을 알 수 있다. 특히 기존의 기법들의 성능이 높은 SNR에서 더 이상 향상되지 않음에 비해, 제안된 GTMP기법의 성능은 여전히 오라클 LS에 근접하고 있음을 확인할 수 있다. 또한 GTMP기법은 각 층에서의 노드의 수를 제한한 경우에도 기존의 기법들에 비해 월등히 우수한 성능을 보이고 있다.

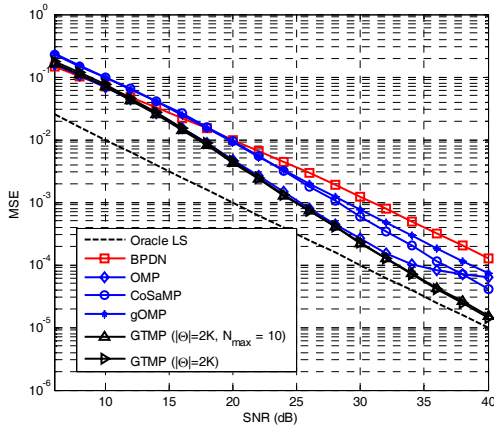


그림 3.  $K=20$  일 때의 SNR에 따른 MSE 성능 비교  
Fig. 3. MSE Performance vs. SNR when  $K=20$

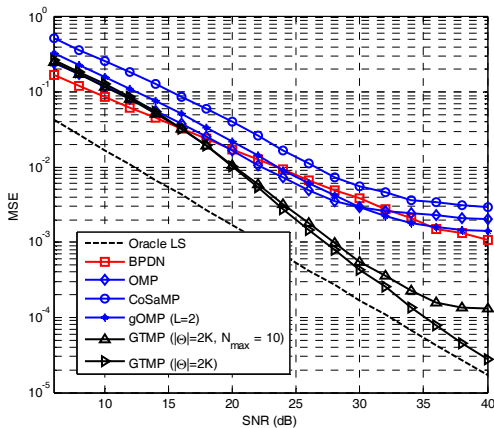


그림 4.  $K=35$  일 때의 SNR에 따른 MSE 성능 비교  
Fig. 4. MSE Performance vs. SNR when  $K=35$

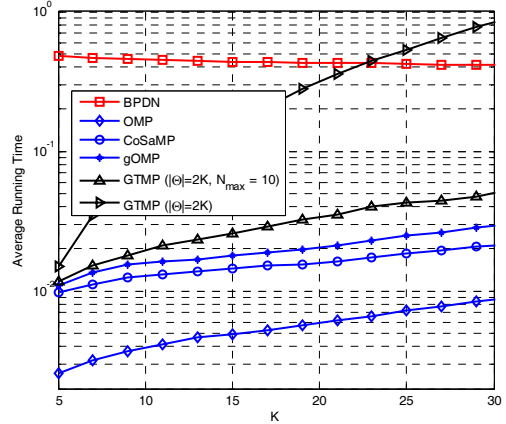


그림 5. 희소도( $K$ )에 따른 희소신호 복원기법의 복잡도  
Fig. 5. Complexity of sparse signal recovery algorithms as a function of sparsity level ( $K$ )

그림 5는 희소도에 따른 희소신호 복원기법의 복잡도를 나타내고 있다. 트리검색 단계를 거치면서 많은 경로를 탐색하는 만큼, 제안된 GTMP기법의 복잡도가 기존의 greedy 기법에 비해 다소 높음을 알 수 있다. 하지만 노드의 수를  $N_{max} = 10$ 로 제한한 경우 복잡도가 기존의 greedy 기법에 비해 크게 증가하지 않으며, BPDN기법과 비교하여 훨씬 낮은 것을 확인할 수 있다.

### IV. 결론

본 논문에서는 트리제거 기법을 적용하여 희소신호를 복원하는 GTMP기법을 제안하였다. 제안된 GTMP기법은 기존의 greedy 기법과 트리검색 기법을 결합하여 비용함수를 최소화함으로써 희소신호 복원 성능을 향상시킨다. 또한 트리검색 단계에서 비용함수가 클 것이라 예상되는 경로를 신속하게 제거하는 트리제거 기법을 적용함으로써 트리검색의 복잡도를 크게 감소시켰다. 본 논문에서는 GTMP의 성능 분석을 통해 제안된 기법이 서포트를 완벽하게 검출하기 위한 충분조건을 구하였다. 그리고 모의실험을 통해 GTMP 기법이 효과적으로 희소신호를 복원함을 보였으며, 기존의 기법들에 비해 우수한 성능을 얻을 수 있음을 확인하였다. 특히 GTMP기법의 복잡도가 기존 기법들에 비해 크게 증가하지 않음과 동시에 최적의 성능에 근접함을 확인할 수 있었다.

References

[1] E. J. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Feb. 2006.

[2] E. J. Candes and T. Tao, "Decoding by linear programming," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215, Dec. 2005.

[3] E. Liu and V. N. Temlyakov, "The orthogonal super greedy algorithm and applications in compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 58, no. 4, pp. 2040-2047, Apr. 2012.

[4] E. J. Candes, "The restricted isometry property and its implications for compressed sensing," *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 346, no. 9-10, pp. 589-592, May 2008.

[5] R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso," *J. Royal Stat. Soc. Series B*, vol. 58, no. 1, pp. 267-288, 1996.

[6] E. Candes and T. Tao, "The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n," *The Annal. Stat.*, vol. 35, no. 6, pp. 2313-2351, Dec. 2007.

[7] T. Tony Cai and L. Wang, "Orthogonal matching pursuit for sparse signal recovery with noise," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 57, no. 7, pp. 4680-4688, Jul. 2011.

[8] D. Needell and J. A. Tropp, "CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Commun. ACM*, vol. 53, no. 12, pp. 93-100, Dec. 2010.

[9] J. Wang, S. Kwon, and B. Shim, "Generalized orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 12, pp. 6202-6216, Dec. 2012.

[10] S. S. Chen, D. L. Donoho, and Michael A. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," *SIAM J. Scientific Computing*, vol. 20, no. 1, pp. 33-61, 1998.

[11] J. Park, I. Kim, H. Song, and S. Han, "Iterative detection and decoding of LDPC-Coded multiuser uplink massive-MIMO systems," *J. KICS*, vol. 39A, no. 9, pp. 528-

534, Sept. 2014.

[12] K. Lim, J. Lee, S. Kim, D. Pak, and S. Lee, "Intra prediction algorithm using adaptive modes," *J. KICS*, vol. 38A, no. 6, pp. 492-503, Jun. 2013.

[13] S. Park and S. Choi, "An MMSE based iterative soft decision interference cancellation scheme for massive MIMO systems," *J. KICS*, vol. 39A, no. 9, pp. 566-568, Sept. 2014.

이 재 석 (Jaeseok Lee)



2008년 : 고려대학교 전파통신 공학과 졸업  
 2010년 : 고려대학교 컴퓨터전파통신공학과 석사  
 2010년~현재 : 고려대학교 컴퓨터전파통신공학과 박사과정 <관심분야> 압축센싱 신호처리, 통신신호처리

심 병 호 (Byonghyo Shim)



1995년 : 서울대학교 제어계측 공학과 졸업  
 1997년 : 서울대학교 제어계측 공학과 석사  
 2004년 : University of Illinois at Urbana - Champaign 전기컴퓨터공학과 박사  
 2005~2007 : Qualcomm Inc. 책임연구원  
 2007~2014 : 고려대학교 정보통신대학 부교수  
 2014~현재 : 서울대학교 전기컴퓨터공학과 부교수 <관심분야> 통신신호처리, 검출 및 추정이론, 압축 센싱 신호처리, 정보이론