韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmec.2014.17.3.253
2014. 12. 제 17권, 제 3호, 253-263

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Dec. 2014, Vol. 17, No. 3, 253-263

# 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용에 대한 공리적 해석

도 종 훈 (서원대학교)
박 윤 범 (서원대학교)

본고에서는 도형의 넓이에 대한 정의 및 그 속에 내재된 공리와 그 의미를 고찰하고, 이들 공리의 관점에서 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용을 해석하였다. 이를 통해 현행 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용이 넓이 공리의 관점에서 볼 때 넓이 개념의 여러 측면 중 어떤 측면에 초점을 두고 있고 어떤 측면이 소홀히 다루어지고 있는지 살펴보았다. 이에 따르면 현행 초등학교 수학의 넓이 지도에서는 넓이의 합동 불변성과 가법성을 이용한 넓이의 직접 비교 관련 내용이 수치화를 통한 넓이의 간접 비교에 비해 그 비중이 작으며, 전체적으로 단위넓이 및 이를 이용한 넓이의 간접 비교가 넓이 지도 내용의 핵심을 이루는 것으로 나타났다.

## I. 서론

도형의 넓이 측정은 인류 문명의 발달과 그 역사를 함께 해 왔으며 미적분학이나 측도론 등의 수학 이론을 발생시킨 원동력인 동시에 우리 삶의 중요한 도구이자 수단이라 할 수 있다.

현행 수학과 교육과정에 따르면(교육과학기술부, 2011) 학교수학에서 '넓이'라는 용어는 초등학교 5-6학년군의 측정 영역에서 처음으로 등장하고, 학생들은 직사각형을 포함한 여러 가지 다각형과 원의 넓이 및 입체도형의 겉넓이를 구하는 것으로부터 시작하여 중학교에서 부채꼴의 넓이와 각뿔, 원뿔, 구를 포함한 여러 가지 입체도형의 겉넓이를 거쳐 고등학교에서 다루는 정적분에 이르기까지 수많은 평면도형의 넓이를 계산하면서 자연스럽게 넓이 개념에 친숙해진다.

그러나 초, 중, 고등학교 수학과 교육과정과 교과서 어디에서도 넓이가 무엇을 뜻하는 용어인지 명료하게 정의하지는 않는다. 그렇다면 넓이는 수학적으로 무엇을 뜻하는 용어인가?

* 접수일(2014년 12월 5일), 게재확정일(2014년 12월 19일)
* ZDM분류 : G32, G33
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 넓이, 공리

다음은 연구자와 어느 초등학교 6학년 학생이 도형의 넓이 개념과 관련하여 나눈 대화의 일부이다.

연구자: 하연아, 도형의 넓이가 뭐야?
하 연: 넓이? (잠시 후) 넓이!
연구자: '넓이가 뭐야?'라고 묻는데, '넓이!'라고 대답하면 어떡해.
하 연: 글쎄... 어떻게 설명해야 할지 모르겠는데...
연구자: 넓이 많이 구해봤잖아.
하 연: 응.
연구자: 어떤 도형 넓이 구해봤어?
하 연: 삼각형, 사각형, 원, 그리고 이상한 거...
연구자: 넓이를 그렇게 많이 구해봤는데 넓이가 뭔지 몰라?
하 연: 그러니까... 그거... 안에 있는 거... 뭐라고 말해야 할지 모르겠어...

학생들이 교육과정의 전체적인 구조나 그 속에 내재되어 있는 공리계를 인식하고 학습하기는 어렵지만, 교사가 해당 교과의 내용과 관련된 지식의 구조를 파악하고 가르침에 임하는 것은 필수적이다. 특히 학교수학에 내재되어 있으나 명시적으로 드러나지 않은 기본 가정이나 공리를 파악하고 교과의 전체적인 구조와 흐름에 대한 안목을 갖추는 것은 교사가 끊임없이 추구해야 할 중요한 과제 중 하나일 것이다(Even & Tirosh, 1995; 도종훈, 최영기, 2003).

본 연구에서는 학교수학의 여러 내용 중 특히 도형의 넓이 개념을 공리적인 측면에서 고찰하고 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용을 넓이를 정의하는 공리의 관점에서 해석함으로써 현행 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용이 넓이 공리의 관점에서 볼 때 넓이 개념의 여러 측면 중 어떤 측면에 초점을 두고 있고 어떤 측면이 소홀히 다루어지고 있는지 살펴본다.

## II. 넓이의 의미와 공리적 정의

### 1. 넓이의 의미

고대 문명과 함께 발달하기 시작하여 오늘날에 이른 기하학(geometry)의 어원인 땅(geo)의 측정(metry)은 사실 땅의 크기의 측정을 의미하며, 이는 곧 땅에 해당하는 면의 넓이의 측정을 의미한다는 점에서 넓이는 수학 특히, 기하학을 발생시킨 출발점이자 원동력이었다고 할 수 있다. 넓이의 측정으로부터 비롯된 이론은 이후 극한의 개념과 결합하여 미적분학(calculus), 측도론(measure theory) 등의 수학 이론으로 발달하게 되며, 수학 뿐 아니라 수학을 활용하는 여러 학문 분야의 발달에 기여하게 된다.

한편, 우리가 발을 딛고 생활하는 바닥이나 땅은 면에 해당한다는 점에서 우리는 면 위에서 생활하고 있다고 할 수 있고, 우리가 안팎으로 드나드는 각종 건물이나 우리가 늘 사용하는 각종 물체는 여러 가지 면으로 둘러싸인 입체도형에 해당한다는 점에서 우리는 면으로 둘러싸인 입체도형과 함께 생활하고 있다고 할 수 있다. 즉, 우리는 여러 가지 면의 모양을 하고 있거나 면으로 둘러싸인 물체를 사용하거나 그 위 혹은 그 안과 밖에서 생활하고 있다. 따라서 우리가 살아가는 공간이나 우리가 사용하는 각종 도구, 물체 등을 만들고 사용하기 위해서는 결국 그 크기에 해당하는 면의 넓이를 정확하게 측정할 수 있어야 한다는 점에서, 도형의 넓이는 우리 생활에 없어서는 안 되는 중요한 삶의 도구이자 수단이라 할 수 있다.

그렇다면 도형의 넓이란 수학적으로 무엇을 의미하고 그 계산은 구체적으로 어떻게 하는가?

우리나라 수학과 교육과정이나 교과서에서 도형의 넓이를 엄밀하게 정의하지는 않지만, 도형의 넓이를 계산하는 방법을 고려해본다면 도형의 넓이는 결국 단위 정사각형이 꼭 덮을 수 있는 어떤 양을 1로 정했을 때 측정하고자 하는 도형의 내부를 단위 정사각형으로 겹치지 않게 빈틈없이 늘어놓아 몇 번이나 들어가는지를 세는 것(정동권, 2001)으로 볼 수 있다. 이때 도형의 넓이 개념에는 분할, 단위 반복, 배열 구성, 보존의 4가지 기초 개념이 포함되어 있는 것으로 간주된다(Stephan & Clements, 2003). 그 중에서 분할은 주어진 도형을 단위 정사각형들로 나누는 것을 의미하며, 보다 넓게는 주어진 도형을 단위 정사각형을 포함하여 넓이를 구할 수 있는 도형들로 나누는 것을 의미한다. 단위 반복은 넓이를 1로 정한 단위 정사각형으로 주어진 도형을 빈틈없이 겹치지 않게 채울 수 있음을 의미하며, 배열 구성은 단위 정사각형들을 아무렇게나 채우는 것이 아니라 주어진 도형의 넓이를 구하거나 넓이 공식을 이끌어낼 수 있도록 적절하게 배열해야 함을 의미한다. 그리고 보존은 주어진 도형을 분할하여 다른 도형으로 변형할 때 분할된 도형들을 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등의 방법으로 이동시키는데 그 과정에서 도형의 넓이가 변하지 않고 보존됨을 의미한다. 즉, 합동인 두 도형의 넓이는 서로 같다는 것이다.

이들 기초 개념에 대한 이해가 부족할 경우 학생들은 그저 주어진 숫자를 넓이 공식에 대입할 뿐 넓이 공식이 왜 그렇게 되는지 이해하지 못하게 된다(김주봉, 2000; 이경화, 2001). 나귀수(2012)는 초등학교 6학년 학생들의 넓이 개념 이해의 여러 측면을 조사하여 보고하였는데, 이를 위해 넓이의 의미 이해, 평면도형(직사각형, 평행사변형, 삼각형)의 넓이 구하기, 넓이 공식 제시하기, 넓이 공식의 성립 이유 설명하기 등과 관련된 문항들로 구성된 검사지를 활용하여 초등학교 6학년 학생 122명의 넓이 개념을 조사하였다. 연구 결과 학생들은 넓이의 의미 이해에서 가장 낮은 수행 정도를 나타낸 것으로 나타났다. 이는 학생들이 도형의 넓이 공식이나 이를 이용한 넓이 계산에는 능숙하지만 정작 넓이가 무엇을 의미하고 넓이의 기본적인 속성은 무엇인지에 대한 이해는 부족함을 의미한다.

도형의 넓이 공식이나 계산 방법은 본질적으로 넓이의 개념에 내재되어 있거나 그로부터 비롯된 것이라는 점에서 이와 같은 학생들의 넓이 개념 이해 부족 현상은 혹시 도형의 넓이 개념이 수학적으로 명료하게 제시되지 않기 때문에 발생하는 것은 아닌가? 아니면 학생들에게 이해시켜야 할 넓이의 개념이 교사에게 명료하게 인식되지 않아서 발생하는 것은 아닌가? 도대체 도형의 넓이는 수학적으로 어떻게 정의하는가? 등의 질문들이 제기된다.

### 2. 넓이에 대한 공리적 정의

길이(length)가 선(curve), 이를테면 곧은 선인 선분(segment)이나 굽은 선인 원 등의 크기를 나타내는 양을 추상화시킨 개념으로서, 주어진 선에 대하여 그 크기에 해당하는 양을 측정하여 수로 나타낸 것이 그 선

의 길이인 것과 마찬가지로 넓이는 면(surface), 이를테면 평면도형인 다각형(삼각형, 사각형 등)이나 원판 등의 크기를 나타내는 양을 추상화시킨 개념으로서, 주어진 면에 대하여 그 크기에 해당하는 양을 측정하여 수로 나타낸 것이 그 면의 넓이이고, 그 의미의 이해에 있어 앞서 살펴본 분할, 단위 반복, 보존, 배열 구성의 아이디어에 대한 이해가 필요한 개념이라 할 수 있다.

결국 수학적인 관점에서 볼 때 넓이는 도형(면)이 하나 주어질 때 주어진 도형(면)에 그 크기를 나타내는 양으로서의 수(음이 아닌 실수)를 하나씩 대응시키는 함수로 볼 수 있다. 실제로 현대수학에서는 이를 공리화하여 넓이를 다음과 같이 몇 가지 성질(공리)을 만족시키는 함수 $S$로 정의한다(Boltianskii, 1978).[2)]

$S$: $\{A \mid A$는 넓이를 가지는 도형$\} \to \mathbb{R}$ [3)]

(i) 임의의 도형 $A$에 대하여, $S(A) \geq 0$이다.

(ii) $A \equiv B$이면 $S(A) = S(B)$이다.

(iii) $A_i \cap A_j = \varnothing$이면 $S(\bigcup_i A_i) = \sum_i S(A_i)$이다.[4)]

(iv) 한 변의 길이가 1(단위 길이)인 정사각형 $P$에 대하여 $S(P) = 1$이다.[5)]

즉, 도형의 넓이는 위의 네 가지 성질 (i)-(iv)를 모두 만족시키고, 역으로 위의 네 가지 성질을 모두 만족시키는 함수는 넓이뿐이라는 것이다. 이때 위의 네 가지 성질 (i)-(iv)를 넓이 공리라고 한다. 이로부터 도형의 넓이는 도형의 크기를 나타내는 개념으로서 그 값이 음이 아니고(공리 (i)), 합동 불변이며(공리 (ii)), 가법적이며(공리 (iii)), 그 단위가 존재함(공리 (iv))을 알 수 있다. 이들 4개의 공리로부터 도형의 넓이에 대한 다음의 기본적인 정리 및 공식들을 유도할 수 있다 (Roe, 1995).

- 두 도형 $A$와 $B$에 대하여 다음이 성립한다.
  $$S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$$
- 선분의 넓이는 0이다.
- 가로와 세로의 길이가 각각 $a$와 $b$인 직사각형의 넓이는 $ab$이다.
- 밑변과 높이가 각각 $a$와 $b$인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.
- 밑변과 높이가 각각 $a$와 $b$인 평행사변형의 넓이는 $ab$이다.

## III. 넓이 지도 내용에 대한 공리적 해석

### 1. 넓이 공리의 의미

초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용을 공리적 관점에서 재조명하기 위해 앞서 살펴본 4개의 넓이 공리 각각의 의미에 대해 좀 더 자세하게 생각해보자.

먼저 공리 (i)은 넓이를 가지는 임의의 도형은 그 함숫값으로서 음이 아닌 실수를 넓이로 가짐을 의미하며, 이로부터 도형의 넓이를 음이 아닌 실수로 수치화하게 된다. 이때 도형의 경계(둘레)인 선이나 점의 넓이는 0이 된다.

공리 (ii)는 합동인 즉, 포개어지는 두 도형의 넓이는 서로 같다는 것으로서, 두 도형의 넓이를 직접 비교할 때 두 도형을 포개어(겹쳐) 일치하면 즉, 합동이면 그 두 도형의 넓이는 같음을 의미한다. 이것은 유클리드가 그의 원론에서 제시한 5개의 공리(common notion) 중 4번째 공리[6)]와 유사하며, 유클리드가 두 도형의 넓이를 비교할 때 사용한 방법이기도 하다. 이것은 도형의 넓이를 수치화하지 않고 그 자체로 서로 비교하는 직접 비교의 가장 기본적인 방법을 나타내는 것으로 볼 수 있다. 이때 한 도형이 다른 도형에 포함

---

2) 선(curve)의 길이(length)와 입체(solid)의 부피(volume) 역시 마찬가지 방법으로 공리적으로 정의할 수 있다.

3) 여기서 넓이를 가지는 도형들의 집합은 $\mathbb{R}^2$ 즉, 평면의 부분집합으로서 측도가능한 집합(measurable set)을 의미한다. 길이와 부피 역시 유사하게 정의할 수 있는데, 이때 길이를 가지는 도형들의 집합과 부피를 가지는 도형들의 집합은 각각 $\mathbb{R}$(선)과 $\mathbb{R}^3$(공간)의 부분집합으로서 측도가능한 집합을 의미한다(De Barra, 1981).

4) 정의역을 다각형으로만 제한하여 다각형의 넓이만 생각한다면, 주어진 공리 (iii)을 다음과 같이 나타내도 상관없다.
(iii)′ $A \cap B = \varnothing$이면 $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$이다.

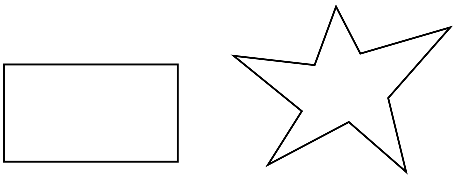
5) '한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이를 1로 정한다.'는 이 공리를 대신하여 직사각형의 넓이 공식 즉, '가로와 세로의 길이가 각각 $a$와 $b$인 직사각형의 넓이를 $ab$로 정한다.'는 것을 다음과 같이 공리로 택할 수도 있다(Roe, 1995).
(iv)′ 가로와 세로의 길이가 각각 $a$와 $b$인 직사각형 $P$에 대하여 $S(P) = ab$이다.
실제로 이들 두 명제 (iv)와 (iv)′는 실수의 완비성에 의해 동치이다.

6) 일치하는 것들은 서로 같다.

되면 포함하는 도형의 넓이가 포함되는 도형의 넓이보다 크다. 즉, 전체는 부분보다 크다. 이것은 유클리드가 제시한 5개의 공리 중에서 5번째 공리에 해당한다.

공리 (iii)은 두 도형을 겹치지 않게 이어 붙여 만든 도형의 넓이는 원래 두 도형의 넓이의 합과 같고, 어떤 도형을 두 개의 도형으로 분할하면 원래 도형의 넓이는 분할된 두 도형의 넓이의 합과 같음을 의미한다.

두 도형의 넓이를 비교할 때, 만약 두 도형의 모양이 같다면 즉, 닮음이라면 공리 (ii)만으로도 두 도형의 넓이 비교가 가능하다. 그러나 그렇지 않은 경우 즉, [그림 1]과 같이 두 도형의 모양이 다른 경우에는 이들 두 도형 중 어느 한 도형을 넓이를 변화시키지 않으면서 나머지 한 도형과 모양이 같도록 변형하거나 두 도형을 모두 정사각형과 같이 넓이의 직접 비교가 가능한 형태의 도형으로 변형시켜야 한다.

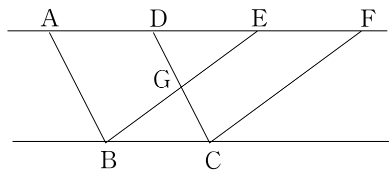


[그림 1] 넓이 비교를 위해 등적변형이 필요한 도형의 예
[Fig. 1] Example of plane figures that need area preserving transformation to compare their area

이러한 변형을 통상 등적변형이라 하는데, 다각형의 등적변형은 사실 주어진 도형을 여러 개(유한 개)의 조각으로 분할한 뒤 이 조각들을 겹치지 않게 이어 붙여 다른 도형을 만드는 방법인 합동-분해에 해당한다 (Boltianskii, 1978; Laczkovich, 2001)[7]. 넓이를 변화시키지 않고 도형의 모양을 변화시키는 등적변형 혹은 합동-분해는 두 공리 (ii)와 (iii)에 의해 정당화되며, 비교하고자 하는 두 도형을 포개어서(겹쳐서) 그 크기를 직접 비교할 수 있는 도형인 정사각형으로 각각 등적변형하려면 이들 두 공리가 전제되어야 한다. 결국 두 공리 (ii)와 (iii)은 두 도형의 넓이의 직접 비교를 통해 두 도형의 넓이가 서로 같은지 다른지, 다르다면 어느 도형이 더 크거나 작은지에 대한 판단을 가능하게 해주는 방법을 공리화한 것임을 알 수 있다.

이러한 도형의 넓이의 직접 비교 방법은 이미 유클리드의 원론에서도 사용된 바 있는데, 유클리드는 그의 원론 제 I 권에서 피타고라스의 정리와 그 역(명제 47, 명제48)의 증명, 평행사변형과 삼각형의 넓이 및 이들 사이의 관계에 관한 명제(명제41-45)의 증명, 주어진 임의의 다각형과 넓이가 같은 정사각형의 작도 문제(제II권의 명제14) 등에서 이런 방법을 사용하고 있다. 이를테면 유클리드가 원론 제 I 권의 명제 35와 명제 37에서 밑변($\overline{BC}$)을 공유하고 높이가 서로 같은 임의의 두 평행사변형($\square ABCD$와 $\square EBCF$)의 넓이가 서로 같고, 동일한 조건의 두 삼각형($\triangle ABC$와 $\triangle DBC$)의 넓이 역시 서로 같음을 증명하는 과정에서 이 방법을 사용하였음을 [그림 2]와 [그림 3]을 통해 확인할 수 있다(Heath, 1956).

**[명제 35]** 밑변을 공유하고 높이가 같은 두 평행사변형(의 넓이)은 서로 같다.




[증명] $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$이므로 다음이 성립한다.

$$\square ABCD = \triangle ABE + \triangle GBC - \triangle GED$$
$$= \triangle DCF + \triangle GBC - \triangle GED$$
$$= \square EBCF$$

[그림 2] 원론 제I권의 [명제 35] 증명
[Fig. 2] Euclid's proof of the proposition I.35

7) 서로 겹치지 않으면서 다음을 만족시키는 유한개의 도형들 $A_1,\cdots,A_n$과 $B_1,\cdots,B_n$이 존재할 때 두 도형 $A$와 $B$는 서로 합동-분해가능(equidecomposable)하다고 한다.

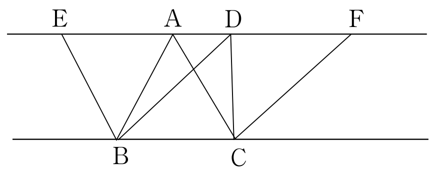
$$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ B=\bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ A_i \equiv B_i\ (i=1,\cdots,n)$$

넓이의 합동 불변성(공리 (ii))과 가법성(공리 (iii))에 의해 합동-분해가능한 두 도형 $A$와 $B$의 넓이는 같다.

$$S(A)=\sum_{i=1}^{n} S(A_i)=\sum_{i=n}^{n} S(B_i)=S(B)$$

또한 넓이가 같은 두 다각형은 서로 합동-분해가능하다 (Bolyai-Gerwien 정리). 따라서 두 다각형이 넓이가 같다는 것은 서로 합동-분해가능하다는 것과 동치이다.

[명제 37] 밑변을 공유하고 높이가 같은 두 삼각형(의 넓이)은 서로 같다.




[증명] $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square EBCA$

$=\frac{1}{2}\square DBCF$ (명제 35)

$=\triangle DBC$

[그림 3] 원론 제I권의 [명제 37] 증명
[Fig. 3] Euclid's proof of the proposition I.37

앞서 언급한 바와 같이 모양이 다른 두 도형의 넓이를 직접 비교하기 위해서는 두 도형을 겹쳐 보아서 한 도형이 다른 도형과 일치하는지 아니면 한 도형이 다른 도형에 포함되는지 비교함으로써 그 넓이를 비교할 수 있는 도형인 정사각형으로의 등적변형이 필요한 경우가 많은데, 이런 등적변형은 번거롭고 복잡한 경우가 많고 곡선으로 둘러싸인 도형처럼 무한의 과정이 없으면 불가능한 경우도 있다.

그렇기 때문에 각 도형의 넓이를 단위 넓이를 이용하여 수치화한 뒤 그 수치를 비교하여 넓이를 비교할 수 있는 간접 비교의 방법이 필요하고, 주어진 도형에 그 넓이를 나타내주는 수치(양의 실수)를 정해주기 위해서는 넓이의 단위를 무엇으로 정할지 결정해야 한다. 평면도형 중에서 가장 간단하면서도 기본이 되는 도형이 삼각형이라는 점에서 보면 단위 넓이 즉, 넓이를 1로 가지는 도형으로 한 변의 길이가 1인 정삼각형이나 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형 등을 고려할 수 있을 것이고, 등적변형(혹은 합동-분해)을 통한 작도의 용이성이나 단위 반복을 통한 넓이 측정의 용이성의 관점에서 보면 한 변의 길이가 1인 정사각형을 우선적으로 고려할 수 있을 것이다.

공리 (iv)는 그러한 도형들 중에서 한 변의 길이가 1(단위 길이)인 정사각형의 넓이를 단위 넓이 1로 정하였음을 의미하며, 이로부터 도형의 넓이를 수치로 나타내어 비교하는 것이 가능해진다. 도형의 넓이의 수치화를 통한 간접 비교의 방법은 두 도형의 넓이의 같음이나 크고 작음의 여부 뿐 아니라 얼마나 크고 작은지에 대한 분석도 가능하게 해준다.

이상에서 알 수 있듯이 결국 넓이공리 (ii)와 (iii)은 도형의 크기 즉, 넓이의 직접 비교 방법과 여러 가지 기본 도형의 넓이 공식 유도 과정을 정당화해주는 공리이고, 공리 (i)과 (iv)는 넓이의 수치화 및 이를 통한 넓이의 간접 비교 방법을 정당화해주는 공리라고 볼 수 있다.

따라서 넓이 공리의 관점에서 보면 넓이 개념을 이해한다는 것은 결국 첫째 넓이가 평면도형의 크기를 나타내는 개념임을 알고, 둘째 넓이의 직접 비교 방법으로서 공리 (ii)와 (iii)을 이해하고, 셋째 직접 비교의 어려움에 대한 대안으로서 넓이의 간접 비교 방법 즉, 넓이를 수치화하여 비교하는 방법의 근간이 되는 공리 (i)과 (iv)를 이해하며, 넷째 여러 가지 기본 도형의 넓이 공식 및 계산법의 설명 방법으로서 공리 (ii)와 (iii)을 활용한 등적변형의 과정을 이해하는 것으로 귀결되는 것으로 보인다.

### 2. 초등 수학에서의 넓이 개념 및 공식 지도 내용

서론에서 잠시 언급한 바와 같이 2011 개정 수학과 교육과정에 따르면(교육과학기술부, 2011), 학교수학에서 도형의 넓이 지도는 초등학교 5-6학년군의 측정 영역에서 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모 등을 포함한 여러 가지 다각형 및 곡선으로 둘러싸인 도형인 원(판)을 포함한 여러 가지 평면도형의 넓이와 직육면체, 정육면체, 원기둥 등의 입체도형의 겉넓이를 구하는 것으로부터 시작하여 중학교 1-3학년군의 기하 영역에서 원(판)의 일부분인 부채꼴의 넓이와 각뿔, 원뿔, 구를 포함한 여러 가지 입체도형의 겉넓이를 구하는 것으로 확장되며, 고등학교 선택과목인 미적분 I과 미적분 II에서 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 것으로 더욱 확장된다([표 1] 참고).

그것이 어떤 도형이던 상관없이 평면도형의 넓이 측정의 기본이 되는 도형은 다각형과 원이고 그 중에서도 직사각형이라는 점에서 초등학교 수학에서의 넓이 지도는 이후 중고등학교에서의 여러 가지 영역의 넓이 지도의 근간이 된다. 따라서 초등학교 수학에서의 넓이 지도는 여러 가지 기본적인 평면도형의 넓이

공식과 계산법을 이해하고 활용할 수 있는 능력과 도형의 크기에 대한 측도로서 넓이 개념에 대한 직관적인 관념을 형성시키는 데에 초점을 두게 된다.

[표 1] 학교수학에서의 넓이 지도 내용

[Table 1] Area contents in school mathematics

| 학년(군) | 교육과정 내용 |
|---|---|
| 초등학교 5-6학년 | • 넓이 개념의 이해<br>• 넓이의 표준 단위로서 1㎠, 1㎡와 그 관계<br>• 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴 마름모의 넓이<br>• 여러 가지 넓이 단위 및 그 관계<br>• 원주와 원의 넓이<br>• 직육면체, 정육면체, 원기둥의 겉넓이 |
| 중학교 1-3학년 | • 부채꼴의 넓이<br>• 각뿔, 원뿔의 겉넓이<br>• 구의 겉넓이 |
| 고등학교 (미적분I,II) | • 구분구적법<br>• 다항함수, 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 정적분 |

실제로 현행 수학과 교육과정에서 초등학교 5-6학년군에서 다루는 도형의 넓이 관련 내용을 넓이의 개념 도입 및 기본 다각형의 넓이에 대한 성취기준을 중심으로 살펴보면 다음과 같다(교육과학기술부, 2011).[8)]

- 넓이를 이해하고, 1㎠와 1㎡의 단위를 알며, 그 관계를 이해한다.
- 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 바탕으로 직사각형과 정사각형의 넓이를 구할 수 있다.
- 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 방법을 다양하게 추론하고, 이와 관련된 문제를 해결할 수 있다.

위의 성취기준 별 실제 지도 내용을 간략히 살펴보면 다음과 같다(교육과학기술부, 2010a, 2010b).[9)]

먼저 넓이 개념의 이해와 표준 단위 도입 관련 내용을 살펴보면, 도형의 넓이 개념을 명시적으로 정의하는 대신 '$1\,\text{cm}^2$를 알 수 있어요'라는 제목 아래 여러 개(3개)의 도형을 제시한 뒤에 이들 도형 중 어느 도형이 가장 넓은지 판단하고 그 이유를 말하게 하는 활동을 통해 직접 비교의 방법으로는 도형의 넓이 비교가 어려움을 인식시킨다. 그 뒤에 모눈(단위 정사각형)의 개수를 이용한 도형의 넓이의 간접 비교 활동을 제시하고, 넓이의 표준 단위인 $1\,\text{cm}^2$를 도입한다.

그러고 나서 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 바탕으로 직사각형과 정사각형의 넓이를 구하게 하는데, 구체적으로는 '표준 단위 $1\text{cm}^2$를 이용한 직사각형의 넓이 계산 → 직사각형의 넓이 공식(용어: 가로, 세로) → 정사각형의 넓이 공식 → 직사각형(정사각형)을 이어 붙이거나 잘라서 만든 여러 가지 도형의 넓이 계산'의 순서로 학습을 하게 된다.

그리고 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모의 넓이를 구하는 방법을 '단위 넓이 및 등적변형을 이용한 평행사변형 넓이 계산 → 평행사변형의 넓이 공식(용어: 밑변, 높이) → 단위 넓이 및 등적변형을 이용한 삼각형 넓이 계산 → 삼각형의 넓이 공식(용어: 삼각형의 밑변, 높이) → 사다리꼴 넓이 계산 및 공식 → 마름모 넓이 계산 및 공식'의 순서로 학습한다.

### 3. 넓이 지도 내용에 대한 공리적 해석

앞서 논의한 바와 같이 넓이 공리의 관점에서 넓이 개념을 이해한다는 것은 다음의 네 가지로 정리할 수 있다.

첫째, 넓이가 평면도형의 크기를 나타내는 개념임을 이해한다.

둘째, 넓이의 직접 비교 방법으로서 공리 (ii)와 (iii)을 이해한다.

셋째, 넓이의 간접 비교 방법 즉, 넓이를 수치화하여 비교하는 방법의 근간인 공리 (i)과 (iv)를 이해한다.

넷째, 여러 가지 기본 도형의 넓이 공식 및 계산법

8) 그 밖에 여러 가지 넓이 단위의 변환, 원의 넓이, 입체도형의 겉넓이와 관련된 성취기준이 다음과 같이 제시되어 있다.
- 실생활에서 넓이를 나타내는 새로운 단위의 필요성을 인식하여 1㎡, 1㎢, 1a, 1ha를 알고, 그 관계를 이해한다.
- 원주와 원의 넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다.
- 직육면체와 정육면체, 원기둥의 겉넓이를 구하는 방법을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

9) 2011 개정 수학과 교육과정에 따른 초등학교 5-6학년 수학 교과서는 2015년부터 학교 현장에 적용될 예정이기 때문에 본 연구에서는 2007 개정 수학과 교육과정에 따라 발행된 초등학교 수학 교과서를 참고하였다. 2007 개정 수학과 교육과정에서는 평면도형의 넓이가 초등학교 4학년(수학 4-2)에 도입된다. 따라서 본고에서 예시하는 교과서 내용 예시는 초등학교 4학년 수학 4-2 교과서에서 인용한 것이다.

의 설명 방법으로서 공리 (ii)와 (iii)을 활용한 등적변형의 과정을 이해한다.

이제 이들 네 가지 관점에서 초등학교 수학에서의 넓이 개념 및 공식 관련 지도 내용을 살펴보자.

먼저 평면도형의 크기로서의 넓이 개념 이해의 측면에서 넓이의 도입 과정을 살펴보자.

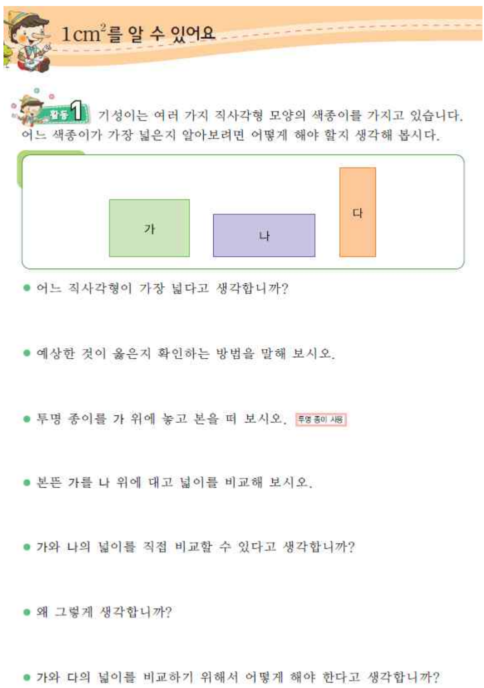
현재 학교수학에서는 평면도형의 넓이를 [그림 4]와 같이 주어진 도형들 중에서 어느 도형이 더 넓은가를 판단하는 활동을 통해 도입하고 있다. 이는 아마도 평면도형의 넓이가 무엇인지 정의하지 않더라도 '넓은'이라는 일상어에 대하여 학생들이 지니고 있는 경험적 혹은 직관적 관념을 통해 넓이가 주어진 평면도형의 크기를 나타내는 개념이라는 것을 이해하는데 큰 무리가 없을 것이라고 판단하였기 때문인 것으로 보인다.

그러나 '어느 도형이 더 넓은가'는 질문에 대하여 일부 학생들은 넓다는 것을 너비가 크다는 것으로 오인할 수 있고(한인기, 2005), 또 어떤 학생들은 넓다는 것을 도형의 둘레의 길이의 합이 큰 것으로 받아들일 수도 있다. 전자의 경우 일상 언어에서 가로의 길고 짧음을 나타내는데 쓰이는 '너비'와 평면도형이 차지하는 영역의 크기로서의 '넓이'에 대한 구분이 쉽지 않다는 점에서 그 원인을 찾을 수 있을 것이고, 후자의 경우 평면도형의 넓이를 '평면도형의 둘레와 넓이'라는 하나의 단원에서 평면도형의 둘레를 다룬 직후에 도입하기 때문에 학생들로서는 도형의 넓은 정도를 둘레와 연관시키는 것이 일면 자연스러울 수 있기 때문인 것으로 보인다.

한편, 넓이 정의의 부재로 인한 어려움은 학생 뿐 아니라 교사에게서도 나타날 수 있는데 안선영, 방정숙(2006)은 교사가 넓이 개념을 학생들에게 설명하는데 겪는 어려움을 다음과 같은 교사와의 면담 사례를 통해 지적한 바 있다.

> "넓이를 구체적으로 말로 하지는 못하고 그냥 직관적으로 이해하는 수준으로 어떤 게 더 넓냐? 이렇게 묻지, 넓이가 무엇이다라고 설명할 수는 없을 것 같아요."

이런 점에서 초등학교 수학 교과서에서 평면도형의 넓이를 형식적으로 명료하게 정의할 것인가 말 것인가의 문제와는 별개로 넓이는 면(평면도형)의 크기를 나타내는 개념이고 길이는 선(선분)의 크기를 나타내는 개념임을 언급하거나 적어도 교사가 이를 명료하게 인식할 필요는 있어 보인다. 특히 교사는 길이와 넓이는 둘 다 도형의 크기를 나타내는 개념이라는 점에서 공통점이 있지만, 그 대상이 선과 면으로 서로 다르다는 점을 명료하게 인식할 필요가 있어 보인다.

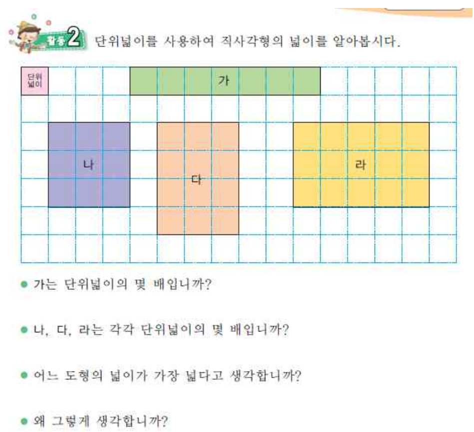



[그림 4] 넓이의 도입(활동 1)
[Fig. 4] Introduction of the area(activity 1)

다음으로 넓이의 직접 비교 방법으로서 공리 (ii)와 (iii) 및 넓이의 간접 비교 방법의 근간이 되는 공리 (i)과 (iv)에 대한 이해의 측면에서 넓이 지도 내용을 살펴보자.

[그림 4]에서 알 수 있듯이 현재 초등학교 수학 교과서에서는 도형의 넓이의 직접 비교 그 자체를 독립된 학습 내용으로 다루지는 않으며, 단위를 이용한 넓이의 간접 비교 방법을 도입하기 위한 예비 활동의 일환으로 잠시 언급하고 있는 것으로 보인다. 실제로 [그림 4]에서 두 도형의 넓이의 직접 비교를 위해 한 도형을 다른 도형에 포개어 보고 이를 통해 그 넓이를 비교해보기도 하는 활동을 하지만, 이는 포개어서 일치(합동)하는 도형은 서로 넓이가 같음을 확인해보거

나 한 도형이 다른 한 도형에 포함되는 경우 두 도형의 넓이를 서로 비교해보거나 모양이 서로 다른 도형의 경우 넓이의 직접 비교가 가능하도록 도형을 변경시키는 과정을 학습하는 것이 주된 목적이 아니라 포개어 넓이를 직접 비교하는 것이 매우 어렵고 불편함을 인식하도록 하는 것이 주된 목적인 것으로 보인다. 실제로 [그림 4]의 활동이 끝난 뒤 곧바로 단위넓이를 이용하여 도형의 넓이를 알아보는 [그림 5]의 활동이 이어짐을 확인할 수 있다. 즉, 현재 초등학교 수학 교과서에서 도형의 넓이를 직접 비교하는 방법과 그 근간이 되는 공리 (ii)와 (iii)은 넓이 개념 이해의 한 측면으로서가 아니라 단지 단위넓이를 이용한 넓이의 간접 비교 방법 도입을 위한 수단으로 잠시 언급되고 있을 뿐임을 알 수 있다.

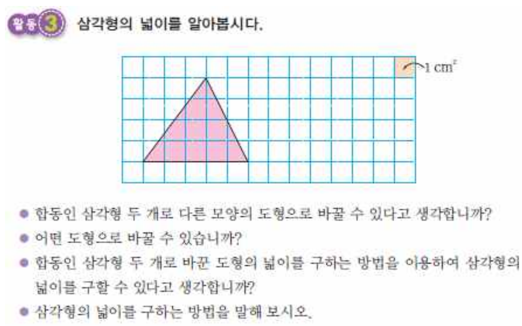



[그림 5] 넓이의 도입(활동 2)

[Fig. 5] Introduction of the area(activity 2)

마지막으로 여러 가지 기본 도형의 넓이 공식 및 계산법의 설명 방법으로서 공리 (ii)와 (iii)을 활용한 등적변형의 과정 이해의 측면에서 넓이, 그 중에서도 삼각형의 넓이 지도 내용을 살펴보자.

[그림 6]에서 알 수 있듯이 삼각형의 넓이는 동일한(합동인) 두 삼각형을 겹치지 않게 이어붙이거나 평행사변형을 합동인 두 개의 삼각형으로 분할하는 방법을 통해 지도되고 있음을 알 수 있는데, 이는 사실상 넓이 공리 (ii)와 (iii)을 적절하게 활용한 것이라 볼 수 있다. 여기서 한 가지 독특한 점은 학생들이 이미 평행사변형의 넓이 공식을 학습하였음에도 불구하고 군이 필요하지 않은 모눈 즉, 단위넓이를 활용하고 있다는 점인데, 이는 삼각형 뿐 아니라 그 밖의 다른 도형의 넓이 공식 지도에서도 마찬가지이다. 교과서의 이러한 진술 방식으로부터 우리나라 초등학교 수학교과서에서는 도형의 넓이 지도의 핵심을 단위 반복에 두고 있음을 추측할 수 있다. 궁극적으로 학생들이 단위넓이를 이용하여 여러 가지 도형의 넓이를 구하는 공식을 이해하고 이를 통해 도형의 넓이를 계산할 수 있어야 한다는 점에서 이러한 의도는 충분히 그 의의가 있는 것으로 보인다.




[그림 6] 삼각형의 넓이 지도 내용

[Fig. 6] Contents about the area of triangle

그러나 여기서 한 가지 주의할 점은 그 과정에서 넓이 공식의 본질적인 의미가 충분히 인식되지 않을 가능성이 있다는 점이다. 이를테면 삼각형의 넓이 공식은 ‘(밑변의 길이)×(높이)÷2’인데, 하나의 삼각형에는 밑변과 높이가 세 쌍이 있으므로 ‘(밑변의 길이)×(높이)÷2’의 값 역시 세 개가 나온다. 이때 세 개의 값이 항상 같다는 것을 어떻게 보장할 수 있는가?

삼각형의 넓이 공식에는 이들 세 개의 값이 항상 같다는 불변성이 전제되어 있으며, 이는 공식을 이용하여 모든 삼각형의 넓이를 구할 수 있다는 점과 더불어 삼각형의 넓이 공식이 지닌 본질적인 속성의 또 다른 측면이라 할 수 있다. 그리고 위의 질문에 대한 답은 궁극적으로는 공리 (ii)와 (iii)에 의존한다는 점에서 이들 두 공리는 도형의 넓이 공식에서도 중요한 의미를 지님을 알 수 있다.

## IV. 결론

이상에서 도형의 넓이에 대한 정의와 넓이 공리 및 그 의미를 살펴보고, 넓이 공리의 관점에서 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용을 살펴보았다.

이에 따르면 넓이는 평면도형의 크기를 나타내는 개념으로서 그 값이 음이 아닌 실수이고, 합동 불변이며, 가법적이고, 단위 정사각형을 단위로 한다는 4개의 공리를 만족시키는 함수로 정의된다. 4개의 공리 중에서 합동 불변성과 가법성에 대한 공리는 두 도형의 넓이를 직접 비교하는 방법과 도형의 넓이 공식 및 계산법을 정당화해주는 공리이고, 그 값이 음이 아닌 실수이면서 단위 정사각형의 넓이를 단위로 가진다는 공리는 수치화를 통한 넓이의 간접 비교 방법을 정당화해주는 공리라고 할 수 있다. 이들 4개의 공리로부터 넓이의 기본적인 성질과 공식들이 유도된다.

그러므로 넓이 공리의 관점에서 보면 도형의 넓이 개념을 이해한다는 것은 곧 넓이를 정의하는 이들 4개의 공리의 의미를 이해한다는 것을 의미하며, 이는 다시 넓이가 평면도형의 크기를 나타내는 개념임을 이해하고, 넓이의 직접 비교 방법을 정당화해주는 넓이의 합동 불변성과 가법성을 이해하며, 단위넓이를 이용한 수치화를 통해 넓이를 간접 비교하는 방법을 이해하고, 넓이의 합동 불변성과 가법성을 활용한 등적변형을 통해 여러 가지 기본 도형의 넓이 공식 및 계산법을 이해하는 것으로 정리할 수 있다.

이런 점에서 현행 초등학교 수학에서의 넓이 지도 내용은 평면도형의 크기를 나타내는 개념으로서의 넓이 개념에 대한 설명이 다소 불분명하고, 넓이의 합동 불변성과 가법성을 이용한 넓이의 직접 비교 관련 내용이 수치화를 통한 넓이의 간접 비교에 비해 그 비중이 작으며, 전체적으로 단위넓이 및 이를 이용한 넓이의 간접 비교가 넓이 지도 내용의 핵심을 이루는 것으로 보인다. 학생들이 단위넓이를 이용하여 여러 가지 도형의 넓이를 구하는 공식을 이해하고 이를 통해 도형의 넓이를 능숙하게 계산할 수 있어야 한다는 점에서 이러한 내용 전개가 의미 있음에도 불구하고, 적어도 넓이 공리의 관점에서 보면 넓이 개념의 근간을 이루는 중요한 두 성질인 넓이의 합동 불변성과 가법성 및 이를 이용한 도형의 넓이의 직접 비교 내용이 좀 더 균형 있게 다루어질 필요가 있는 것으로 보인다. 물론 학생들의 인지적, 심리적 발달 상태 및 수준에 대한 논의와 고려가 병행되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌


교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

Ministry of Education and Science Technology (2011). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education and Science Technology.

교육과학기술부 (2010a). 수학 4-2. 서울: 두산동아.

Ministry of Education and Science Technology (2010a). *Mathematics 4-2*. Seoul: Doosan-Donga.

교육과학기술부 (2010b). 수학 5-1. 서울: 두산동아.

Ministry of Education and Science Technology (2010b). *Mathematics 5-1*. Seoul: Doosan-Donga.

김주봉 (2000). 도형의 분할과 지도 방안에 관한 연구. 청주교육대학교 과학과 수학교육 논문집, 21, 1-18.

Kim, J. B. (2000). A Study on the Division of Geometric Figures and the Way of Teaching It. *The Journal of the Institute of Science education* 21, 1-18.

나귀수 (2012). 초등학교 학생들의 넓이 개념 이해도 조사 - 초등학교 6학년 학생들을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 16(3), 451-469.

Na, G. S. (2012). Examining Students' Conceptions about the Area of Geometric Figures. *Journal of elementary mathematics education in Korea* 16(3), 451-469.

도종훈・최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(5), 697-706.

Do, J. H. & Choi, Y. G. (2003). Analysis of the Equality Sign as a Mathematical Concept. *The mathematical education,* 42(5), 697-706.

안선영・방정숙 (2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석. 수학교육학연구, 16(1), 25-41.

An, S. Y. & Pang, J. S. (2006). An Analysis of the

Relationship between Teachers' Pedagogical Content Knowledge and Teaching Practice: Focusing on the Area of Plane Figure. *The journal of educational research in mathematics,* 16(1), 25-41.

이경화 (2001). 활동과 직관을 강조한 측정 지도: 넓이와 둘레를 중심으로. 청주교육대학교 과학과 수학교육 논문집, 22, 99-118.

Lee, K. H. (2001). Teaching Measurement based on Activities and Intuition - Focused on Area and Perimeter. *The Journal of the Institute of Science education,* 22, 99-118.

정동권 (2001). 평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. 인천교육대학교 과학교육논총, 13, 1-36.

Jeong, D. K. (2001). On Developing Mathematical Thinking Ability through Teaching Area Measure. *The bulletin of science education,* 13, 1-36.

한인기 (2005). 한국과 러시아의 수학교과서에서 다각형의 넓이 영역의 내용 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 9(1), 1-9.

Han, I. K. (2005). A comparative study on the area of polygon in mathematics textbooks of Korea and Russia. *Education of primary school mathematics,* 9(1), 1-9.

Boltianskii, V.G. (1978). *Hilbert's third problem.* V.H.WINSTON&SONS.

De Barra, G. (1981). *Measure theory and integration.* Ellis Horwood Ltd.

Even, R. & Tirosh, D.(1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics* 29.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Vol.1*, Dover Publications, Inc.

Laczkovich, M. (2001). *Conjecture and proof.* The Mathematical Association of America.

Roe, J. (1995). *Elementary Geometry.* Oxford science publications.

Stephan, M. & Clements, D. H.(2003). Linear and area measurement in pre-kindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.). *Learning and teaching measurement* (pp.3-16).

# An axiomatic analysis on contents about the area of plane figures in the elementary school mathematics

**Do, Jong Hoon**
Seowon University
241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea
E-mail : jhoondo@seowon.ac.kr

**Park, Yun Beom**
Seowon University
241 Musimseoro, Heungdeok-gu, Cheongju, Chungbuk, 361-742, Korea
E-mail : ybpark@seowon.ac.kr

In this paper we review an axiomatic definition of the area of plane figures with area axioms, discuss what the area axioms mean, and analyze the contents about the area of plane figures in elementary school mathematics from the view point of area axioms. So we evaluate which aspects of the concept of area are emphasized or deemphasized in the current elementary school mathematics textbook.

* ZDM Classification : G32, G33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : area, axioms