

## Color Image Coding using Variable Block of Fractal

Jae-Hong Park\*, Cheol-Woo Park\*\*

Dept. Radiological Technology, Choonhae College of Health Science\*, Dept. of Electronic Information  
Communication, Dong-Pusan College\*\*

## 프랙탈 기반의 가변블록을 이용한 컬러영상 부호화

박재홍\*, 박철우\*\*

춘해보건대학교 방사선과\*, 동부산대학교 전자정보통신과\*\*

### Abstract

This paper suggests techniques to enhance coding time which is a problem in traditional fractal compression and to improve fidelity of reconstructed images by determining fractal coefficient through adaptive selection of block approximation formula. First, to reduce coding time, we construct a linear list of domain blocks of which characteristics is given by their luminance and variance and then we control block searching time according to the first permissible threshold value. Next, when employing three-level block partition, if a range block of minimum partition level cannot find a domain block which has a satisfying approximation error, There applied to 24-bpp color image compression and image techniques. The result did not occur a loss in the image quality of the image when using the encoding method, such as almost to the color in the RGB image compression rate and image quality, such as gray-level images and showed good.

Key Words: Fractal, Variable block, PSNR, RGB

### 요약

본 논문에서는 프랙탈 부호화시 변환식의 계수를 찾는 과정에서 블록의 탐색 영역을 줄이기 위해 탐색영역인 도메인 블록의 특성을 화소의 밝기의 평균에 의한 클래스와 분산에 의한 클래스로 분류하여 리스트를 구성한 후 레인지블록과 같은 클래스를 가지는 도메인블록만 검색하도록 하면서 도메인 블록 탐색시 1차 허용 오차 한계값을 제어하여 부호화 시간을 향상시켰다. 또한 쿼드트리 분할법으로 레인지블록의 크기를 가변시켜 변환( $w_i$ )의 수를 줄임으로서 압축 효율을 높이고 레인지블록의 크기에 따라 탐색 영역의 탐색 밀도를 변화시켜 화질 개선을 시도하였으며, 이러한 영상 기법을 24-bpp 컬러 영상 압축에 적용하였다. 그 결과 영상의 화질에는 거의 손실이 생기지 않았고 컬러 RGB영상에 같은 부호화 방법을 사용 하였을 때 그레이레벨 영상과 같은 압축률이나 화질 면에서 우수한 성능을 나타내었다.

중심 단어: 프랙탈, 가변블록, PSNR, RGB

## I. INTRODUCTION

21세기를 정보화 사회라 일컫으며 사회의 여러 분야에서 가치창조의 중요한 요소가 되어가면서, 영상 데이터의 디지털 전송, 저장 및 처리에 대한 요구가 급격히 증가되면서 대량의 영상 데이터를 제한된 대역폭을 갖는 전송로도 전송되거나 디지털영상매체에 효율적으로 저장하기 위해 영상신호압축 기법이 연구되어 왔다. 1977년 Benoit B.Mandelbrot는 프랙탈 기하학을 도입하여 유클리드 기하학으로 표현할 수 없는 자연의 복잡한 영상을 나타내기 위한 수학적인 모델을 제시하였다<sup>[1]</sup>. 프랙탈 기하학이 갖는 특징은 크기와 관계없이 작은 부분이 전체와 같아지는 자기유사성(self similarity)<sup>[2]-[4]</sup>과 복잡한 자연 형상을 자연스럽게 묘사할 수 있는 순환성(recursiveness)이 있고 차원을 유리수로 표현할 수 있다는 데 있다. Voss는 프랙탈 변환식을 이용하여 자연의 영상을 만들어 내었다. 이후 Michael Barnsley는 Voss와는 역과정으로 자연의 영상에서 프랙탈 변환식을 찾아낼 수 있는 알고리즘을 만들어 내는 역변환 문제(inverse problem)를 제안하고 Iterated Function System 모델의 수학적 근거를 제시하였으며 IFS가 영상을 얼마나 충실히 복원해 내는가를 측정할 수 있는 Collage이론을 증명하였다<sup>[5]</sup>. 그러나 Barnsley가 제안한 IFS로 복잡한 영상을 압축할 경우 부호화시간과 복원시간이 길어지고 자동화 알고리즘 구현이 불가능하였다. 그의 제자 Arnaud Jacquin이 IFS부호화 방법을 변경한 PIFS(partitioned IFS)방법을 제안하고 역변환 문제(inverse problem)<sup>[6]</sup>를 해결하여 프랙탈 영상 압축을 시작하였다<sup>[7]</sup>. 프랙탈 영상 압축에서의 가장 큰 문제점은 복원시의 시간은 짧은 데 비해 부호화 시간이 오래 걸리며 또 부호화 시간을 짧게 했을 경우 화질이 떨어지는 문제점이 있다. 최근 이러한 문제를 해결하기 위해 많은 연구가 진행되고 있다<sup>[8]-[9]</sup>.

본 논문에서는 영상을 분할한 도메인 블록 특성을 밝기의 평균과 분산으로 분류하여 리스트를 구성한 후 레인지블록과 같은 특성을 가지는 도메인블록만 검색하도록 하고 같은 클래스에 속하는 리스트 탐색시 1차 허용 오차가 일정 임계치에 도달하면 전체 리스트를 검색할 필요 없이 아핀변환값<sup>[5]</sup>을 결정하도록

하여 탐색 시간을 줄였다. 또한 쿼드트리 분할법<sup>[10]</sup>으로 레인지블록의 크기를 가변시켜 변환( $w_i$ )의 수를 줄임으로서 압축효율을 높이고 레인지블록의 크기에 따라 탐색 영역의 탐색 밀도를 변화시켜 부호화 시간과 화질의 관계를 조사하였다<sup>[12]</sup>. 이러한 영상 기법을 24-bpp 컬러 영상 압축에 적용하였다.

## II. THEORETICAL BACKGROUND

완전 척도 공간(complete metric space)  $(F, d)$ 에서 정의되는 변환  $W : F \rightarrow F$ 가 모든  $x, y \in F$ 와  $0 \leq s < 1$ 인 실수에 대해서 다음 식을 만족하면 그 때 변환  $w$ 를 축소 변환(contractive transformation)이라고 한다.

$$d(w(x), w(y)) < s \delta(x, y) \dots \dots \dots (1)$$

여기서  $d$ 는 척도(metric)이며,  $s$ 는 변환의 축소성(contractivity)을 나타낸다.  $w$ 가 축소가능하면 하나의 고정점을 가진다.  $s$ 를 만족하는 변환  $w_i$ 들의 모임  $\bigcup w_i$ 를  $W$ 라 하면, 전체 변환  $W$ 도 축소 변환이 되어 유일한 고정점이 존재하고 축소 변환  $W$ 가 식(2)와 같은 유일한 고정점  $x_W \in F$ 을 가질 때  $x_W$ 를 IFS의 끌개(attractor)라 한다.

$$x_W = W(x_W) = \bigcup_{i=1}^n w_i(x_W) \dots \dots \dots (2)$$

이러한 축소 변환으로 이루어진 계를 IFS(iterated function system)라 한다. 프랙탈 영상 부호화 과정은 임의의 영상을 고정점으로 갖는 축소 변환  $W$ 를 찾는 것으로 다음과 같은 collage이론이 적용된다.

$$\delta(x_W, f) \leq (1 - s)^{-1} \delta(W(f), F) \dots \dots (3)$$

이 식은 자신의 변환(covering)  $W(f)$ 가 원영상  $f$ 와 차이가 작을 수록 고정점  $x_W$ 는 원영상  $f$ 와 유사하다는 것을 의미하며 특히 변환  $W$ 가 축소가능(contractive)하다면 정확하게 일치한다. 여기서 축소비(contractivity factor)  $s$ 는 수렴 속도를 나타내며 값이 작을수록 고정점에 빠르게 수렴한다. 식(3)을 만족하는 IFS를 구성하고 임의의 초기 영상에 대해 IFS변환  $W$ 를 반복 적용

하면 원영상을 복원할 수 있다. 이와 같은 과정을 역 변환 문제(inverse problem)라고 한다. IFS를 구성하는 변환  $w_i$ 는 영상 평면  $(x,y)$ 에서 밝기값  $I(x,y)$ 를 갖는 3차원 공간에서의 축소 매핑형태는 2차원 아핀변환식<sup>[11]</sup>에 그레이레벨을 추가한 것으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ J(x', y') \end{bmatrix} = w_i \begin{bmatrix} x \\ y \\ I(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ I(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \\ o_i \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(4)$$

여기서  $I(x,y)$ 과  $J(x',y')$ 는 레인지와 도메인 블록내의 화소 밝기값을 나타낸다. 이 식은 두 영상간의 유사성을 표현하며 다시 기하변환(geometric transformation)과 Suffle변환, 수치변환(massic transformation)으로 구분된다. 기하 변환은 도메인블록이 레인지블록에 매핑되는 방법을 결정하며 2차원 아핀변환 형식으로 나타난다.  $a_i, b_i, c_i, d_i$ 는 기하 변환과 Suffle변환을 나타내고  $e_i$  와  $f_i$ 는 레인지 블록과 정합될 수 있는 도메인 블록의 좌표를 표시한다. 이 때 기하변환은 축소 가능해야 한다. Suffle변환은 미리 정해진 8가지 변환을 사용한다<sup>[7]</sup>. 수치변환은 기하 변환이 이루어진 도메인블록이 레인지블록과 유사성을 가지도록 화소값을 변경시킨다.

$s_i$ 은 Contrast scaling를  $o_i$ 은 레인지영역과 도메인 영역의 평균 화소값의 차인 오프셋(offset)을 나타낸다. 영상 부호화는 식(1)의 변환  $w_i$ 의 각 계수를 구하는 과정으로 볼 수 있다.

### III. FRACTAL IMAGE CODING

영상을 부호화하기 위해서는 영상을 반복 변환시스템으로 구성해야 하고 IFS를 구성하기 위해서 영상영역을 분할하고 분할된 각 영역에 대한 변환을 결정해야 한다. 즉 영상의 부호화는

부호화하고자 하는 영상  $f$ 가 주어질 때 고정점

$$W = \bigcup_{i=1}^N w_i \text{를 가지는 변환의 집합}$$

$w_1, w_2, \dots, w_N$ 과 끝개  $f = x_W$ 를 구한다는 것을 의미한다. 영상  $f$ 는 변환  $W$ 의 고정점이 되며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f = W(f) = w_1(f) \cup w_2(f) \cup \dots \cup w_N(f)$$

일반적으로 임의의 곳에 있는 영상과 정확하게 일치하는 조각 영상을 찾아 내는 것은 어려우므로 평균 자승 오차

$d_{rms}(f', f)$ 가 작은 고정점  $f' = x_W$ 를 구한다.

$$f \approx f' = W(f') \approx W(f) = w_1(f) \cup w_2(f) \cup \dots \cup w_N(f)$$

$w_i$ 는 도메인영역을 축소 변환 조건을 만족하면서 레인지영역을 만들어 내므로 도메인영역이 레인지 영역보다 커야 한다. 여기서 크기의 비를 2:1로 한 것은 절대적인 것은 아니며 이론적으로는 부호화와 복원시의 효율이 향상될 수만 있다면 임의로 크기의 비를 조정할 수 있다. 먼저 부호화할 영상을  $B \times B$ 크기의 겹치지 않는 레인지블록  $R_1, R_2, \dots, R_n$ 의 집합으로 분할하고 각 레인지 블록에 대해 탐색하게 될  $2B \times 2B$ 크기의 도메인 블록  $D$ 를 수평, 수직으로 이동하면서 겹침이 있게 결정한다. 최적의 도메인 블록  $D_i \in D$ 을 찾기 위해 각 레인지 블록에 대해  $D$ 전체를 검색하며 이 때 레인지 블록과 가장 닮은 도메인 블록은 평균 제곱 오차

$$d_{rms}(f \cup (R_i \times I), w_i(f)) \quad i = 1, \dots, N. \quad \dots\dots\dots(5)$$

가 최소가 되는 블록이며 그 때의 변환 계수값( $s_i, o_i$ )과 도메인영역의 위치에 의해  $w_i$ 가 결정된다. 실제로는 유효값(rms) 척도로 도메인과 레인지를 비교하여 식 (4)의  $s_i$ 와  $o_i$ 의 최적값을 계산할 수 있다.  $n$ 개의 화소 밝기가  $D_i$ 에 대해  $a_1, \dots, a_n$ ,  $R_i$ 에 대해  $b_1, \dots, b_n$ 인 두개의 블록이 있다고 할 때 다음 식을 최소로 하면  $s$ 와  $o$ 를 구할 수 있다.

$$R = \sum_{i=1}^n (s \cdot a_i + o - b_i)^2$$

이 때 유효값 오차는  $\sqrt{R}$ 이다. 이러한 평균 자승 오차  $\sqrt{R}$ 가 최소가 될 때의  $s_i, o_i$ 와 함께  $D_i$ 를 선택하면 식 (4)형태의 변환을 결정할 수가 있고 일단 변환 집합  $w_1, w_2, \dots, w_N$ 가 구해지면  $x_w$ 를 추정하여 영상을 복원할 수 있다.

#### IV. APPLIED ALGORITHMS

부호화 과정은 전체 영상을 레인지 블록과 도메인 블록으로 나누고 각 레인지 블록에 대해서 가장 작은 근사화 오차를 갖는 도메인 블록의 좌표와 그 때의 변환 계수를 찾는 과정이다. 많은 블록 탐색시 많은 양의 계산이 필요하므로 비교되는 도메인수를 줄이기 위해 부모노드가 4개의 부 노드를 가지는 트리 구조된 쿼드트리 분할법을 사용한다. 부호화 시간을 줄이기 위해 부호화하기 전에 도메인 풀에 있는 모든 도메인을 분할한다. 분할된 블록들은 밝기값의 평균과 분산이 배열되는 순서에 따라 특성이 결정된다. 즉 분할된 한 개의 블록을 크기가 1/4이 되는 4분면으로 나누고 각 4분면의 밝기 값의 평균과 분산을 다음과 같이 구한다.

$$A_i = \sum_{j=1}^n r_j^i \quad V_i = (r_j^i) - A_i^2$$

.....(6)

( rj : 화소값 , i=1,2,3,4 )

이 때 가장 밝은  $A_i$ 를 왼쪽 상단에 오도록 배열하고 배열 순서에 따라 3가지 Major 클래스로 분류한다.

0(A <sub>1</sub> )	1(A <sub>2</sub> )
2(A <sub>3</sub> )	3(A <sub>4</sub> )

Major 클래스 1

0(A <sub>1</sub> )	1(A <sub>2</sub> )
3(A <sub>3</sub> )	2(A <sub>4</sub> )

Major 클래스 2

0(A <sub>1</sub> )	2(A <sub>2</sub> )
3(A <sub>3</sub> )	1(A <sub>4</sub> )

Major 클래스 3

$$A_i = \sum_{j=1}^n r_j^i$$

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq A_4 \quad A_1 \geq A_2 \geq A_4 \geq A_3$$

$$A_1 \geq A_4 \geq A_2 \geq A_3$$

또 각 Major 클래스는 식 (6)에 따라 24가지의 부클라스로 분류된다. 이 때 분산의 부 클래스는 scaling값이 양수일 때와 음수 일 때 각각 다르게 배열된다. 기준 클래스가 결정되면 모든 도메인 풀에 있는 분할된 블록들은 노드별로 기준 클래스와 비교되고 동일한 클래스를 가지는 노드들은 블록의 크기에 따라 방향성과 도메인의 위치를 포함한 링크된 리스트로 구성되어 배열에 저장된다. 최초의 트리깊이(32×32블록)으로 분할된 레인지 블록의 클래스가 결정되면 도메인 풀에서 같은 클래스를 갖는 블록과 비교되며 화소값의 아핀변환값( scaling과 offset값)은 식 (5)의 유효값을 최소로 하면 구할 수 있다. 이 때 한 개의 레인지 블록이 같은 클래스를 가지는 모든 도메인 블록의 리스트에서 탐색의 마지막을 노드의 포인트가 NULL이 되도록 제어하면 최적의 유효값을 구할 수는 있으나, 만약 리스트 탐색시 초기나 중간에서 최적의 유효값이 결정 될 경우 부호화 시간의 손실이 생길 수 있다. 따라서 본 알고리즘에서는 1차 허용 오차 임계치와 2차 허용 오차 임계치를 지정하여 도메인 풀의 탐색의 끝을 1차 허용 오차 임계치를 지정하여 유효값이 그 이하가 되면 리스트의 탐색을 중단하고 아핀변환 값을 결정하도록 하고 일정 임계치를 만족하지 못할 경우 2차 허용 오차와 비교하여 변환값을 결정하도록 하였다. 만약 1,2차 허용 오차 이내의 유효값이 구해지지 않을 경우 레인지는 쿼드 트리분할되고 같은 과정이 반복된다. 부호화 과정에서 전달되는 매개 변수의 비트 할당 구조는 Table 1과 같이 할당 된다.

Table 1. Bit allocation structure

	P(분할정보)	contrast	luminance	도메인 x좌표	도메인 y좌표	flip	총 비트수
평영역	1		6				7
에지영역	1	5	6	6	6	3	27

제안된 알고리즘에 대한 부호화 과정은 Fig 1과 같다<sup>[12]</sup>.

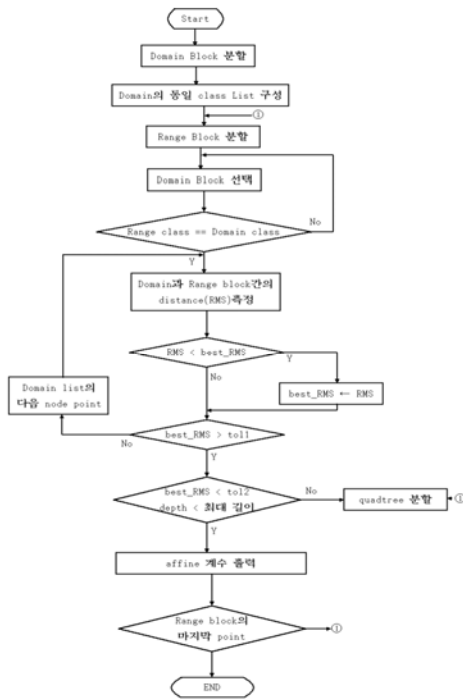


Fig. 1. Flow chart of the proposed method.

그레이레벨영상 프랙탈 영상 압축 기법을 컬러영상 압축에 적용하여 보았다. 24-bpp형식의 영상은 각각 8비트로 된 Red, Green, Blue의 영상으로 구분되어 있고 R, G, B영상은 각 성분마다 서로 독립성을 가지고 있다.

### V. RESULT AND REVIEW

그레이레벨 영상은 512 × 512크기의 Lenna영상이며, 컬러 영상은 512 × 512 × 24 영상이다. 레인지 블록의 크기는 32 × 32, 16 × 16, 8 × 8로, 도메인 블록의 크기는 64 × 64, 32 × 32, 16 × 16로 쿼드트리 분할하였다. 탐색량을 줄이기 위해 부호화에 앞서 부호화하기 전에 도메인 풀에 있는 모든 도메인을 쿼드트리 분할하고 분할된 블록을 화소의 밝기값에 따라 3 클래스, 분산값에 따라 24 클래스로 분류하여 블록 크기별로 동일한 클래스를 가지는 블록들은 리스트로 구성하였다. 레인지 블록과 가장 닮은 도메인 블록을 리스트에서 탐색할 때 허용 오차 임계치를 1차, 2차로 구분하여 리스트

의 탐색 중간에 1차 허용 오차 한계내에 들면 리스트를 끝까지 탐색하지 않고 한 개의  $w_i$ 를 구성하는 최적의 도메인 위치와 아핀 변환값을 결정한다. 이 때 1차 허용 오차 한계가 만족되지 않으면 2차 허용 오차 한계 및 트리의 깊이를 판단한 후 쿼드트리 분할 여부 및 변환값 결정을 하고 레인지블록으로 이동하며 이러한 모든 변환의 집합  $W = \cup w_i$ 가 부호화를 구성한다. Table 2는 컬러영상의 2차 허용 오차의 임계치를 변화시켰을 때 각 블록의 개수와 부호화 시간, 압축률, PSNR값을 비교한 결과이다.

부호화 시간은 37%, 압축률 5% 및 PSNR은 4% 정도 개선됨을 알 수 있으며, 영상의 부호화 시간은 만족함을 알 수 있었다.

Table 2. The tolerance threshold value of the color image change results

	허용 오차	압축률		시간		PSNR	
		DSP1	DSP2	DSP1	DSP2	DSP1	DSP2
전체 리스트 검색	6.0	30.25	30.37	57	198	29.96	30.83
	8.0	35.15	35.05	49	171	29.67	30.42
	10.0	41.36	42.63	38	125	29.22	29.68
	14.0	53.78	54.37	28	97	27.96	28.52
제한된 리스트 검색	tol2=6.0, tol1=6.0	30.51	30.63	32	107	29.66	30.40
	tol1 = 4.0	35.36	35.23	37	130	29.64	30.35
	tol2 = 8.0, tol1 = 6.0	35.45	35.36	31	103	29.47	30.14
	tol1 = 8.0	35.51	35.48	25	82	29.14	29.63
	tol2 = 10.0, tol1 = 10.0	41.4363	43.13	21	69	28.43	28.80
	tol2 = 14.0, tol1 = 14.0	54.4092	55.02	15	39	26.97	27.06

Table 3. The tolerance threshold value of the grey image change results<sup>[12]</sup>

	허용 오차	압축률		시간		PSNR	
		DSP1	DSP2	DSP1	DSP2	DSP1	DSP2
전체 리스트 검색	6.0	30.25	30.37	57	198	29.96	30.83
	8.0	35.15	35.05	49	171	29.67	30.42
	10.0	41.36	42.63	38	125	29.22	29.68
	14.0	53.78	54.37	28	97	27.96	28.52
제한된 리스트 검색	tol2=6.0, tol1=6.0	30.51	30.63	32	107	29.66	30.40
	tol1 = 4.0	35.36	35.23	37	130	29.64	30.35
	tol2 = 8.0, tol1 = 6.0	35.45	35.36	31	103	29.47	30.14
	tol1 = 8.0	35.51	35.48	25	82	29.14	29.63
	tol2 =10.0, tol1 =10.0	41.4363	43.13	21	69	28.43	28.80
	tol2 =14.0, tol1 =14.0	54.4092	55.02	15	39	26.97	27.06

Table 3은 그레이레벨 영상의 2차 허용 오차의 임계치를 변화시켰을 때 각 블록의 개수와 부호화 시간, 압축률, PSNR값을 비교한 결과인데, 컬러영상의 허용 오차 임계치 변화의 결과와 같다.

Table 4는 RGB 컬러영상의 부호화시간, 부호화 바이트수, 압축률 및 PSNR의 결과 이다.

Table 4. RGB color image encoding results

컬러 영상	부호화 시간	부호화후 바이트수	압축률	PSNR
R	262144	27	6820	30.6
G		32	8169	28.5
B		26	7153	28.9
	786447	22150	34.7	

## VI. CONCLUSION

기존의 프랙탈 압축 방법은 최적의 변환 계수를 찾기 위해 전 영역 탐색을 하므로 많은 계산량을 필요로 한다. 따라서 본 연구에서는 부호화시간을 줄이고 압축률을 높이기 위해 밝기값의 평균과 분산으로 블록

의 특성을 정하여 탐색 영역을 제한하는 기법을 이용하였고 또 도메인영역에서의 탐색 영역을 줄이기 위해 1차 허용 오차 임계치를 사용하여 탐색 영역을 제어함으로써의 부호화 시간의 개선을 시도한 결과 화질에 영향을 미치지 않으면서 압축률과 부호화 시간의 이득을 얻을 수 있었다. 그러나 도메인 풀의 개수를 늘이거나 전역 탐색을 할 경우 이러한 부분적인 제어만으로는 획기적인 성능 향상을 얻을 수는 없었다. 이 문제를 해결하기 위한 방안으로 전체의 영상을 4등분, 또는 그 이상으로 분할하여 독립적으로 부호화하면 부호화 시간은 향상시킬 수 있으나 저해상도 영상일 경우 화질의 열화는 피할 수 없으므로 이에 대한 연구가 더 진행되어야 할 것으로 본다. 칼라영상에 동일한 알고리즘을 적용하여 부호화할 경우 각 성분마다 독립성이 강한 RGB영상에 같은 부호화 방법을 사용하였을 때 그레이영상과 같은 압축률이나 화질면에서 우수한 성능을 나타내었다.

## Acknowledgements

"This research was supported by Choonhae College of Health Sciences"

## Reference

- [1] Benoit.b.Mandelbrot The Fractal Geometry of Nature. W.H Freeman and Company,New York,1977
- [2] A.E.Jacquin,"Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations," IEEE Trans.Image Process.,vol.IP-1,pp.18-30,Jan.1992
- [3] D.M. Monro and F.Dudbridge, "Fractal approximation of image blocks" in Proc. Int.Conf.Acoust. Speech, Signal Processing '92. vol.3, pp.485-488, San Francisco, California, Mar. 1992
- [4] S.Lepsøy, G.E. Øien, and A. Ramstad, "Attracts image compression with a fast non-iterative decoding algorithm" in Proc.Int.Conf.Acoust.Speech.Signal Processing '93,vol.5, pp.337-340, Minneapolis, Minnesota, Apr. 1993
- [5] M.Barnsley, Fractals Everywhere. San Diego:Academic Press,1988
- [6] M.F Barnsley,V.Ervin,D.Hardin and J.Lancaster,"Solution of an inverse problem for fractals and other Sets,"Proceedings of the National Academy of Science U.S.A, Vol.83,pp.1975-1977,1985.
- [7] A.Jacquin. A Fractal Theory of Iterated Markov Operators with

- 
- Application to Digital Image Coding. PhD thesis, Georgia Institute of Technology August 1989.
- [8] A.J.Crilly,R.A.Earnshaw,H.Jones,Fractals and chaos,"Springer-verlag,New York,1991
- [9] M.G Alkhansari and T.S.husang,"A fractal-based image-coding algorithm,"in Proc.Int. Cont. Acoust.,Speech, Signal Processing '93,vol.5,pp.345-348, Minneapolis, Minnesota ,Apr.1993
- [10] Y.Fisher, E,W.Jacobs ,R.D.Boss,"Fractal Image Compression Using Iterated Transforms," Technical Report, Naval Ocean Systems Center, San Diego, CA92142-5000.
- [11] H.-O.Peitgen,H.Jürgens, and D.Saupe.Chaos and Fractals. New York: Springer-Verlag, 1992
- [12] Jae-Hong Park, Cheol-Woo park, Won-Seok Yang, "Fractal image coding for improve the quality of medical images", J. Korean. Soc. Radio., vol. 8, No. 1, January 2014.