韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmec.2014.17.3.231
2014. 12. 제 17권, 제 3호, 231-251

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Dec. 2014, Vol. 17, No. 3, 231-251

연산 결과의 의미 이해를 돕기 위한 단위 사용에서의 교수학적 변환 연구

강 정 기 (창원남산중학교)
정 상 태 (사천동성초등학교)
노 은 환 (진주교육대학교)†

수치와 단위는 서로 동떨어진 것이 아니며, 단위는 수치의 의미를 명확히 하는 역할을 한다. 학생들이 해결해야 하는 많은 문제에는 단위가 포함되는데, 문제해결 과정에서 관찰된 학생들은 연산 결과의 의미 이해에 어려움을 겪고 있었다. 이러한 현상의 현황을 확인하기 위해 초등학교 6학년 2개반 52명을 대상으로 검사지를 투입하여 그 실태를 파악하여 분석하였는데, 이들에게도 역시 단위는 문제에 주어져 있는 것일 뿐, 단위를 연산의 의미 이해와 연결 짓지 못하였다. 이 연구에서는 이와 같은 결과를 토대로 기존의 교수학적 변환이 갖는 특징과 한계를 살펴보고, 연산 결과의 의미 이해 측면에서 단위가 갖는 이점을 고찰해 봄으로써 상황과 관련한 해석에 있어 단위가 갖는 효력을 구체화하였다. 특히 단위 연산 가능성을 허용한 교수학적 변환에 대한 구체적 논의와 시사점을 제안함으로써, 교수·학습에서 변화의 불가피성을 강조함과 동시에 실질적 도움을 제공하고자 하였다.

Ⅰ. 서론

역사적으로 수학은 항상 사회의 필요에 의하여 발달해 왔고(김성숙, 2005), 수 개념이 실재하는 양을 추상하여 생겨난 것임을(정은실, 2010) 고려한다면 수치에 단위가 붙는 것은 자연스러운 현상으로 볼 수 있다. 예를 들어 일반적으로 사람 수는 '5'라고 표현하지 않고 '5명'이라고 표현하며, '100 달리기'가 아닌 '100m 달리기'로 표현한다.

그러나 수학에서 다루는 대상은 대부분 추상화하여 얻어진 개념이다. 예를 들어 자연수 '3'의 개념은 세 사람, 자동차 석 대, 책 세 권 등 원소의 수가 3인 집합 각각에 대해 이들이 가지고 있는 이질적인 속성을 제거하고 집합의 크기라는 동질적인 속성을 뽑아낸 개념이다(강문봉 외, 2005). 이러한 수학의 추상성은 수의 본성만을 남기게 되며 이를 통해 우리는 수치 고유의 성질을 다룰 수 있게 된다. 즉, 수학의 발달은 단위로부터의 독립을 지향해 왔다(노은환, 강정기, 정상태, 2014).

그렇다면 단위로부터 독립을 추구해 온 수학의 발달은 과연 교수・학습에서도 같은 맥락으로 반영되어야 하는 것인가? 이를 확인하기 위해서는 수(數)의 집합에 구조를 불어 넣게 되는 연산을 고찰할 필요가 있다. 왜냐하면 수에서 연산은 따로 떼어 논의할 수 없는 필수 불가결한 요소이기 때문이다.

수라는 대상은 연산을 통해 조작되고 변형된다. 예를 들어 '사과 5개와 사과 8개의 합은 몇 개인가?' 라는 질문이 있을 때 5+8=13의 결과를 토대로 '사과 13개이다'라고 답할 수 있다. 수와 연산의 이러한 관계를 고려하면, 수를 대상으로 한 연산은 두 가지 측면에서 살펴볼 수 있음을 의미한다. 전자는 과정에 초점을 둔 것으로 연산의 수행 절차와 그 이유에 대한 것이며, 후자는 결과에 초점을 둔 것으로 연산 결과의 의미를 상황과 결부지어 이해하는 것이다. 이를테면, 이분모 분수의 덧셈에 대해 그 절차를 이해하고 수행하는 것은 과정적 측면의 지식이며, 그러한 과정을 통해 도출된 연산 결과가 갖는 의미를 상황과 연결하여 이해하는 것은 결과적 측면의 지식이다.

연산 수행이라는 과정적 측면에서 단위는 수치에 부가된 부차적 요소에 해당한다. 이를테면, 0.23cm+1.45cm에서 단위는 연산 수행에 별다른 도움을 제공하지 못한다. 그러나 노은환·강정기·정상태(2014)는 수치에 지나치게 주목하고 집중하게 되면 연산 결과의 의미 이해 결여라는 문제점이 초래될 수 있음을 지적한 바 있다. 그들은 이와 같은 문제점 해결을 위한 대안의 하나로 수치에 부가된 단위에 주목할

* 접수일(2014년 11월 28일), 게재확정일(2014년 12월 17일)
* ZDM분류 : D73
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 연산 결과의 의미 이해, 단위 사용, 교수학적 변환
* 이 논문은 2014학년도 진주교육대학교 교내연구비 지원을 받았음.
† 교신저자 : ehroh@cue.ac.kr

것을 제안하였다. 비슷한 맥락으로 정은실(2010)도 문장제 해결 과정에서 수로 된 식만을 쓸 것이 아니라 단위를 붙인 식을 사용하여 양적인 추론에 도움을 제공해야 한다고 주장하였다.

연산 결과에 대한 의미를 올바로 이해하는 것은, 문장제 또는 실생활 문제 해결에서 반드시 갖추어야 할 요소 중 하나이다. 이를테면, '한 병에 $\frac{1}{2}L$씩 들어 있는 우유 10병을 $\frac{5}{7}L$씩 컵에 나누어 담으려고 한다. 컵은 몇 개 필요한가?'라는 문장제가 주어졌다고 하자. 문제를 해결하는 과정에서 연산 결과의 의미를 올바르게 이해하지 못한다면, 문제에서 요구하는 물음에 답하기는 쉽지 않다. 만약 $(\frac{1}{2}\times 10)\div\frac{5}{7}$ 의 연산을 선택하여 오류없이 그 결과를 도출하였다 하더라도, 그 의미에 확신을 갖지 못한다면 올바른 지식을 가졌다고 할 수 없을 것이다. 더 나아가서는 $(\frac{1}{2}\times 10)\div\frac{5}{7}$ 가 적절한 것인지, $\frac{5}{7}\div(\frac{1}{2}\times 10)$ 가 적절한 것인지 아니면 다른 연산을 수행해야 하는 것인지에 대한 판단도 어려움을 겪게 될 수 있다.

그런데 이 상황에서 단위에 주목하여 연산의 결과를 음미하게 되면, 적합한 연산이 무엇인지 판단하는데 도움이 될 수 있다. 위 단락에서 언급한 문제를 해결하는데 있어 $(\frac{1}{2}\times 10)\div\frac{5}{7}$ 이라는 식에 단위를 부가하게 되면 $(\frac{1}{2}L/\text{병}\times 10\text{병})\div\frac{5}{7}L/\text{컵}$ 이 된다. 단위에 주목하여 괄호 안을 연산한 결과를 살펴보면, 1병당 $\frac{1}{2}L$의 양이 10병 있으므로 연산 결과인 5는 $5L$에 해당한다는 것을 알 수 있다. 이후 수행되는 $5L\div\frac{5}{7}L/\text{컵}$ 은 $5L$의 양을 1컵당 $\frac{5}{7}L$씩 나누라는 의미이므로 연산 결과인 7은 '컵'의 의미를 함축하게 된다. 한 발 더 나아가서 단위가 연산 가능한 특성을 지니도록 정의된다는 노은환·강정기·정상태(2014)의 연구결과에 따른다면 $(\frac{1}{2}\times 10)\div\frac{5}{7}$ 의 단위 연산 결과는 $(L/\text{병}\times\text{병})\div L/\text{컵}=\text{컵}$ 이 된다. 이러한 단위 연산의 가능성 허용은 연산 결과의 의미 이해를 돕는 요인이 될 가능성을 지닌다.

그러나 현 교과서는 단위가 갖는 개념적 특징 지도에 주력함으로써, 단위 연산 가능성을 인정하지 않는 것으로 보인다. 이를테면, 단위넓이 $1cm^2$는 가로, 세로가 각각 $1cm$, $1cm$인 정사각형의 넓이로써 정의되고 있으며, 직사각형의 넓이는 단위넓이를 채워가는 경험적 활동에 기반하여 제시되고 있다(교육과학기술부, 2011b). 그러나 단위의 표면적 특성으로 인한 연산 가능성 $cm\times cm=cm^2$ 이 허용된다는 증거는 어디에도 확인할 수 없다. 이것은 단위의 정의를 지나치게 강조한 나머지, 단위 연산 가능성의 이점을 십분 활용하지 못하는 한계를 지닌다. 이에 본 연구에서는 단위 연산의 가능성을 허용함으로써, 연산 결과의 의미 이해를 돕는 방안을 모색하는 것을 목적으로 한다.

이를 위해 먼저 연산의 결과적 측면에 주목하여 학생들의 반응을 살펴보고, 이에 대한 학생 인식을 확인해 보고자 한다. 다음으로 초등 교과서에서 연산과 단위에 관한 내용을 분석함으로써, 기존의 교수학적 변환이 갖는 특징과 한계를 파악하고자 한다. 그리고 연산 결과의 의미 이해 측면에서 단위가 갖는 이점을 다양한 예시를 통해 고찰해 봄으로써, 상황과 관련한 해석에 있어 단위가 갖는 효력을 구체화해 볼 것이다. 마지막으로 단위 연산 가능성을 허용한 교수학적 변환에 대한 구체적 구상을 제안함으로써, 교수·학습에 실질적 도움을 제공하고자 한다. 이렇게 설정된 연구문제 1, 2, 3, 4는 각각 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ장에서 다루고자 한다.

Ⅱ. 연산의 결과적 측면에 대한 이해 조사

1. 연구 방법

본 절에서는 연구목적 달성을 위한 연구 방법을 제시하였으며, 구체적으로 두 학급의 학생 반응에 대한 조사와 그 중 일부를 면담하는 방법을 취하였다.

가. 검사 문항

연구자는 초등학교 현장에서 5년간 연속해서 6학년 학생을 지도해 왔으며 이 과정에서 수집한 학생들의 문제해결 기록지가 본 검사 문항 개발의 밑거름이 되었다. 구체적으로, 2014학년도에 연구자가 지도하고 있

는 학반의 한 학생이 문제집에서 문제를 해결하다가 어려움을 호소하며 단위가 포함된 문제[2]를 문의한 적이 있었다. 연구자는 해당 학생과 면담하는 과정에서, 나누는 수와 나누어지는 수 중 해당 문제 상황에서 어느 것이 먼저 와야 하는지에 대해 어려움을 겪는다는 것을 확인할 수 있었다. 이후 연구자는 2013학년도에도 유사한 문제에서 오류를 범한 학생이 있었음을 떠올렸고, 해당 학생의 기록지[3]를 검토한 결과 넓이(m^2)와 페인트의 양(L)에서 나누는 수와 나누어지는 수의 순서에서 범한 오류였음을 재확인할 수 있었다. 연구자는 이 두 학생의 사례를 통하여, 학년과 소속 학교가 다름에도 불구하고 매우 유사한 오류가 발생하였음에 주목하였다.

이와 같은 경험으로부터 연구자는 연산 결과의 의미 이해에 있어 결정적인 역할을 하게 되는 나누어지는 수와 나누는 수가 서로 바뀌는 상황을 검사 문항에 포함하는 것이 첫 번째 연구문제를 해결하는데 있어 중요하다는 판단을 내리게 되었다. 또한 교과서에 제시된 문제에서 주로 사용하는 넓이 단위인 m^2와, 들이 단위인 L를 사용함으로써 단위의 생소함에서 오는 어려움을 최소화하고자 하였다. 수치의 측면에서는 자연수를 배제하고 분수를 이용함으로써 자연수의 어림을 통해 결과값을 도출하는 연구 대상자의 시도를 사전에 방지하고자 하였다.

이러한 의도를 반영하여 상황과 3개의 세부 문항을 포함하는 검사 문항을 개발하였다. 개발한 검사 문항에서는 3개의 문항에 수와 단위를 모두 포함하여 '$\frac{15}{2}m \times \frac{13}{5}m$'와 같은 방식으로 제시하였는데, 이는 상황에서 제시하는 수치가 무엇을 말하는 것인지 인식을 용이하게 하기 위함이었다. 그러나 일부 학생을 대상으로 사전 투입해본 결과, 제시된 계산식에 부가된 단위를 보고 논리적 근거 없이 그대로 옮겨 쓰는 문제점이 발생하였다. 또한 교과서에서 일반적으로 제시되는 방식이 아니기 때문에 혼동을 가져올 수 있다는 판단하에 단위를 제외하여 제시하는 것으로 검사 문항을 수정하였다. 이후에는 문항의 제시된 상황이 일반적으로 통용될 만한 상황인지, 상황과 제시된 문항에서 오류는 없는지, 지나치게 생소한 문항은 아닌지, 문항에 기술된 내용이 학생의 입장에서 이해할 만한 수준인지 여부를 검토하고 수정하였다. 이 모든 과정은 신뢰도와 타당도가 높은 검사 문항을 만들기 함이었으며 검사 문항은 아래와 같다.

> **상황.** 가로가 $\frac{15}{2}m$, 세로가 $\frac{13}{5}m$인 직사각형 모양의 벽을 칠하는데, $\frac{7}{9}L$의 페인트가 필요하다.
>
> (1) $\frac{15}{2} \times \frac{13}{5}$을 계산하고, 위 상황에 맞추어 계산 결과가 의미하는 바를 쓰시오.
>
> (2) $(\frac{15}{2} \times \frac{13}{5}) \div \frac{7}{9}$을 계산하고, 위 상황에 맞추어 계산 결과가 의미하는 바를 쓰시오.
>
> (3) $\frac{7}{9} \div (\frac{15}{2} \times \frac{13}{5})$을 계산하고, 위 상황에 맞추어 계산 결과가 의미하는 바를 쓰시오.

검사 문항은 (1), (2), (3)의 세부 문항을 포함한다. 결과의 의미를 간략하게 살펴보면 (1)은 직사각형 모양의 벽의 넓이가 $19\frac{1}{2}m^2$임을 나타내고, (2)와 (3)은 각각 '$1L$로 칠할 수 있는 벽의 넓이가 $25\frac{1}{14}m^2$ ($25\frac{1}{14}m^2/L$)', '$1m^2$를 칠하는데 필요한 페인트의 양이 $\frac{14}{351}L$ ($\frac{14}{351}L/m^2$)' 가 된다.

특히 문항 (2)와 (3)은 나누는 수와 나누어지는 수의 위치만 다른, 쌍을 이루는 형태의 문항이므로 앞서 제시된 문항이 다음에 제시되는 문항의 해결에 영향을 미칠 가능성이 예상되었다. 이러한 영향을 받지 않도록 하기 위해 검사지의 각 장에 한 문항씩만을 배치하여 총 3장으로 검사지를 제작하였고, 한 문항의 해결

---

2) 이OO 학생이 질문해 온 문제 : 가로가 $5\frac{1}{4}m$이고, 세로가 $4m$인 직사각형 모양의 꽃밭에 $3\frac{3}{8}L$의 물을 고르게 뿌렸습니다. $1m^2$ 의 꽃밭에 뿌린 물은 몇 L인 셈입니까?

3) 박OO의 기록지에 있는 문제 : 가로가 $4\frac{4}{5}m$, 세로가 $\frac{7}{36}m$인 직사각형 모양의 벽을 칠하는데 $\frac{5}{9}L$의 페인트가 필요합니다. $3m^2$의 벽을 칠하는 데 필요한 페인트는 몇 L입니까?

이 끝나면 수거한 후 다음 문항을 제시하는 방식으로 투입하였다. 또한 연구 대상의 절반에는 검사 문항 (1)-(2)-(3)의 순으로 제시하고, 그 나머지 절반에는 (1)-(3)-(2)의 순서로 제시하였다. 이는 (2)와 (3) 중 특정 문항이 먼저 제시됨에 따라 영향을 받는 경우가 있다면 연구 결과에서 이를 다루고자 하는 의도에서였다.

나. 연구 대상

연구자는 사칙연산에 관한 전반적 학습이 이루어진 학생이 연구 대상으로 적절할 것으로 판단하였다. 따라서 연구 대상자는 6학년 학생으로 한정하였으며, 선정된 이들은 경남 사천의 D초등학교 두 학급에 소속된 52명의 학생들이다. 이들은 남·여가 고르게 분포된 일반 학급의 학생이며 자연수, 분수, 소수의 사칙연산을 충분히 학습한 학생들이다.

연구 대상자 52명 중 일부는 연산 결과의 의미를 어떻게 이해하고 있는지 구체적으로 확인하기 위하여 면담하였으며, 이들은 제출된 기록지를 통해 분류된 A, B, C, D, E의 다섯 그룹에 포함된 학생들이다. 각 그룹의 분류 기준과 면담자 선정에 관한 내용은 다음 [표 1]과 같다.

[표 1] 연산 결과의 의미 이해에 기반한 분류 기준 및 면담 대상자 선정

[Table 1] interviewee selection and classification standard based on recognization in the meaning of calculation results

그룹	연산 결과의 의미 이해			그룹별 인원	면담 대상자 선정 인원 (면담 대상자 명명)	선정 기준
	(1)	(2)	(3)			
A	○	○	○	2	2 (SAA, SAB)	전원 선정
B	○	○	×	3	1 (SB)	각 그룹별 임의 추출
C	○	×	○	5	1 (SC)	
D	○	×	×	27	1 (SD)	
E	×	×	×	15	0	선정하지 않음
				계	5	

면담 대상자는 총 5명으로 A그룹만 2명 전원을 선정하였고, 나머지 3그룹의 대상자는 임의로 1명씩 선정하였다. 또한 연산 결과의 의미를 전혀 이해하지 못한 E그룹은 면담이 불필요하다는 판단에서 면담을 수행하지 않았다. A그룹의 2명 전원을 면담 대상자로 선정한 것은 대부분의 연구 대상자가 연산 결과의 의미를 이해하지 못한 결과를 고려하여, 이들의 연산 결과 의미 이해에 대한 면밀한 확인이 필요하기 때문이었다. 연구자는 이들의 면담 내용을 용이하게 기록하고자 각 면담 대상자들을 각각 SAA, SAB, SB, SC, SD로 명명하였다.

다. 연구 절차 및 자료 수집 방법

연구는 다음과 같은 절차로 수행되었다. 먼저 연구자는 학생들이 단위가 포함된 문제에 대한 어려움을 겪는다는 것으로부터 연구의 필요성을 인식하게 되었다. 이와 같은 연구 동기로부터 구체적인 연구 목적과 연구 문제를 구체화하게 되었으며, 그동안 관찰하고 기록한 내용을 토대로 검사 문항을 작성하였다. 작성한 검사 문항은 수정 과정을 거쳐 학생들에게 투입하였고, 이를 회수하여 분석한 후 면담 대상자를 선정하였다. 연구자는 선정된 대상자와 면담하였으며, 학생이 기록한 내용과 면담 내용을 토대로 연구 결과를 도출하였다. 공동연구의 장점을 살려 연구를 수행하는 대부분의 과정에서 의논하였으며, 이는 연구의 질을 높이기 위함이었다. 구체적으로 연구목적 및 연구문제 구체화, 검사문항 작성 및 검토, 검사 문항 기록지 분석, 면담 대상자 선정, 면담내용 분석, 연구결과 도출의 각 항목마다 논의하였다.

연산 결과의 의미 이해에 대한 학생실태를 파악하기 위해 2014년 9월 30일 자율활동 시간을 이용하여 52명의 연구 참여자에게 검사 문항을 적용하였다. 적용한 검사 문항은 작성이 끝난 후 회수하였으며, 이 중 5명을 면담하였다. 연구자는 점심시간 또는 방과 후 시간을 이용하여 개별 면담을 실시하였으며, 1인당 평균 면담 시간은 10분 가량이었다. 연구자는 학생의 응답을 주의 깊게 듣고 면담 기록지에 기록하였으며, 기록하는 과정에서 내용이 누락되거나 정보의 재해석이 필요한 경우를 대비하여 스마트폰의 음성녹음 기능을 이용하여 전 과정을 녹취하였다. 이와 같은 면담 내용은 학생들의 인지적 특성 파악을 위한 기초 자료로 이용되었다.

면담을 위한 발문은 학생이 기록한 결과의 의미를 명확히 파악하기 위함이며, ‘이게 무슨 말이니?’, ‘왜 이렇게 생각하니?’와 같이 연구 문항에 주어진 내용을

다시 한 번 질문하는 방식을 취하였다. 또한 본 연구에서 수행하는 면담은 연산 결과의 의미 이해에서 단위의 이용 유무가 주된 관점이 된다. 따라서 연구자가 연구 대상자를 면담하는데 있어 단위를 언급하거나, 그와 관련된 내용이라는 의도를 노출하지 않도록 주의하는 것이 필요할 것으로 생각되었다. 이에 연구자는 질문하는데 있어(예를 들어 $\frac{7}{9}L$대신) '이 것', '그 것', '그 생각' 등의 지시대명사를 사용하여 면담의 중립성을 최대한 보장하고자 하였다.

라. 자료 분석 방법

본 연구에서는 연산 수행과 연산 결과의 의미 이해, 두 측면에 대해 분석하였다. 연산 수행은 각 문항에 대하여 그 결과값이 정확한지에 관한 것이고, 연산 결과의 의미 이해는 도출한 결과값이 의미하는 바를 정확히 알고 있는지가 핵심이다. 따라서 연구자는 한 문항에 대하여 이와 같은 두 측면을 반영하여 기록지를 제작하였으며, 이 기록지는 연구 결과를 도출하기 위한 밑바탕이 되었다. 기록지는 번호, 학반, 성명, 각 문항별 연산 수행 및 연산 결과의 의미 이해, 각 문항별 학생 반응을 기록하도록 제작하였으며 구체적인 내용은 [표 2]와 같다.

기록지 분석에서 연산 수행은 결과값이 올바른지를 확인하는 것이 기준이 된다. 그러나 연산 결과의 의미의 이해에서는 연산 수행 결과값과는 별개로, 그 의미에 초점을 두어 채점하였다. 예를 들어 한 학생의 경우, 문항 (1)에서 $\frac{15}{2}\times\frac{13}{5}=\frac{39}{2}=18\frac{1}{2}$ 로 계산하는 오류를 범하고 '$18\frac{1}{2}$은 가로가 $\frac{13}{2}$ 세로가 $\frac{13}{5}$인 직사각형의 넓이'라고 기록하였다. 이 경우 연산 수행에서는 오류를 범하였으므로 ×로, 결과의 의미는 올바로 이해하였으므로 ○로 채점하였다. 즉, 한 현상에 대하여 두 가지 관점으로 구분하여 채점하였다. 또한 문항 (1)은 직사각형의 넓이가 $19\frac{1}{2}m^2$가 됨을 뜻하지만, 넓이를 뜻한다는 표현이 포함되었다면 넓이 단위인 m^2을 기록하지 않은 경우에도 정답으로 처리하였다. 마찬가지로 (2)와 (3)에 대하여 넓이 단위인 m^2를 기록하지 않은 일부 답안들은, 문항 (1)의 결과를 살펴본 후 넓이를 뜻한다는 표현이 포함된 경우에는 정답으로 인정하였다. 예를 들면, 문항 (1)이 직사각형의 넓이를 뜻한다고 답한 학생이 문항 (2)에 대하여 '$1L$에 $25\frac{1}{14}$ 만큼 칠할 수 있다'로 기록한 경우가 해당된다.

학생들의 기록지를 채점하는 과정에서, 정확하게 단

[표 2] 자료 분석을 위한 기록지의 일부

[Table 2] Some part of recording paper for material analysis

번호	학반	성명	연산 수행 및 연산 결과의 의미 이해						세부결과 분석		
			1 연산	1 의미	2 연산	2 의미	3 연산	3 의미	문항 1 ($=19\frac{1}{2}m^2$)	문항 2 ($\frac{351}{14}m^2/L=25\frac{1}{14}m^2/L$)	문항 3 ($\frac{14}{351}L/m^2$)
3	6-1	김00	×	×	×	×	×	×	똑같이 페인트에 $\frac{13}{5}$을 곱하면 된다.	$=14\frac{1}{25}$	$25\frac{1}{14}$는 직사각형 넓이가 1일때 사용되는 페인트의 양
4	6-3	김00	○	○	×	×	○	×	$\cdots=\frac{39}{2}$ 이 답이 의미하는 것은 : 넓이	$(\frac{15}{2}\times\frac{13}{5})=\frac{39}{2}\div\frac{7}{9}=\frac{91}{6}$ 이 답이 의미하는 것은 : 시간	$=\frac{14}{351}$ 이 답이 의미하는 것은 넓이

위를 m^2, m^2/L , L/m^2 로 기록하거나 이와 완전히 동일한 뜻으로 풀어서 쓴 학생은 단 한 명도 존재하지 않았다. 그러나 두 학생은 기록된 단위에서 약간의 오류가 있기는 하였으나 매우 특별할 만큼 정답과 유사함을 확인할 수 있었다. 이 중 한 학생은 문항 (1)의 결과를 기록하는데 있어 $19\frac{1}{2}m^2$를 $19\frac{1}{2}cm^2$로 기록하는 오류를 범하였는데, (2)와 (3)의 결과에서도 동일하게 단위에서만 오류를 범하였을 뿐 기타 내용에는 오류가 없었다. 또 다른 학생은 문항 (3)에서만 단위 m^2을 m로 쓰는 오류를 범하였고 문항 (1), (2), (3)에서 기타 오류는 발생하지 않았다. 연구자는 이들이 비록 오류를 범하였으나 문항 (1), (2), (3) 의 결과를 기록한 맥락과 타 학생들의 기록한 내용과 비교할 때 이들이 연산 결과의 의미를 이해하지 못하였다고 판단내리기는 어려웠다. 또한 이러한 단위를 정확하게 기록하는 것, 또는 풀어 쓰는 것이 생소하다는 점을 고려한다면 이 두 학생의 반응은 사칙연산 오류와 같이 중대한 것으로 판단하지 않고 정답으로 처리하는 것이 올바르다는 판단을 내리게 되었다.

면담 자료의 분석은 면담을 수행하는 과정에서 연구자가 작성한 필드 노트가 주된 분석원이 되었다. 자료 분석의 초점은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 하나는 연구 대상자가 연산 결과의 의미를 어떻게 이해하였는지에 관한 것이고, 또 하나는 연산 결과의 의미를 이해함에 있어 단위를 어떻게 활용하는지에 관한 것이다. 연구자는 필드 노트에 기록된 내용에서 위 두 가지 초점과 관계된 부분을 잠정적인 항목으로 삼고, 이를 재검토하여 중요도가 높은 항목들을 핵심 범주로 설정하였다. 연구자는 연구 결과에 반영된 면담 내용을 이와 같은 방법으로 설정된 핵심 범주에 근거하여 기술하였다.

2. 연구 결과

가. 양적 측면에서 연산 결과의 의미 이해 정도 분석

연구 대상자 52명 중 각 연구 문항에서 연산 수행과, 연산 결과의 의미 이해에 관한 도수와 정답율은 다음 [표 3]과 같다.

[표 3] 연산 수행과 연산 결과의 의미 이해에 관한 도수와 정답율 (N=52)

[Table 3] The frequency number and a percentage of correct answers of calculation execution and recognize meaning of calculation results (N=52)

문항	연산 수행		연산 결과의 의미 이해	
	정답 인원(명)	비율(%)	정답 인원(명)	비율(%)
(1)	43	82.69	39	75
(2)	29	55.77	5	9.62
(3)	32	61.54	7	13.46

[표 3]에서는 연산 결과의 의미를 이해하는데 있어 연산 수행과 연산 결과의 의미 이해 결과가 많은 차이를 보임을 확인할 수 있다. 정확한 연산을 수행하는 학생의 비율은 문항 (1)이 82.69%로 상당히 높게 나타났고, (2)와 (3)도 역시 절반 이상의 학생이 올바른 연산을 수행할 수 있는 것으로 확인되었다. 그러나 연산 결과의 의미 이해는 문항 (1)이 75%로 비교적 높게 나타났을 뿐, 문항 (2)와 문항 (3)은 각각 9.62%, 13.46%로 상당히 저조한 것으로 드러났다. 특히 주목할만한 점은 성공적으로 연산을 수행한 학생의 비율과, 연산 결과의 의미를 이해한 학생의 비율 차이이다. 문항 (1)의 연산 수행과 연산 결과의 의미 이해에 성공한 학생들은 7.69%의 차를 보이는 반면 문항 (2)와 (3)은 각각 46.15%, 48.08%로 상당히 높은 차이를 보인다. 이는 특히 문항 (2)와 (3)에서 연산은 올바로 수행할 수 있으나 그 의미를 이해하는 데에는 많은 어려움을 겪고 있다는 것으로 해석된다.

또한 연구자는 연산 결과의 의미 이해에서 개개인의 학생들이 어떠한 반응을 보이는지를 살펴보고자 하였다. 이는 연산 결과의 의미 이해에서 보이는 개인별 반응을 살펴볼 수 있는 자료가 된다는 점에서 의미가 있으며, 그 결과는 동일한 유형별로 분류하여 다음과 같이 5개의 그룹으로 [표 4]에 제시하였다.

[표 4] 연산 결과의 의미 이해에 관한 그룹별 정답 인원 및 비율 (N=52)

[Table 4] The number of people and ratio, selected correct answer of recognize meaning of calculation results (N=52)

그룹	문항별 채점결과			그룹별 인원 (명)	비율 (%)
	(1)	(2)	(3)		
A	○	○	○	2	3.84
B	○	○	×	3	5.76
C	○	×	○	5	9.61
D	○	×	×	28	53.85
E	×	×	×	14	26.92
계				52	100

[표 4]에서 확인할 수 있는 바와 같이 문항 (1), (2), (3)의 연산 결과의 의미를 올바로 파악한 학생은 3.84%에 해당하는 2명뿐임을 확인할 수 있다. 또한 (1)의 연산 결과의 의미는 이해하고 있으나 (2)와 (3)의 연산 결과의 의미를 이해하지 못하는 학생들의 집단인 D그룹은, 절반이 넘는 53.85%에 해당하는 학생들의 사례라는 점에서 중요성을 갖는다. 26.92%의 학생에 해당되는 그룹 E는 (1)과 같은 단순한 의미조차도 이해하지 못하고 있다는 점에서 문제점을 지적할 수 있다.

나. 그룹별 학생들의 주요 반응 분석 및 논의

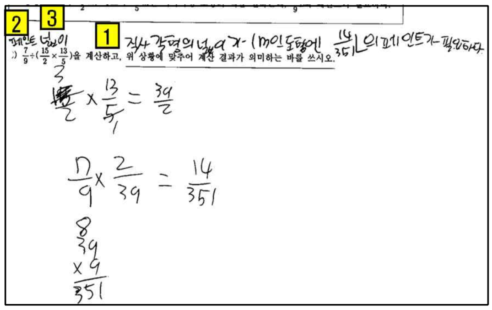
양적 연구와 더불어 연구자는 분류한 각 그룹에서 선정된 학생에 대하여 면담하고, 반응을 분석하였다. 면담을 통해 분석한 주요 반응은 다음과 같다.

(1) 절차적 지식에 의존한 연산 결과의 의미 파악 : SAA, SAB

A 그룹의 SAA과 SAB는 연구문항 (1), (2), (3)에 대하여 단위의 기록에서 일부 오류가 발견되었으나 그 외의 오류가 없어 정답으로 분류한 학생들이다. 연구자는 SAA가 연산 결과의 의미를 어떻게 이해하였는지, 또한 연산 결과의 의미를 이해하는데 있어 단위를 어떻게 활용하는지를 확인해 보고자 면담을 수행하였다.

RAA-1[4] : ([그림 1]의 1[5]을 가리키며) 이 계산 결과가 의미하는 바를 왜 이렇게 생각했니?

SAA-1 : 이건 페인트에서 직사각형의 넓이를 나눠서요.



[그림 1] SAA의 검사 문항 (2)에 대한 풀이

[Fig. 1] SAA's solution of problem (2)

연구자는 SAA-1의 면담내용을 통해, SAA가 연산 결과의 의미를 파악하기 위하여 페인트 양과 직사각형의 넓이를 어떻게 이용하였는지에 대한 절차를 확인할 수 있었다. 그러나 SAA가 왜 그러한 절차를 활용하였는지에 대한 생각을 파악해 낼 필요가 있었으며, 구체적으로 SAA가 연산 결과의 의미를 파악하는데 있어 단위를 활용하는지 확인하기 위하여 다음과 같이 면담을 이어나갔다.

RAA-2 : 그게 무슨 말인데?

SAA-2 : ([그림 1]의 2를 가리키며) 여기에다가 ([그림 1]의 3를 가리키며) 이걸 나눠서요. 넓이는.... (잠시 머뭇거리다가) 넓이는 그냥 $1m$로 생각했어요.

연구자는 면담 내용 중 SAA-2를 토대로, SAA는 나누어지는 수인 페인트의 양과 나누어지는 수인 넓이를 연산 결과의 의미 이해에 활용한다는 것을 알 수 있었다. 그러나 SAA가 제시한 연산 결과의 의미에서

4) 연구자는 편의상 R로 표현하였다. 그 뒤에 붙은 문자는 대상자의 그룹을 나타내며 '-' 뒤의 숫자는 연구자의 발문 순서대로 붙인 것이다. 이는 논문 기술에서 면담 내용을 지칭할 때의 편리함을 위한 것이며, 예를 들어 RAA-1은 SAA과의 대화 내용에서 연구자가 첫 번째로 말한 내용이라는 뜻이다. SAB-2는 SAB가 두번째로 말한 내용이라는 뜻이다.

5) 1, 2, 3 … 은 내용 진술의 편의상 학생 학습지에 연구자가 작업하여 표시한 것이다.

넓이를 왜 $1m$로[6] 생각하였는지 그 근거는 대지 못하였다. 이와 같은 내용을 토대로 연구자는 SAA가 연산 결과의 의미 이해에서 단위를 활용하지 않았을 뿐만 아니라, 기술한 연산 결과의 의미에 대한 근거도 명확하지 않음을 알 수 있었다. 또한 연구자는 SAA가 일부 내용에서의 근거를 대지 못함에도 불구하고 매우 간결한 풀이 방법을 사용하였다는 사실로부터, SAA가 유사 문제 해결 경험이 있는지에 대한 의문을 품게 되었다. 유사한 문제를 풀어본 경험이 있는지를 묻는 연구자에게 SAA는, 그러한 경험이 있다고 말하였으며 구체적으로 어떠한 문제였는지까지도 기억하고 있었다. 이를 통해 연구자는 SAA가 연구 문항의 해결에서 이미 경험한 유사 문제의 절차적 지식만을 기억하고 있음을 알 수 있었다. 또한 이유나 근거는 명확하게 제시하지 못하는 데 반해 결과는 정확히 제시하는 것으로부터, SAA가 문제해결 과정보다는 결과에 치중하고 있다는 것도 파악할 수 있었다.

SAB는 '계산 결과의 의미를 왜 이렇게 생각하는지'를 묻는 연구자의 질문에 학원에서 이와 유사한 문제를 여러 차례 해결해 본 경험이 있고, 해결하는 과정에서 많은 어려움을 겪었으며 지금은 어떻게 풀어야 하는지를 알고 있다고 자세히 설명하였다. 연구자는 SAB가 기억하고 있는 유사한 문제가 어떠한 것인지를 물었으며, SAB의 응답으로부터 그것이 검사 문항과 매우 유사하다는 판단을 내릴 수 있었다. 이것은 SAB 역시도 유사 문제 해결의 경험이 검사 문항의 해결에 많은 영향을 주었다는 것을 의미한다.

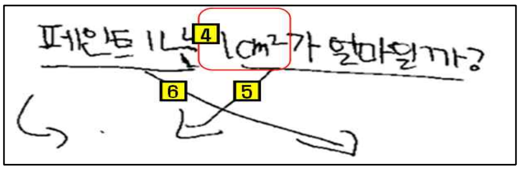
한편 연구자는 SAB의 검사 문항 (2)의 풀이 과정에서 [그림 2]와 같은 특이한 그림을 발견할 수 있었다. 연구자는 [그림 2]와 동일하거나 유사한 그림을 다른 연구대상자의 사례에서는 발견할 수가 없었는데, 이로부터 [그림 2]에는 SAB가 갖고 있는 독자적인 생각이 반영되었을 것으로 추측할 수 있었다. 따라서 연구자는 [그림 2]로부터 학생의 생각이 어떠한지를 확인함과 동시에 연산 결과의 의미를 이해하는데 있어 단위를 어떻게 활용하였는지도 확인하고자 하였다. SAB와의 면담 내용은 다음과 같다.

RAB-1 : ([그림 2]를 가리키며) 이 그림은 무슨 뜻이니?

SAB-1 : 이 그림은 제 마음대로 생각한거고요.... 1리터가 있으면 몇 제곱미터가 필요하냐고 했을때 쓰는 방법이에요.

RAB-2 : 그게 무슨 말인데?

SAB-2 : ($\boxed{4}$를 가리키며) 뒤에 있는걸... 구해야 하는걸 먼저 ($\boxed{5}$를 가리키며) 앞으로 넣어준다는 뜻이에요.



[그림 2] SAB의 문항 (2) 풀이의 일부

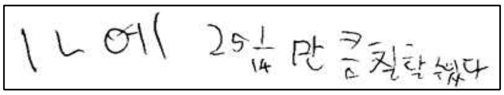
[Fig. 2] SAB's some part of solution of problem (2)

연구자는 SAB-2의 '구해야 하는 걸 앞으로 넣어준다'는 표현과 $\boxed{5}$, $\boxed{6}$의 화살표를 통해 SAB가 연산 결과의 의미 이해에서 수의 선후 관계를 이용한다는 것을 알 수 있었다. 그러나 앞으로 와야 하는 '구해야 하는 것' 이라는 표현은 검사 문항 (2)의 결과를 $25\frac{1}{14}cm^2/L$로 통합적으로 인식하는 것이 아니라, 비교하는 양인 $25\frac{1}{14}cm^2$에 초점을 두고 있다는 것을 의미한다고 볼 수 있다. 이는 검사 문항 (3)에서도 마찬가지였다. 연구자는 이와 같은 사례로부터, SAB가 기억하고 있는 문제풀이 방법에 의존하는 것과 단위의 연산을 활용하여 연산 결과의 의미를 도출해 내는 것은 아니라는 판단을 내리게 되었다.

(2) 감각과 우연에 의존한 연산 결과의 의미 이해 : SB, SD

SB는 B그룹에 속하며, 해당 그룹은 문항 (1)과 (2)에 대하여 정답으로 분류된 학생들의 집단이다. B 그룹에서 면담한 SB는 문항 (2)의 결과에 대하여 다음 [그림 3]과 같이 기록하였다.

6) SAA는 이어진 면담 내용에서 $1m^2$를 써야 하는데 $1m$로 잘못 썼다는 내용을 말하였다.



[그림 3] SB의 문항 (2) 풀이의 일부
[Fig. 3] SB's some part of solution of problem (2)

연구자는 왜 [그림 3]과 같이 생각하였는지 SB에게 질문하였는데 SB는 $25\frac{1}{14}$ 이 나온 절차를 여러 차례 설명하였다. 연구자는 이 설명을 듣고 절차가 아니라 왜 이러한 의미를 갖는지를 설명해 달라고 재차 강조하였으며, 면담 내용은 다음과 같다.

RB-1 : 계산 결과가 의미하는 바를 ([그림 3]을 가리키며) 왜 이렇게 생각했니?

SB-1 : $\frac{7}{9}L$ 페인트가 필요하니까요. ($\frac{39}{2}\times\frac{13}{5}=\frac{351}{14}$ 를 가리키며) 이만큼 칠하는데 $\frac{7}{9}L$ 가 필요하니까 나누기 $\frac{7}{9}$ 을 하면 이런답이 나올거라 생각했어요.

연구자는 SB-1에서 벽의 넓이를 칠하는데 '페인트 $\frac{7}{9}L$가 필요하니까 나누기 $\frac{7}{9}$을 한다'라는 인과 관계가 명확치 않은 구절에서, SB가 연산 결과의 의미를 어떻게 이해하였는지 좀 더 자세히 확인하고자 하였다.

RB-2 : 니가 말한 $\frac{7}{9}L$의 페인트가 필요한 것과 이 의미와 어떤 관계가 있는데?

SB-2 : (주어진 문제 상황에서 $\frac{7}{9}$을 가리키며) 이거를 역수로 고치면 대분수가 되니까.

RB-3 : 그렇게 하면 어떻게 되는데?

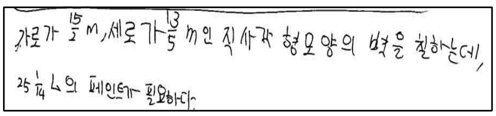
SB-3 : $\frac{9}{7}$ 요.7)

RB-4 : ('$1L$에 $25\frac{1}{14}$ 만큼 칠할 수 있다'고 쓴 SB의 기록을 가리키며) 그렇게 하면 왜 이런 의미를 갖게 되니?

SB-4 : 대분수가 되면 최소한 1보다 많이 나오니까 나누기를 하면.... 역수가 되면 1리터가 된다고요.

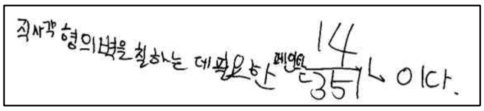
SB는 SB-2와 같이 $\frac{7}{9}$의 역수를 취하면 1보다 커지며, 이는 최소 1보다 크기 때문에 연산 결과의 의미에 $1L$를 기록하였다는 주장을 펼쳤다. 연구자는 SB가 결과의 의미에서 $1L$라는 근거를 이와 같은 비논리적인 방법을 이용하였다는 점에 주목하여, 역수를 취하여 1보다 작아지는 경우를 예로 들었을 때 어떠한 반응을 보이는지를 확인하여 혹시 보일수 있는 다른 증거를 찾아보고자 하였다. 따라서 연구자는 $(\frac{15}{2}\times\frac{13}{5})\div\frac{15}{10}$ 의 결과가 의미하는 바를 쓰라고 하면 어떠한 의미가 되는지를 물었으며 SB-5는 이에 대하여 머뭇거리다가 이것 역시 '1리터에 필요한 페인트의 양'을 의미한다고 말하였다. 그러나 왜 그렇게 되는지에 대한 이유를 '어찌어찌 하다가'이리 나왔다, '그냥 감이다'와 같은 표현을 사용하며 명확한 근거를 대지 못하였는데, 이는 SB가 기록한 연산 결과의 의미가 감각에 의존한 것임을 나타낸다. 이것은 SB가 문항 (3)에 대하여 '이 문제는 도저히 몰라서 계산만 하다가 포기했다'고 답한 사례에서도 확인할 수 있다.

SD는 문항 (2)와 (3)의 결과 모두 [그림 4], [그림 5]와 같이 페인트 양과 연결지어 설명하였다. 이 내용에서 주어진 문제 상황과 매우 유사한 내용이 포함되어 있는 것을 확인할 수 있었는데, 연구자는 이러한 의문을 해소하기 위하여 SD에게 왜 이렇게 생각하였는지를 질문하였다.



[그림 4] SD가 기록한 문항 (2) 결과의 의미
[Fig. 4] SD's record of the meaning of problem (2)'s result

7) 면담 내용에서 SB는 가분수를 대분수라는 용어로 사용하였다.



[그림 5] SD가 기록한 문항 (3) 결과의 의미
[Fig. 5] SD's record of the meaning of problem (3)'s result

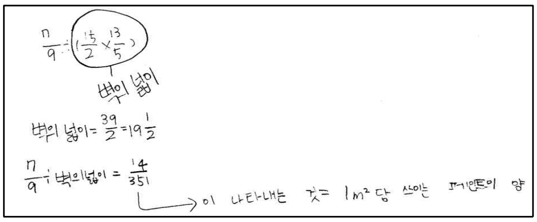
SD는 이와 같은 결과가 나온 이유에 대하여 별다른 근거를 대지 못하고 '계산을 해서 그냥 결과가 나왔다'고 설명하였다. 연구자는 SD에게 여러 차례 반복하여 어떠한 생각을 했는지를 물었으나 SD는 계산하는 과정만 반복하여 설명할 뿐 별다른 근거를 대지 못하였다. 또한 중간중간 '느낌이 들었다'는 내용과 '계산을 반복하여 수행하였다'는 내용을 토대로 볼 때, SD가 연산 결과의 의미를 기록한 근거는 감각에 의존하고 있으며 우연에 의한 것이라는 결론을 얻을 수 있었다.

연산 결과의 의미를 이해하고 있다는 것은 답을 구하는 것이 아니라 결과가 뜻하는 바가 무엇인지를 알고 있다는 것을 말한다. 그런데 SB와 SD는 면담 과정에서 여러 차례 절차의 반복을 요구하는 것이 아니라는 점을 연구자가 강조하였음에도 불구하고 결과가 뜻하는 바를 말하지 않고 절차를 반복하여 말하거나 별다른 근거를 대지 못하였다. 따라서 연구자는 이들이 교사와 수학적 의사소통이 충분히 가능하고, 검사 문항의 (1)의 해결에서 어려움을 겪지 않았던 수준을 고려하여 연산 결과의 의미를 이해하고 있지 못하다는 판단을 내리게 되었다.

(3) 결과의 미인식과, 예시를 통한 확인 후 연산 결과의 의미 이해 병존 : SC

SC는 문항 (1)과 (3)에 대하여 정답에 해당하는 그룹에 속한 학생이다. SC는 문항 (2)의 연산 결과인 $25\dfrac{1}{14}$ 를, '벽의 넓이와 같은 숫자가 되기 위해 페인트의 양에 곱해야 하는 수'를 뜻한다고 기록하였다. 그러나 여러 차례 지우고 다시 쓴 흔적이 기록지에 남아있었으며, '왠지 이거일 것 같아서 찍었다'고 기록한 내용에서 문항 (2)의 연산 결과의 의미를 이해하는데에는 많은 어려움을 겪었다는 것을 알 수 있었다.

그러나 SC는 문항 (3)의 계산 결과인 $\dfrac{14}{351}$ 이 $1m^2$ 에 쓰이는 페인트의 양이 나온다고 [그림 6]과 같이 올바르게 기록하였다. 따라서 SC가 어떻게 이러한 결과를 도출하였는지 확인함과 동시에, 이 과정에서 단위가 어떻게 활용되었는지를 확인하고자 하였다. 문항 (3)에 대한 면담 내용은 다음과 같다.



[그림 6] SC의 문항 (3) 풀이의 일부
[Fig. 6] SC's some part of solution of problem (3)

RC-1 : 계산 결과가 의미하는 바를 왜 이렇게 생각했니?

SC-1 : 페인트 양을 벽 넓이로 나누면 $1m^2$에 쓰이는 페인트의 양이 나와요.

RC-2 : 그 생각을 어떻게 했니?

SC-2 : 페인트 양에 따르는 숫자를 예를 들어서 생각해 봤어요. 예를 들어서 $3 \div 6$ 하고 $6 \div 3$ 을 해보니까 확실하더라구요.

SC는 페인트의 양을 벽 넓이로 나누는 상황을 예로 들어 해 본 후에 결과를 기록하였다는 의견을 제시하였다. 특히 SC-2에서는 '페인트 양에 따르는 숫자를 예로 들어서'라는 표현을 사용하였는데, 이는 나누는 수인 페인트 양을 기준으로 벽의 넓이를 생각한다는 것으로 해석할 수 있다. 그러나 이러한 SC와의 면담 내용에서도 역시 단위를 의미의 이해에 활용하는 모습은 찾아보기 힘들었다.

연구자는 문항 (2)의 의미는 잘 이해하지 못하는 SC가 문항 (3)의 의미는 어떻게 이해하였는지 확인하고자 하였다. 연구자의 질문에 대하여 SC는 문항 (3)은 유사한 문제를 해결해 본 적이 있으며, 문항 (2)는 그렇지 못하다는 의견을 내놓았다. 즉, 앞의 SAA, SAB와 동일하게 문제 해결의 경험에 의존한 사례를

SC에서도 확인할 수 있었다.

면담을 수행한 5명의 연구 대상자들은 크게 세 부류로 분류할 수 있었으며 이들의 사례로부터 다음과 같은 내용을 해석해 낼 수 있었다.

첫째, 연구 대상자들은 연산 결과의 의미를 이해하는데 있어 단위끼리의 연산은 전혀 활용하지 않으며(SAA, SAB, SC, SD), 연산 기호의 선후 관계를 통해 결과의 의미를 파악하려는 모습을 볼 수 있었다(SAA, SAB). 또한 의미를 파악하는 과정에서는 유사 문제 해결의 경험에 영향을 많이 받았으며(SAA, SAB, SC), 특히 SAA와 SAB는 나눗셈 기호를 기준으로 제시된 수의 선후 관계를 따져 결과가 어떻게 도출되는지를 도구적으로 기억하고 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 이러한 도구적 이해가 갖는 한계를 생각한다면, 이를 개선하기 위한 방안의 마련이 필연적으로 이루어져야 한다고 생각된다.

둘째, 표면적으로 서술된 바에 의하면 연산 결과의 의미를 올바로 이해한 것처럼 보이지만, 감각에 의존하였거나 우연에 의한 것일 수 있음을 확인할 수 있었다. SB는 문항 (2)의 연산 결과 의미를 올바르게 기록하였으나, 기록한 내용에 대한 적절한 근거를 제시하지 못하고 감각에 의존하는 모습을 보였다. 이러한 사례는, 학생의 생각을 파악하는데 있어 기술한 내용에만 의존하는 것이 한계를 지닌다는 것을 의미한다. 또한 SD도 역시 자신이 기록한 연산 결과의 의미에 대한 근거를 전혀 제시하지 못하고 있었다. 그럼에도 불구하고 SD가 기록한 내용은 올바른 연산 결과의 의미와 형식적인 면에서 상당히 유사하다는 특징이 있었다. 결과적으로 SB와 SD의 사례는, 주어진 문제에서 어떠한 결과가 도출되는지에 대한 감각이 상당히 뛰어남을 보여주고 있으며 이는 많은 문제해결 경험으로부터 비롯되는 것으로 보인다. 그러나 감각에만 의존한 문제해결이 한계를 지닌다는 점을 감안할 때, 이러한 학생들에게 연산 결과의 의미 이해를 위한 논리적 근거를 마련할 수 있도록 돕는 것이 필요할 것으로 보인다.

셋째, $a \div b$의 연산 결과 의미 이해와 $b \div a$의 연산 결과 의미 이해는 별개의 문제일 수 있음을 확인할 수 있었다. $a \div b$의 연산 결과 의미와 $b \div a$의 연산 결과 의미는 표면적으로는 나누는 수와 나누어지는 수의 자리만 바뀐 형태이므로 문제를 해결하는데 있어 큰 어려움이 없으리라고도 생각할 수 있다. 그러나 SC의 사례에서 그렇지 않음을 확인할 수 있었으며, 이는 단위에 초점을 맞추어 연산 결과를 해석하기보다는 유사 문제 해결 경험에 기반하여 연산 결과를 해석하기 때문에 생긴 현상으로 보인다. 또한 SC가 (3)을 해결하는데 있어 예를 찾는 것으로부터 출발하였다는 점에 주목한다면, (2)와 같이 익숙하지 않은 상황에 대해서는 예를 찾는 것조차도 쉽지 않음을 의미한다. 즉, 다양한 방향으로 사고할 수 있도록 연산 결과의 의미 이해를 위한 다양한 상황에 노출시킬 필요성이 제기된다.

위의 논의로부터 학생의 사고를 확장하고, 현재의 어려움을 극복할 수 있도록 하는 교수 방법이 요구된다. 본 연구에서는 이를 극복하기 위하여 단위의 연산을 도입하는 것을 그 수단으로 삼고자 하며, 왜 이러한 어려움을 겪는지 다음의 교과서 분석을 통해 살펴보기로 한다.

Ⅲ. 연산에 관한 초등학교 교과서 분석

1. 곱셈과 나눗셈 연산의 초점

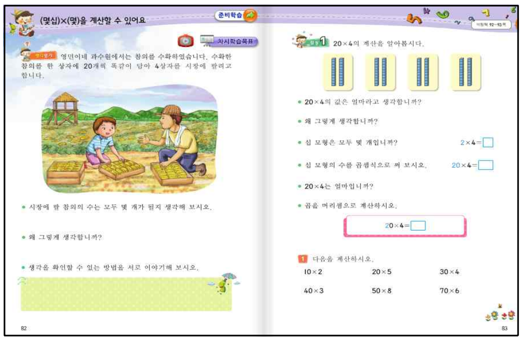
수학적 지식이 배경화와 개인화 과정을 거쳐 학교 수학이라는 지식으로 변화하였을 때, 수학 교과서는 이러한 변형된 지식을 담아 간직하는 전형적 방법이 된다. 따라서 학교 수학의 특성을 알아보는 좋은 방법 중의 하나는 수학 교과서를 분석하는 것이다(김현정·강완, 2008). 이에 본 절에서는 연산 결과의 의미 이해가 비교적 용이한 덧셈과 뺄셈은 제외하고, 곱셈과 나눗셈 연산에 관한 초등 교과서의 내용을 비판적으로 분석해 보고자 한다.

초등학교 3학년 교과서(교육과학기술부, 2010a)에 등장하는 나눗셈은 수치 위주의 연산이 주류를 이루고 있다. 교과서 49쪽에서는 '사과 6개'와 '한 봉지에 2개씩'이라는 단위는 무시되고 $6 \div 2 = 3$이라는 수치로써 다루어지고 있는데, 이 과정에서 단위는 무시되며 수치 연산에 전혀 부가되지 않는 모습을 보이고 있다. 만약 단위를 고려하여 식을 엄밀하게 설정하면, '6개$\div 2$개/봉지$=3$봉지' 로 정리될 수 있다. 여기서 주의할 점은 '한 봉지에 2개씩'이라는 조건을 '2개'로써 다루어서는 안 되며, '2개/봉지'로써 다루어야 한다는 것이다. 단위 측면에서 연산식은 $6 \div 2 = 3$과는 다른

방식으로 접근 가능하며, 왜 6 나누기 2가 '봉지 수'가 되는지를 이해하는데 도움이 될 수 있다. 그럼에도 불구하고 단위를 전혀 고려하지 않은 수치 위주의 연산은 단위를 이용한 해석의 이점을 충분히 활용하지 못하는 한계를 드러낸다.

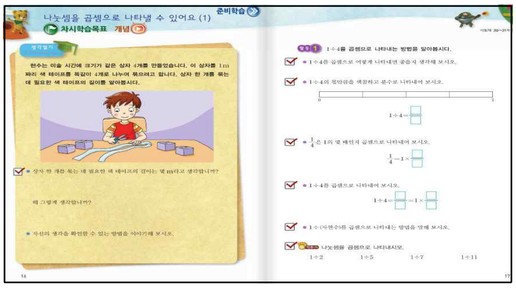
한편, 연산에 관한 초등학교 교과 내용은 결과적 측면에 비해, 연산 수행 위주의 과정적 측면이 주류를 이룬다. [그림 7]은 초등학교 3학년의 곱셈에 관한 교과 내용(교육과학기술부, 2010a)이며 이 내용에서 생각 열기는, 상황을 제시만 할 뿐 연산 수행을 자연스럽게 유도하기 위한 도구에 불과한 것으로 보인다. 생각 열기 이후의 활동은 20×4의 값은 무엇이며, 왜 그렇게 나오는지에 대한 내용을 십진 블록을 활동에 이용하게 함으로써 자연스런 이해를 도모하고 있다. 이는 연산 수행이라는 과정적 측면이 주류임을 분명히 보여주는데 이러한 패턴은 이후의 내용 전개에서도 마찬가지로 진행된다.

학년이 높아지더라도 이러한 경향성은 여전히 유지된다. [그림 8]은 초등학교 5학년 교과서(교육과학기술부, 2011b)에서 나눗셈을 곱셈으로 변환시키는 내용을 다루고 있다. 이 부분 역시 상황의 설정으로부터 도입되고, 이후 전개는 연산 수행 위주의 내용으로 구성되어 있다.



[그림 7] 몇십 × 몇의 곱셈

[Fig. 7] The multiplication of double digit number and single digit number



[그림 8] 나눗셈을 곱셈으로 변환

[Fig. 8] The convert division to multiplication

문제 해결자가 문제를 원활하게 해결하기 위해서는 문제와 소통할 수 있어야 한다(강정기·노은환, 2013). 소통의 견지에 입각해 볼 때, 상황으로부터 산술식을 구하는 능력과 동시에 산술식을 상황에 적합하게 해석하는 능력은 균형을 이루는 것이 이상적이다. 그래야 문제 해결자는 상황으로부터 산술식을 생각해 내고, 동시에 자신이 설정한 산술식이 무엇을 의미하는지 음미하면서 문제 상황과 소통할 수 있게 되기 때문이다. 이러한 측면에서 산술식을 상황에 적합하게 해석할 경험적 기회를 제공하지 않는 것은 편중된 교수에 해당한다고 볼 수 있다.

문장제의 어려움은 식의 의미를 해석하는 소통 행위가 충분히 이루어지지 않고, 감각적 연산 선택으로 일관하는데서 빚어지는 현상으로 해석 가능하다. Greer(1994)는 문장제에 사용된 수는 초등 문장제에서 산술 연산의 선택에 영향을 미친다고 주장한다. 그의 연구에 의하면, 곱셈 문장제에서 승수가 정수인 경우 92%의 학생들이 적절한 연산 선택에 성공한 반면, 승수가 1보다 큰 소수인 경우 71%, 1보다 작은 소수인 경우 53%의 학생들이 적합한 연산 선택에 성공하였다. 이러한 결과는 수에 따라 선택하는 연산이 다를 수 있음을 나타내며 학생들이 수치에 의존한 감각적인 연산 선택에 집중함을 보여준다. 즉, 수치에 지나치게 민감함을 보이는 학생의 특징을 드러내는 것이다.

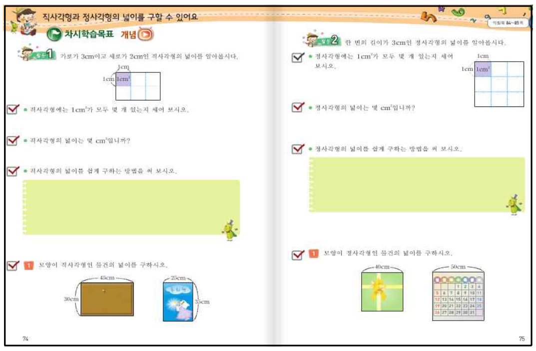
이상의 내용으로부터 초등 교과서에서 연산은 단위를 고려하지 않은 수치 위주로 다루어지고 있음을 알 수 있다. 또한 연산의 결과적 측면에 비해 과정적 측면의 내용이 주류를 형성하고 있다는 것도 알 수 있다. 결과적 측면을 다루는 문제 역시도 문제 상황에 적합

한 산술식의 값을 구하는 문항이 주류를 이루는바, 산술식의 상황에 적합한 해석이라는 측면이 간과되고 있음을 알 수 있다. 한편, 연산의 결과적 측면에 초점을 둔 문항 역시 단위는 연산 과정에 등장하는 요소가 아닌, 연산이 완결된 이후 결과 값에 부가되는 부차적 요소임을 확인할 수 있었다. 이러한 특징으로부터 현 교과서는 단위가 갖는 상황 해석의 이점을 충분히 활용하지 못하는 한계를 지님을 알 수 있다.

2. 초등학교 교과서에 제시되는 단위 관련 내용의 실태

본 절에서는 초등학교 교과서의 단위에 관한 내용을 검토해 보고자 한다. 대표적으로 길이 단위는 넓이 단위와 엄격히 다른 것으로 다루어지고 있다. 초등학교 4학년 2학기 교과서(교육과학기술부, 2010b) 73쪽에 등장하는 단위넓이에 대한 정의는 넓이 단위가 길이 단위의 곱에 의해 형성된 종속적 단위가 아님을 분명히 하고 있다. 노은환·강정기·정상태(2014)에 의하면, 단위 연산은 본질적으로 가능한 성질이 아니며, 연산이 가능하게 보이는 것은 단위의 개념 정의로부터 기인한 부차적 성질이다.

직사각형과 정사각형의 넓이는 단위넓이 정의를 기반으로 정당화된다. 먼저 대상의 내부에 단위넓이 $1cm^2$으로 몇 번을 덮을 수 있는지, 그 횟수로써 직사각형과 정사각형의 넓이를 구하게 된다. 이후 가로와 세로에 국한하여 덮는 횟수에 주목하게 함으로써, 이들 도형의 넓이를 측정된 변의 길이를 통해 쉽게 구하는 방법에 대해 탐구하도록 유도한다. 이를 통해 궁극적으로 직사각형과 정사각형의 넓이는 '가로×세로'임을 인식하게 한다. 이러한 내용은 다음 [그림 9]와 같이 4학년 2학기 교과서에 제시된다. 여기에서는 가로, 세로의 길이가 양의 정수가 아닌 유리수나 통약 불가능한 무리수가 아닌 상황이 전제됨으로써, 엄밀한 증명 없이 '가로×세로=직사각형의 넓이'라는 일반화가 진행된다. 여기서 좌변 '가로×세로'는 양의 곱이며, 우변 '직사각형의 넓이'는 단위넓이의 덮는 횟수에 해당한다. 학령 수준을 고려한 경험적 정당화에 해당하지만, 이는 단위넓이의 개념 정의로부터 직사각형의 넓이 공식이 유도 가능함을 인식시키려는 교육적 의도가 반영된 결과이다.



[그림 9] 직사각형과 정사각형의 넓이 공식 유도와 적용 (교육과학기술부, 2010b)

[Fig. 9] The inducement and application of formula of rectangle and square area(Ministry of Education nd Science Technology, 2010b)

이와 같은 넓이 공식 유도는 길이와 넓이를 별개로 취급하는 입장이 두드러지는데 특히 길이의 단위와 넓이의 단위는 본질적으로 무관한 것으로 다루어진다. 이는 현 교과서가 단위넓이의 정의에 기반하여 직사각형의 넓이 공식을 유도하는 정당화에 초점을 두고 있기 때문에 빚어진 현상이다.

5학년 1학기 교과서 115쪽에서는(교육과학기술부, 2011a) $1m^2$의 단위 역시 $1m$와 $1cm$ 사이의 관계와 무관한 설정으로 다루어진다. 또한 117쪽에서 $1km^2$이라는 단위 역시 $1km$와 $1m$ 사이의 관계와 무관한 설정으로 오로지 약속으로 다루어진다.

그러나 넓이와 길이가 별개의 대상이라고 해서, 이것의 단위가 무관한 것으로만 다루어지는 것이 바람직한지에 대한 의문이 제기될 수 있다. 실제로 교과서에 정의된 $1m^2(1m^2=10000cm^2)$ 개념의 이면에는 $1m=100cm$인 관계를 고려한 설정이 내포되어 있다. 즉, 사실상 $1m\times1m=100cm\times100cm=10000cm^2$이라는 연산이 반영된 개념 정의인 것이다. 이는 $1km^2$에서도 마찬가지로 적용된다.

그러나 넓이 단위는 임의로 설정되는 것이 아니라 단위 연산의 고려 하에 설정되는 것이 통상적이며, 노은환·강정기·정상태(2014)는 이것을 단위 연산을 가능하게 하는 연산 정의화(化)에 기인한다고 주장한다. 즉, 단위 연산의 가능성의 이점을 십분 활용할 목적으로,

이를 표면화시키는 방향으로 연산을 조작적으로 정의하는 것이다. 사실 $1km^2$는 km^2이 아닌 S로서 정의되어도 수학적으로 아무런 모순이 발생하지 않는다. 즉, $1S = 1000000m^2$ 으로 정의되어도 무방하다. 그럼에도 불구하고, 굳이 $1km^2$로 정의되는 것은 단위 역시 연산 가능한 대상으로 취급하여 다루기 위한 목적을 지닌다.

이는 비단 길이 단위에 국한된 것이 아니다. 속력의 단위 역시 '$\text{속력} = \frac{\text{거리}}{\text{시간}}$'이라는 공식에서 단위 연산이 가능하도록 설정됨으로써 $km/$시, $km/$초 등의 단위가 파생한 것이다. 이러한 관점에서 결국 단위는 본질적으로 연산 가능한 대상은 아니지만, 연산 가능하게 설정됨으로써 연산 가능한 대상으로 취급하고 다룰 수 있게 된다.

따라서 단위 연산을 허용하지 않는 교과 지도에 대한 다음의 의구심이 제기된다. 수치와 상황의 연결을 돕는 역할을 하는 매개 도구인 단위의 연산을 굳이 부정함으로써, 연산 결과의 의미 이해의 결여라는 문제점을 간과하는 것은 교육적으로 바람직한가? 결론적으로 '길이×길이=넓이'에 도달하는 만큼 단위 연산 가능성을 허용하지 않음으로써, 연산 결과의 의미 이해 결여를 초래하는 것이 적절한가? 다음 장에서는 이러한 의구심 하에 연산의 결과 의미 이해를 돕는 목적으로 단위 연산 도입에 주목하여 그 이점을 파악해 보고자 한다.

Ⅳ. 연산 결과의 의미 이해 측면에서 단위의 이점

본 장에서는 연산 결과의 의미 이해의 측면에서 단위의 이점을 구체적으로 논하고자 한다. 전술하였듯, 길이 단위와 넓이 단위는 엄격히 다른 측면을 지닌다. 그러나 본질적인 성질은 아니지만, 결과적으로는 $3cm \times 2cm = 6cm^2$ 와 같은 결과가 성립한다. 이러한 사례로부터 수치 뿐 아니라, 단위에서도 연산 도입의 가능성을 볼 수 있다. 즉, $3 \times 2 = 6$ 만이 성립하는 것이 아니라, $cm \times cm = cm^2$의 가능성 역시도 존재한다. 따라서 본 연구에서는 단위의 연산이 단위 고유의 특성이 아니라는 한계를 지님은 인정하되, 연산 결과의 의미 이해를 돕는 대안으로서의 역할에 주목하여 그 이점을 구체화해 보고자 한다.

그렇다면 먼저 단위에 대한 입장을 분명히 할 필요가 있다. 단위는 단지 수치에 부가된 부수적 요소로서 인식되어야 하는가? 아니면 단위는 수치와 대등한 요소로서 인식되어야 하는가? 본 연구는 후자의 단위가 갖는 구체성의 이점을 살리자는 관점의 입장을 취한다.

구체적으로 수치 부분은 단위 부분과 상호 보완적 관계를 지니며, 단위는 수치의 의미를 명확하게 하는 실재와 연결로서의 매개 도구로써 인정된다. 따라서 단위 연산의 허용은 매우 자연스럽다고 볼 수 있다. 이러한 단위의 연산 가능성을 단위의 본질적 특성으로 인정하게 되면, 다양한 연산에 대해서도 결과 해석이 가능해 진다. 예를 들어 '가로가 $\frac{15}{2}m$, 세로가 $\frac{13}{5}m$인 직사각형 모양의 벽을 칠하는데, $\frac{3}{2}L$의 페인트가 필요하다. $1m^2$의 벽을 칠하는데 필요한 페인트의 양은?'이라는 문장제를 생각해 보자. 이 문제에서 $(\frac{15}{2} \times \frac{13}{5}) \div \frac{3}{2}$ 와 $\frac{3}{2} \div (\frac{15}{2} \times \frac{13}{5})$ 중 어느 연산이 적합한지 파악하는 것은 쉬운 일이 아니다.

전통적 방식에서는 하나는 정답이며, 다른 하나는 답이 아니게 된다. 그러나 결과의 해석에서 단위를 포함하여 생각하게 되면, 두 연산 각각에 대한 해석이 가능해 진다. 전자 $(\frac{15}{2} \times \frac{13}{5}) \div \frac{3}{2}$ 에서 단위를 부가하게 되면 $(\frac{15}{2}m \times \frac{13}{5}m) \div \frac{3}{2}L$ 인데, 그 결과는 '$13m^2/L$'이 된다. 따라서 전자는 1L의 페인트로 칠할 수 있는 벽의 양이라는 의미를 지닌다. 반면 후자 $\frac{3}{2} \div (\frac{15}{2} \times \frac{13}{5})$ 에서 단위를 부가하게 되면 $\frac{3}{2}L \div (\frac{15}{2}m \times \frac{13}{5}m)$ 인데, 그 결과는 '$\frac{1}{13}L/m^2$'이 된다. 따라서 후자는 $1m^2$의 벽을 칠하는데 필요한 페인트의 양이라는 의미를 지닌다. 또 다른 해석으로는 다음과 같은 예를 들어 설명할 수 있다. '가로가 $\frac{15}{2}m$, 세로가 $\frac{13}{5}m$ 인 직사각형 모양의 벽을 칠하는데, $\frac{3}{2}L$의

페인트가 필요하다. $3m^2$의 벽을 칠하는데 필요한 페인트의 양은?' 이라는 문제가 주어졌을 때 이 상황에서 요구하는 것을 단위에 주목하여 살펴보면 '$L/3m^2$'가 된다. 따라서 구하고자 하는 단위를 '$L/3m^2$'로 맞추어 생각하면 $\frac{3}{2}L \div (\frac{15}{2}m \times \frac{13}{5}m) = \frac{1}{13}L/m^2$ 의 계산에서 $\frac{3}{13}(L/3m^2)$를 도출할 수 있다. 상황을 확장하여 생각하면 $\frac{b}{a}(m^2/L)$는 $\frac{2b}{a}(m^2/2L)$로 변형하였을 때 페인트 $2L$로 칠할 수 있는 벽면의 크기라는 의미를 가진다는 것을 알 수 있다. 또한 $\frac{b}{a}(m^2/L)$을 $2b(m^2/aL)$로 변형하면 페인트 aL로 칠할 수 있는 벽면의 양이 된다. 이외에 역수를 취함으로써 새로운 해석을 내어놓는 것도 가능하다. $\frac{b}{a}(m^2/L)$을 역수를 취하면 $\frac{a}{b}(L/m^2)$이 되며, 이는 $1m^2$의 벽면을 칠하는데 필요한 페인트의 양이 된다.

이처럼 단위에 초점을 두면 연산 결과에 대한 다양한 해석을 가능하게 한다. 이것은 수치와 단위를 분절된 개체로 다루는 것이 아니라 연관지어 생각할 수 있다는 데 그 장점이 있다.

단위는 공식의 암기에도 도움이 될 수 있다. '거리=속력×시간'이라는 공식은 단위의 측면에서 자연스럽게 유도 가능하다. 속력의 단위는 '$km/$시'로, 시간의 단위는 '시'로 설정한 경우 $km/$시$\times$시$=km$ 이며 여기서 km는 거리의 단위가 된다. 따라서 $km/$시$\times$시$=km$ 으로부터 '거리=속력×시간' 공식은 자연스럽게 추측될 수 있다. 이는 무조건적으로 공식만을 암기하려드는 학생에게 단위의 측면에서 공식을 재음미하게 함으로써 공식에 대한 이해를 보다 강화하는 경험을 제공해 줄 것이다.

또한 단위는 발견한 공식의 검증에도 활용 가능하다. Polya(1971)는 원뿔대의 옆면의 넓이 공식을 차원에 의한 검증으로 점검 가능함을 밝히고 있다.

차원에 의한 검증

R는 밑면의 반지름, r는 윗면의 반지름, h는 원뿔대의 높이, S는 원뿔대의 옆면의 넓이라면, $S=\pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2}$ 이다. 이를 차원에 의해 검증해 보면, $cm^2=1 \cdot cm\sqrt{cm^2}$ 으로 오류가 발견되지 않음으로써 이 공식은 차원의 검증을 통과한 것이다.

이처럼 단위는 연산 결과를 상황과 관련지어 해석하는데 도움을 줄 수 있는 도구로써 그 가치를 지니며, 다음 장에서는 이러한 이점을 십분 활용할 수 있는 구체적 방안을 모색해 보고자 한다.

V. 단위 연산 가능성을 허용한 교수학적 변환과 지도

교수학적 변환(Didactic transposition)이란, 사용되기 위한 도구로서의 학문적 지식으로부터 가르치고 배울 지식으로의 변환을 의미한다(Chevallard, 1988). 따라서 교육적 의도를 가진 지식의 변형은 어느 것이나 교수학적 변환이라고 할 수 있다(강완, 1991). Bosch & Gascon(2006)은 Chevallard의 아이디어를 반성하여 보다 세분화된 교수학적 변환 과정을 제안하였다. 첫 번째는 수학자들에 의해 발생한 학문적 지식(Scholarly knowledge)이다. 학문적 지식은 교육과정 입안자들이 공식적으로 설계한 가르칠 지식(Knowledge to be taught)으로 변환된다. 다음 이 지식은 교실에서 교사에 의해 실제로 교수되는 지식(Taught knowledge)으로 변환된다. 마지막으로 학생들에 의해 학습되고 이용될 지식(Learned, available knowledge)으로 변환된다. 이런 분석적 접근에 입각해 보면 결국 교수학적 변환은 학자나 교사가 아닌 학습의 주체인 학습자의 인지적 수용이 용이한 형태로 변형되어야 함을 알 수 있다.

교수학적 변환에서는 가르칠 지식의 출현이 교수학적 의도에 의존한다. 따라서 가르칠 지식을 둘러싼 교수학적 환경은 처음부터 바꾸어지거나 재조성되어야 한다. 지식은 인식론적 투자와 거부의 순환을 통해 전달되고 구성되므로, 배워야 할 지식에 대한 학습자의 인식론적 투자와 거부를 용이하게 해주는 것은 교수학적 변환에 있어서 환경 재조성의 기본 원칙이다(김현정·강완, 2008). 이러한 교수학적 변환의 원칙은 기존의 교수학적 변환이 학습자의 인식론적 투자와 거부를

용이하게 하지 못할 경우 새롭게 재조정되어야 함을 시사한다.

전술하였듯 단위 연산을 허용하지 않는 교수학적 변환 방식은 연산 결과의 의미 이해 결여라는 문제점을 초래한바, 본 장에서는 기존의 교수학적 변환을 재조정하고자 한다. 구체적으로 단위 연산의 가능성을 허용한 교수학적 변환을 제안함으로써, 연산 결과의 의미 이해를 돕고자 한다.

직사각형의 넓이 공식은 수학적으로도 공리계의 '정의'로 받아들여질 수 있는 사실이다(한인기·신현용, 2001; 허학도, 2006). 그렇다면 연산 결과의 의미 이해를 돕는 목적으로 직사각형의 넓이 공식을 공리계의 정의로써 허용하는 것은 과연 바람직한 교수학적 변환이 될 수 있는가? 직사각형의 넓이 공식을 정의로 가르친다면 깔끔한 출발점이 될지는 모르지만, 공식 이면에 담겨 있는 비례, 측정, 넓이의 보존성, 가법성, 승법성, 실수의 정의와 성질, 수체계의 곱의 연산, 극한의 개념, 공간에 대한 수학적 정의 등을 모두 무시한 알맹이가 빠진 단순한 정의에 지나지 않게 된다(허학도, 2006).

이러한 사실에 비춰볼 때 기존의 것을 전면적으로 수정하는 차원에서 교수학적 변환의 재조정이 이루어지는 것은 바람직한 일이 아닐 것이다. 이에 본 연구에서는 전면적 재조정이 아닌, 부분적 교수학적 변환의 재조정을 제안한다. 단위넓이에 의거한 직사각형 넓이 공식의 정당화는 유지하되 단위 연산 가능성을 허용하는 교수학적 변환을 채택하고자 한다.

구체적으로 이러한 교수학적 변환에 관한 다음의 단계별 지도를 제안한다. 1단계에서는 단위는 임의로 설정하게 된 것이기는 하지만, 연산의 고려 하에 설정된 것임을 주지시켜야 한다. 한 예로, 넓이의 단위 cm^2은 '가로×세로=직사각형의 넓이'라는 공식을 염두에 둔 설정임을 인식시키는 것을 의미한다. 따라서 단위 연산이 단위 고유의 본성은 아니지만, 이를 적극적으로 활용해도 무방함을 인식시키는 것이 이 단계의 과제이다.

2단계에서는 단위에 대한 연산의 해석이 가능함을 인식시켜야 한다. 이 단계에서는 단위의 연산을 고려하였을 때 얻어지는 결과를 해석하는 방법을 알려주어야 한다. 이를테면, L/m^2은 '$1m^2$의 면적에 대한 물질의 양(L)'이라는 의미를 지니고 있음을 인식시킨다. 여기서 유의해야 할 점은 분모에 숫자가 없어도 1이 생략된 형태로 해석 가능하다는 것이다.

3단계에서는 상황으로부터 산술식을 설정할 때 수치에 단위를 부가하는 방법을 알려주어야 한다. '한 병에 $\frac{1}{2}L$씩 들어 있는 우유 10병을 $\frac{5}{7}L$씩 컵에 나누어 담으려고 한다. 컵은 몇 개 필요한가?'라는 문제가 있다고 하자. 여기서 '한 병에 $\frac{1}{2}L$씩' 을 '$\frac{1}{2}L$'로 단위를 붙여서는 안 된다. '한 병에 $\frac{1}{2}L$씩'이므로 '$\frac{1}{2}L/$병'으로 단위를 붙여야 한다. 그래야 $\frac{1}{2}L/\text{병} \times 10\text{병} = 5L$ 로써, 그 결과는 한 병에 $\frac{1}{2}L$씩 들어 있는 우유 10병에 든 우유의 양이 될 수 있다. 그러나 학습자들은 $\frac{1}{2}L$ 앞에 붙은 '한 병에'라는 조건을 부차적 요소로 이해하여 이 단위를 잡아내지 못할 우려가 있다. 따라서 단위의 원활한 활용을 돕기 위해서는 이 부분에 대한 별도의 교수가 요구된다.

4단계는 단위를 연산하는 방법을 알려주어야 한다. 이 단계에서 수치 부분과 단위 부분을 개별적으로 구분하여 연산함으로써, 수치의 연산과 단위의 연산을 명확히 구분될 수 있도록 진술하는 것이 중요함을 일러준다. 이를 통해 학생들의 혼돈을 예방하고, 나아가 수치에 따른 단위의 연동성을 상승시킬 필요가 있다. 이를테면, $2L \div 3m^2 = (2 \div 3)(L \div m^2)$ 과 같이 수치와 단위의 연산을 구분하여 기술함으로써, 단위 연산에 보다 집중할 수 있도록 독려해야 할 것이다.

마지막으로 모든 단계를 거치게 되면, 상황 맥락의 문제를 제공하여 연산 결과의 의미를 단위 연산을 활용함으로써 해석하는 경험을 제공하여야 한다. 이를 통해 새롭게 습득된 지식의 유용성을 인식시키는 계기를 마련해야 할 것이다.

본 연구에서는 이와 같이 다섯 단계에 걸쳐 교수학적 변환을 제안하였으며, 이는 단위가 갖는 장점을 학교수학에서 활용하고자 하는 취지에서 비롯된다. 그러나 교수학적 변환의 2단계와 3단계에서 언급한 단위들은 비의 개념이 들어있어, 이를 학습하지 않은 학생들

에게 교수학적 변환을 활용하는 것은 적절하지 못하다고 생각된다. 예를 들어 3학년 교과서에 제시되는 '사과가 6개 있습니다. 한 봉지에 2개씩 담는다면 몇 봉지 담을 수 있는지 알아봅시다'를 해결하는 데 있어 단위 연산을 고려하여 '6개÷2개/봉지=3봉지' 로 해결하는 것은 3학년 수준에 적합하지 않다는 것이다. 따라서 현재 교육과정에서 제시되는 내용을 고려한다면 이와 같은 교수학적 변환은 6학년 학생에게 직관적인 수준에서 제시하는 것이 바람직하다고 생각된다.

앞서 언급한 바와 같이 단위가 갖는 장점을 현 교육과정에서 사용하는 것은 일정 부분 한계를 지니는 것이 사실이다. 그러나 교육과정이 지속적으로 변화한다는 것을 고려한다면, 단위의 장점을 살릴 수 있는 방안을 살펴보는 것은 의미있는 활동이 될 수도 있다. 이러한 관점에서, 교육과정을 구성할 때 수치와 단위의 연산을 모두 고려하여 문제를 제시하는 것은 연산 결과의 의미 파악에서 겪는 학생들의 어려움을 덜어줄 수 있는 한 방안이 될 수 있을 것이다.

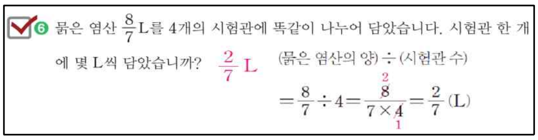
Ⅵ. 결 론

학교수학에서는 단위 고유의 개념적 특징을 고수하느라 단위를 수치에 부가된 부차적 요소로 취급할 뿐 만아니라 단위 연산의 가능성이 허용되지 않고 있는 것이 현실이다. 이와 같은 입장은 연산 결과의 의미를 이해하는데 단위가 갖는 이점을 간과하는 결과를 초래하였다.

이에 본 연구에서는 단위가 주는 해석의 이점을 적극적으로 활용하기 위하여 교수학적 변환을 제안하고자 한다. 단위 연산이 불가하다는 입장을 견지함으로써 연산 결과의 의미에 대한 학습자의 인지적 수용의 어려움을 간과하기보다, 이를 허용하고 적극 활용하게 함으로써 학습자의 부담 완화라는 교수학적 변환의 기본 원칙에 충실하고자 하였다.

이를 위해 먼저 수치 연산의 과정적 측면과 결과적 측면에 대한 이해를 조사하였으며, 그 결과 과정적 측면인 연산 수행에서는 비교적 양호한 결과를 나타내었으나 결과적 측면인 연산 결과의 의미 이해는 매우 미흡한 것으로 드러났다. 분류한 다섯 그룹 중 가장 우수한 것으로 파악된 A 그룹에서는 나누어지는 수와 나누는 수의 관계를 통해 결과의 의미를 파악하려는 시도를 볼 수 있었으나 단위 사이의 연산을 통한 결과 의미 파악 시도는 찾기 힘들었다. 또한 이들의 연산 결과의 의미 이해가 암기에 많은 부분 의존하는 것을 볼 때, 사고의 확장을 위한 방안이 필요함을 인식할 수 있었다. 그룹 B, C, D의 사례에서는 감각 의존, 문제 상황 참고, 간단한 예시를 찾는 활동 등을 통해 연산 결과의 의미 파악에 어려움을 겪는 모습을 확인할 수 있었으며 이들에게서는 단위가 하는 역할이 미미하였다는 것을 확인할 수 있었다. 특히 단위 사이의 연산 가능성을 이용한 결과 의미 파악 시도는 확인하기 어려웠다. 이들 연구대상자가 연산 결과의 의미를 파악하는데 있어 큰 어려움을 겪고 있음을 고려할 때, 본 연구에서 주장하는 단위 측면의 연산 활용은 이들이 갖는 어려움을 극복하게 해 주는 역할을 수행할 수 있을 것으로 보인다.

다음으로 기존의 교수학적 변환이 갖는 특징과 한계를 조명해 보고자 초등 교과서를 분석하였다. 그 결과 단위를 고려하지 않은 수치 위주의 연산, 과정적 측면 위주의 내용 구성을 지적할 수 있었다. 한 예로 5학년 2학기 수학익힘책 29쪽 교과서 CD에는 다음과 같은 문제와 그 풀이가 제시된다.8)


⑥ 묽은 염산 $\frac{8}{7}$L를 4개의 시험관에 똑같이 나누어 담았습니다. 시험관 한 개에 몇 L씩 담았습니까? $\frac{2}{7}$L

(묽은 염산의 양)÷(시험관 수)

$=\frac{8}{7}\div 4=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{7\times\underset{1}{\cancel{4}}}=\frac{2}{7}$(L)

[그림 10] 문장제와 그 해법에서 부차적 요소로 인식되는 단위 (교육과학기술부, 2011b)

[Fig. 10] The unit handled secondary element in word problem and solution (Ministry of education and science, 2011b)

위 [그림 10]에서 제시되는 $\frac{8}{7}\div 4$라는 연산 과정에서는 단위가 전혀 고려되지 않으며 단지 결과 값 $\frac{2}{7}$에 부가됨으로써 부차적 요소로써 취급하여 다루어지

8) 지도서에는 해당 문제의 풀이가 제시되지 않으며 정답인 '$\frac{2}{7}L$'만 제시된다.

고 있다. 제시된 풀이에서는 주어진 $\frac{8}{7}$과 4의 나눗셈을 수행하고, 그 결과에 단위 L 를 붙이는 것을 확인할 수 있다. 그러나 주어진 풀이의 $\frac{8}{7} \div 4$는 단위의 측면에서 '$L \div$ 개'에 해당하며, 결과값인 $\frac{2}{7}$의 단위는 L가 될 수 없다. 이는 앞서 언급한 Polya의 차원에 의한 검증조차 통과하지 못한 문제에 해당하며, 구체적으로 $L \div$ 개 $= L$가 되는 오류가 발생하게 된다. 이러한 문제는 수치의 연산을 수행하고, 이와 별개로 결과값에 단위를 기록하는 관습적인 풀이 방법에 의존하기 때문이라고 보여진다. 그리고 이러한 풀이 방법이 학생들로 하여금 연산 결과의 의미 해석에서 어려움을 겪게 하는 주요 요인으로 판단된다. 따라서 본 연구에서 주장하는 단위 연산의 교수학적 활용은, 수치와 단위가 모두 의미를 갖게 되므로 학습자의 어려움을 해소할 수 있는 한 방안이 될 수 있을 것으로 생각된다.

이 밖에도 현 교과서는 상황에 적합한 산술식과 그 답을 요구하는 문제는 다루지만, 역으로 산술식에 대한 적합한 해석을 다루는 문제는 간과하는 편향적 특징을 가짐을 파악할 수 있었다. 위 [그림 10]과 같은 문제가 대표적인 예이다. 이러한 편향성을 해소하기 위해서는 산술식을 주고 그 해석이 어떠한지를 파악하도록 하는 문제를 제시할 필요가 있다. [그림 10]의 문제를 변형하여 '각 시험관에 $\frac{8}{7}L$의 염산이 들어 있다. 이번 실험에는 4개의 시험관에 든 염산을 사용할 것이다. 이 상황에서 $\frac{8}{7} \times 4$ 라는 계산을 통해 도출된 수 $\frac{32}{7}$은 무엇을 뜻하는가?'와 같은 문제가 한 예가 될 것이다.

또한 단위의 교수는 단위넓이에 기반한 넓이 공식의 정당화 방식이 채택되고 있으며, 넓이 단위와 길이 단위는 무관한 것으로 다루어지고 있음을 알 수 있었다. 즉, 단위 연산은 부정되고 허용되지 않는 것으로 보이는데 이로부터 제기되는 연산 결과의 의미 이해에서의 걸림돌이, 과연 교육적으로 바람직한 것인가에 대한 의구심을 제기할 수 있었다.

연산 결과의 의미 이해 측면에서 단위의 이점을 고찰해 본 결과, 전통적 방식에 비해 단위에 초점을 둔 음미 활동은 연산 결과의 의미 해석에 자유성을 담보하는 역할을 하였다. 단위에 초점을 두게 되면, 역의 단위에 대한 해석도 가능하게 되고, 다양한 측면에서의 해석이 가능함을 알 수 있었다. 또한 암기하지 못한 공식의 추측이 가능할 뿐 아니라, 공식에 대한 이해를 강화하는 경험을 제공해 줄 수 있다는 것을 파악할 수 있었다. 마지막으로, 단위의 차원 검증을 통해 문제해결 과정을 검토할 수 있는 기제가 존재한다는 장점이 존재한다는 것을 확인하였다.

본 연구에서는 이러한 이점을 충분히 활용할 목적으로 단위의 연산 가능성을 허용한 교수학적 변환과 지도 방안을 제시하였다. 단위넓이에 기반한 정당화를 포기하고 단위 연산을 본질적 특성으로 허용하여도 논리상 하등의 문제는 없지만, 교육적으로 상실되는 효과 역시 간과할 수 없게 된다. 따라서 전면적 교수학적 변환의 재조정 대신 부분적 재조정을 시도하였다. 즉, 기존의 단위넓이에 기반한 정당화를 유지하되, 단위 연산 가능성까지 허용하는 교수학적 변환을 채택하였다.

마지막으로 제시된 교수학적 변환을 학교 수학에서 원활히 이행하기 위한 단계별 지도 방안을 제시하였다. 1단계는 단위는 연산의 고려 하에 설정된 것임을 인식시키는 것이며, 2단계는 단위를 통한 해석을 주지시키는 것이다. 3단계는 상황으로부터 산술식을 설정할 때 수치에 단위를 어떤 식으로 부가해야 하는지를 알게 하며, 4단계는 단위를 연산하는 방법을 숙지시키는 단계이다. 5단계는 상황 맥락의 문제를 통해 단위를 활용할 구체적 경험을 얻게 함으로써 마무리 짓는 단계이다.

본 연구는 단위 연산과 관련된 선행 연구를 거의 찾아보기 어려운 실정에서 단위 연산의 교수학적 가치를 일깨운다는 점에서 의의를 지닌다. 또한 수치에 부가된 단위를 부차적 요소로 인식하던 기존의 절름발이식 교육에서 수치와 단위를 대등한 입장에서 보아야 한다는 인식 전환에 기여할 것으로 생각된다. 바꾸어 말하면, 수치의 의미 이해를 돕는 단위의 역할에 주목함으로써 수치와 단위를 상호 보완적 관계로, 인식을 전환할 수 있도록 한다는 데서 의의를 찾을 수 있다.

단위 연산의 활용은 비단 이점만을 갖는 것은 아니다. 단위 연산을 자연스럽게 수행하다 보면 단위 연산이 단위의 본성인 양 착각하기 쉽다는 단점도 예상된

다. 따라서 교육 현장에서는 이러한 점에 유의하여 단위 없이도 연산 결과의 의미 이해에 문제점이 초래되지 않는 수준에 도달하게 되면, 이전과는 반대로 단위로부터 수치의 독립을 꾀해야 할 것이다. 또한 단위 연산을 지도하기 이전에 단위 연산이 본질은 아니며 연산 가능하도록 설정되었기에 가능한 현상임을 숙지시키는 노력이 병행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

강문봉・강홍규・김수미・박교식・박문환・서동엽・송상헌・유현주・이종영・임재훈・정동권・정은실・정영옥 (2005). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

Kang, M. M., Kang, H. K,, Kim, S. M., Park, K. S., Park, M. H., Seo, D. Y.. Song, S. H., Yoo, H. J., Lee, J. Y., Lim, J. H., Jeong, D. K., Jeong, E. S. & Jeong, Y. O. (2005). *The Understanding of Elementary Mathematics Education.* Seoul: Kyungmoonsa.

강완 (1991). 수학적 지식의 교수학적 변환. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 30(3), 71-89.

Kang, W. (1991). Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbook. *Journal of the Korean Society of Mathematical Educational Series A, <The Mathematical Education>,* 30(3), 71-89.

강정기・노은환 (2013). 특정 정보의 정신적 표상에 대한 연구. East Asian Mathematical Journal. 29(4), 449-466.

Kang, J. G. & Roh, E. H. (2013). A Study on the Mental Representation of a Specific Data. *East Asian Mathematical Journal,* 29(4), 449-466.

교육과학기술부 (2010a). 초등학교 수학 3-1. 서울: 천재교육.

Ministry of Education and Science Technology (2010a). *Elementary School Mathematics Textbook 3-1.* Seoul: Chunjae Education

교육과학기술부 (2010b). 초등학교 수학 4-2. 서울: 천재교육.

Ministry of Education and Science Technology (2010b). *Elementary School Mathematics Textbook 4-2.* Seoul: Chunjae Education

교육과학기술부 (2011a). 초등학교 수학 5-1. 서울: 천재교육.

Ministry of Education and Science Technology (2011a). *Elementary School Mathematics Textbook 5-1.* Seoul: Chunjae Education

교육과학기술부 (2011b). 초등학교 수학 5-2. 서울: 천재교육.

Ministry of Education and Science Technology (2011b). *Elementary School Mathematics Textbook 5-2.* Seoul: Chunjae Education

김성숙 (2005). 역사적 관점으로 본 메소포타미아 수학. 한국수학사학회지, 18(4) 39-48.

Kim, S. S. (2005). Some Historical Aspects of the Development of Mesopotamian Mathematics. *The Korean Journal for History of Mathematics* 18(4) 39-48.

김현정・강완 (2008). 초등학교 수학 교과서에 나타난 사각형 지도 방법에 대한 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 11(2), 141-159.

Kim, H. J. & Kang, W. (2008). An Analysis on Teaching Quadrilaterals in Elementary School Mathematics Textbooks. *Journal of the Korean Society of Mathematical Educational Series C <Education of Primary School Mathematics>,* 11(2), 141-159.

노은환·강정기·정상태 (2014). 단위 측면에서 연산에 관한 소고. East Asian Mathematical Journal, 30(4), 509-526.

Roh, E. H.; Kang, J. G. & Jeong, S. T. (2014). A Study on the Operation in Terms of Unit. *East Asian Mathematical Journal,* 30(4), 509-526.

정은실 (2010). 초등학교 수학교과서에서의 양(量)의 연산에 대한 연구. 대한수학교육학회 <수학교육학연구>, 20(4), 445-458.

Jeong, E. S. (2010). A Study on Quantity Calculus in Elementary Mathematics Textbooks. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics <Journal of Educational Research in*

Mathematics> 20(4), 445-458.

한인기 · 신현용 (2001). 다각형의 넓이 및 그 활용에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 12, 155-170.

H, I. K. & Shin, H. H. (2001). Research in polygon and practical usage. *Journal of the Korean Society of Mathematical Educational Series E <Communications of Mathematical Education>* 12, 155-170.

허학도 (2006). 직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

Heo, H. D. (2006). *Understanding and Epistemological Obstacles of the Formula for the Area of a Rectangle.* A master's thesis of Seoul National University.

Bosch, M., & Gascon, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin* 58, 51-65.

Chevallard, Y. (1988, August). On didactic transposition theory: Some introductory notes. *In International Symposium on Research and Development in Mathematics.* Bratislava, Czechoslavakia.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany NY: SUNY Press.

Polya, G. (1971). *How to solve it.* 우정호 역(2002). 어떻게 문제를 풀 것인가? 서울: 교우사.

Polya, G. (1971). *How to solve it.* Translated by Woo, J. H. (2002). Seoul: Kyowoosa

Didactic Transposition about Unit Usage to Help Recognize Meaning of Calculation Results

Jeong Gi Kang
Namsan Middle School, 157, Gaeumjeong-ro, Seongsan-gu, Changwon-si, Gyeongsangnam-do 642-801, Korea
E-mail : jeonggikang@gmail.com

Sang Tae Jeong
Dongsung Elementary School, 45, Donggye-gil, Jeongdong-myeon, Sacheon-si, Gyeongsangnam-do 664-932, Korea
E-mail : sangtaejeong01@gmail.com

Eun Hwan Roh†
Department of Mathematics Education, Chinju National University of Education, 660-756, Korea
E-mail : ehroh@cue.ac.kr; idealmath@gmail.com

The number and units are not apart from each other, especifically units clarifies number. Students often encounters many problems involving units, researcher found that students have difficulty in recognize the meaning of calculation results. These students recognizes units, just presented thing in the problem. And they could not connect units with the meaning of calculation results. With this results, this study researched limitation of pre serviced didactic transposition and found the effectness of using units to recognize the meaning of calculation results. Especially we discussed didactic transposition with permitting probability of unit calculation and suggested implications. So we accented the inevitability of change, and tried to offer substantial help.

* ZDM Classification : D73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Recognize meaning of calculation results, Unit usage, Didactic transposition
† Corresponding Author