

강성계수의 전달을 이용한 횡방향 하중을 받는 축대칭 원판의 정적해석

Static Analysis of Axisymmetric Circular Plates under Lateral Loading Using Transfer of Stiffness Coefficient

최명수* · 여동준***

Myung-Soo Choi* and Dong-Jun Yeo***

(접수일 : 2014년 10월 06일, 수정일 : 2014년 12월 07일, 채택확정 : 2014년 12월 08일)

Abstract: A circular plate is one of the important structures in many industrial fields. In static analysis of a circular plate, we may obtain an exact solution by analytical method, but it is limited to a simple circular plate. Thus, many researchers and designers have used numerical methods such as the finite element method. The authors of this paper developed the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM) for static and dynamic analyses of various structures. FE-TSCM is the combination of the modeling technique of the finite element method (FEM) and the transfer technique of the transfer stiffness coefficient method (TSCM). FE-TSCM has the advantages of both FEM and FE-TSCM. In this paper, the authors formulate the computational algorithm for the static analysis of axisymmetric circular plates under lateral loading using FE-TSCM. The computational results for three computational models obtained by FE-TSCM are compared with those obtained by FEM in order to confirm the accuracy of FE-TSCM.

Key Words : Static Analysis, Circular Plate, Lateral Loading, Transfer Stiffness Coefficient Method, Finite Element Method

1. 서 론

원판은 산업체의 다양한 분야에서 사용되고 있는 기본적인고도 중요한 구조 요소 중의 하나이다. 원판이 하중을 받을 경우, 반경 방향에 비해 횡방향의 강성(stiffness)이 훨씬 적으므로 반경 방향의 변위보다 횡방향의 변위가 클 경우가 많다.

횡방향 하중을 받는 원판은 해석적인 방법을

통해 정확한 해를 구할 수 있으나¹⁾, 이는 극히 제한적이다. 따라서 대부분의 설계자나 연구자들은 유한요소법(finite element method)²⁾이나 전달행렬법(transfer matrix method)³⁾ 등 다양한 해석기법을 이용하여 원판의 설계 및 해석에 적용하고 있다.

이 연구의 저자들은 기존의 유한요소법과 전달 강성계수법(transfer stiffness coefficient method)⁴⁾의 장점을 공유하면서 단점을 해결하기 위한 방안으

*** 여동준(교신저자) : 전남대학교 해양기술학부

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*최명수 : 전남대학교 해양경찰학과

*** Dong-Jun Yeo(corresponding author) : Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133

*Myung-Soo Choi : Department of Maritime Police Science, Chonnam National University.

로 유한요소-전달강성계수법(finite element-transfer stiffness coefficient method)^{5,6)}을 개발하여 그 유용성을 확인한 바 있다.

이 논문에서는 유한요소-전달강성계수법으로 횡방향 하중을 받는 축대칭 원판의 정적해석을 수행할 수 있는 전산 알고리즘을 정식화한다. 그리고 유한요소-전달강성계수법으로 3 가지 원판 계산 모델에 대한 정적해석을 수행 한 후, 그 계산 결과를 기존의 유한요소법을 이용하여 계산한 결과와 비교하여, 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 확인한다.

2. 정적해석 알고리즘

이 장에서는 축대칭 횡하중을 받는 축대칭 원판의 정적해석을 수행하기 위한 전산 알고리즘을 유한요소-전달강성계수법^{5,6)}을 이용하여 정식화한다.

2.1 해석 모델

해석 알고리즘의 정식화를 위해, 이 연구에서도 도입한 해석 모델은 Fig. 1과 같이 내반경이 R_{in} , 외반경이 R_{out} 인 환원판이고, 이 환원판은 중심축(z축)에 대해 대칭이다. 원판의 두께는 반경방향에 따라 일정할 수도 있고, 주어진 특정 함수로 변할 수도 있다.

해석을 위해 Fig. 1처럼 모델을 n 개의 링요소(ring element)로 분할할 경우, 가장 안쪽의 링요소를 첫 번째 링요소(또는 링요소 1)라 하고, 가장 바깥쪽의 링요소를 n 번째 링요소(또는 링요소 n)라고 부른다. 모든 링요소는 안쪽과 바깥쪽에 두 개의 원주가 있고, 환원판의 가장 안쪽의 원주에서부터 가장 바깥쪽의 원주까지 모든 원주를 각각 절원주 1, 절원주 2, 절원주 $n+1$ 이라고 부른다. 따라서 임의의 j 번째 링요소에는 안쪽에 절원주 j 와 절원주 $j+1$ 이 있다.

축대칭 횡하중을 받는 축대칭 환원판의 정적해석을 위해서 절원주는 2자유도를 가지며, 절원주의 변위벡터($\mathbf{d} = \{w, \theta\}^T$)는 처짐량 w 와 각변위 θ 로 구성된다. 이에 상응하는 절원주의 힘벡터($\mathbf{f} = \{f, M\}^T$)는 전단력 f 와 모멘트 M 으로 구성된다.

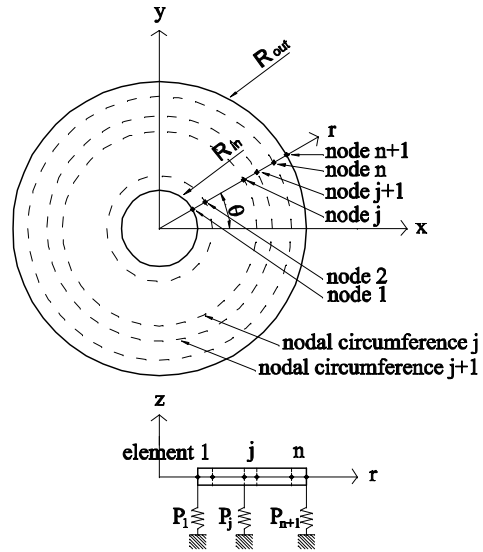


Fig. 1 Analytical model

절원주는 기초로부터 탄성적으로 지지될 수 있고, 이 탄성지지는 처짐 방향과 굽힘 방향의 스프링으로 모델링하며, 그 스프링상수를 각각 k 와 K 로 정의한다. 그리고 원판의 경계조건은 첫 번째 절원주와 마지막 절원주에 부착된 기초지지 스프링의 스프링상수로 모델링한다.

외부로부터 주어지는 하중은 절원주에 작용하는 것으로 하고, 처짐 방향의 하중을 q , 각변위 방향의 하중을 Q 라고 정의한다. 링요소에 압력의 형태로 하중이 주어질 경우에는 압력을 링요소 내외의 절원주 상에 존재하는 절원주 하중으로 등가화하여 작용하는 것으로 한다.

2.2 전달식의 유도

이 연구에서는 하첨자 j 의 의미는 j 번째 절원주 또는 j 번째 링요소에 관한 물리량을 뜻하고, 기호 위에 붙인 ‘-’와 ‘^’의 의미는 절원주 좌측과 우측을 뜻한다.

임의의 절원주 j 의 좌측과 우측에서 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_j$ 와 $\hat{\mathbf{f}}_j$)와 변위벡터(\mathbf{d}_j) 사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_j = \bar{\mathbf{S}}_j \mathbf{d}_j + \bar{\mathbf{e}}_j \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_j = \hat{\mathbf{S}}_j \mathbf{d}_j + \hat{\mathbf{e}}_j \quad (2)$$

여기서 $\bar{\mathbf{S}}_j$ 와 $\hat{\mathbf{S}}_j$ 는 각각 절원주 j 의 좌측과 우측의 강성계수행렬이고, $\bar{\mathbf{e}}_j$ 와 $\hat{\mathbf{e}}_j$ 는 절원주 j 의 좌측과 우측의 힘보정벡터이다.

탄성 지지된 절원주 j 에 축대칭 외력이 작용할 경우, 절원주 j 에서 힘과 모멘트의 평형 조건은 다음 식과 같다.

$$\hat{\mathbf{f}}_j + \mathbf{q}_j = \bar{\mathbf{f}}_j + \mathbf{P}_j \mathbf{d}_j \quad (3)$$

여기서 절원주 j 에 작용하는 외력벡터 \mathbf{q}_j 는 횡방향의 축대칭 외력 q_j 와 모멘트 Q_j 로 구성되고, 기초지지 강성행렬 \mathbf{P}_j 는 절원주 j 를 지지하는 횡방향 스프링과 회전방향 스프링의 스프링상수들로 구성된 대각행렬이다.

$$\mathbf{q}_j = \{q_j, Q_j\}^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_j = \text{diag}(k_j, K_j)$$

식(1)~(3)으로부터 다음 식과 같은 강성계수행렬과 힘보정벡터의 포인트(point) 전달식을 유도할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{S}}_j = \bar{\mathbf{S}}_j + \mathbf{P}_j, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_j = \bar{\mathbf{e}}_j - \mathbf{q}_j$$

축대칭 원판의 일부인 j 번째 링요소에서 링요소 좌·우측의 힘벡터와 변위벡터 사이의 관계를 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_j \\ \bar{\mathbf{f}}_{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_j & -\mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_j^T & \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_j \\ \mathbf{d}_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

식(6)의 부분행렬 \mathbf{A}_j , \mathbf{B}_j , \mathbf{C}_j 는 j 번째 축대칭

링요소의 강성행렬($\mathbf{K}_j^{(e)}$)로부터 구할 수 있다. 링요소의 두께가 일정한 경우에는 \mathbf{A}_j , \mathbf{B}_j , \mathbf{C}_j 는 식(7)과 같고, 축대칭 링요소의 두께가 선형적으로 변하는 경우에는 Ross⁷⁾의 요소 강성행렬로부터 구한다.

$$\mathbf{K}_j^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j & \mathbf{B}_j \\ \mathbf{B}_j^T & \mathbf{C}_j \end{bmatrix} = (\mathbf{H}_j^{-1})^T \mathbf{D}_j \mathbf{H}_j^{-1} \quad (7)$$

여기서

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} 1 & R_j & R_j^2 & R_j^3 \\ 0 & 1 & 2R_j & 3R_j^2 \\ 1 & R_{j+1} & R_{j+1}^2 & R_{j+1}^3 \\ 0 & 1 & 2R_{j+1} & 3R_{j+1}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_j = \alpha_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_4 & \beta_5 \\ 0 & \beta_3 & \beta_5 & \beta_6 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\alpha_j = \pi E_j t_j^3 / 6(1 - \nu_j^2),$$

$$\beta_1 = \ln(R_{j+1}/R_j),$$

$$\beta_2 = 2(1 + \nu_j)(R_{j+1} - R_j),$$

$$\beta_3 = 1.5(1 + 2\nu_j)(R_{j+1}^2 - R_j^2),$$

$$\beta_4 = 4(1 + \nu_j)(R_{j+1}^2 - R_j^2),$$

$$\beta_5 = 6(1 + \nu_j)(R_{j+1}^3 - R_j^3),$$

$$\beta_6 = 9(1.25 + \nu_j)(R_{j+1}^4 - R_j^4)$$

이고, R_j 와 R_{j+1} 은 각각 절원주 j 와 절원주 $j+1$ 의 반경이고, E_j , t_j , ν_j 는 각각 링요소 j 의 종탄성계수, 두께, 푸아송 비이다.

식(2)와 식(6)을 이용하여 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{V}_j \mathbf{d}_{j+1} + \mathbf{r}_j \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_j &= -\mathbf{G}_j^{-1} \mathbf{B}_j \\ \mathbf{G}_j &= \hat{\mathbf{S}}_j + \mathbf{A}_j \\ \mathbf{r}_j &= -\mathbf{G}_j^{-1} \hat{\mathbf{e}}_j \end{aligned} \quad (10)$$

식(1)의 j 대신 $j+1$ 을 대입한 식과 식(6) 및 식(9)로부터 다음 식과 같은 강성계수행렬과 힘보정벡터의 필드(field) 전달식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{j+1} &= \mathbf{C}_j + \mathbf{B}_j^T \mathbf{V}_j \\ \bar{\mathbf{e}}_{j+1} &= \mathbf{B}_j^T \mathbf{r}_j \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 변위벡터의 계산

해석 모델의 경계조건은 절원주 1과 절원주 $n+1$ 의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절원주 1의 좌측과 절원주 $n+1$ 우측의 힘벡터는 영벡터가 된다($\bar{\mathbf{f}}_1 = \hat{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{0}$).

식(2)와 식(3)의 j 대신에 1을 대입한 식과 $\bar{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{0}$ 로부터 절원주 1 우측의 강성계수행렬과 힘보정벡터를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_1 &= \mathbf{P}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 &= -\mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (12)$$

따라서, 식(12)를 시작으로 식(11)과 식(5)를 순차적으로 적용하면 모든 절원주의 강성계수행렬과 힘보정벡터를 계산할 수 있다.

절원주 $n+1$ 우측의 강성계수행렬과 힘보정벡터를 구한 후, $\hat{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{0}$ 과 식(2)의 j 대신에 $n+1$ 을 대입한 식으로부터 절원주 $n+1$ 의 변위벡터를 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{d}_{n+1} = -\hat{\mathbf{S}}_{n+1}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{n+1} \quad (13)$$

우단인 절원주 $n+1$ 을 제외한 나머지 절원주의 변위벡터는 식(9)로부터 순차적으로 계산하면, 최

종적으로 좌단에 해당되는 절원주 1의 변위벡터까지 모든 변위벡터를 계산할 수 있다.

3. 수치계산 결과

이 연구에서 제안한 유한요소-전달강성계수법으로 횡방향 하중을 받는 3가지 종류의 축대칭 원판을 대상으로 처짐량을 계산하는 정적해석을 수행한다. 그리고 제안한 방법의 신뢰성을 확인하기 위하여 기존의 유한요소법으로 동일한 모델에 대한 정적해석을 수행하여 양 방법의 결과를 비교한다.

3.1 계산 모델 1

Fig. 2의 계산 모델 1은 두께가 2 mm로 일정한 반경 100 mm의 원판이고, 경계조건은 바깥쪽 원주가 구속이다. 원판의 종탄성계수는 200 GPa이고, 푸아송 비는 0.3이다.

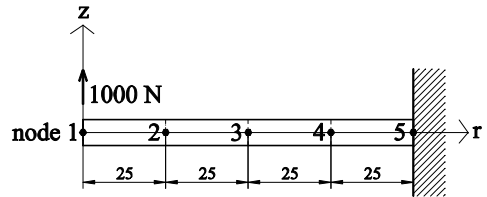


Fig. 2 Model 1 subdivided into 4 elements

Table 1 Lateral displacements of model 1 [mm]

Position [m]	Number of ring elements			
	4	8	12	100
0.000	1.3487	1.3555	1.3568	1.3578
0.025	1.0374	1.0376	1.0376	1.0376
0.050	0.5477	0.5478	0.5478	0.5478
0.075	0.1546	0.1546	0.1546	0.1546
0.100	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

원판의 중앙에 1000 N의 횡방향 하중이 작용할 때, 원판을 4개, 8개, 12개, 그리고 100개의 축대칭

링요소로 모델링하여 원판의 처짐을 유한요소법(FEM)과 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 각각 계산하였다. 양 방법의 계산 결과는 완전히 일치하였고, 따라서 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다. Table 1에 나타난 것처럼 축대칭 링요소의 개수가 증가할수록 처짐량이 수렴해 감을 확인할 수 있었다. 이 논문에서 Table 내의 위치(position)는 r-z 좌표계의 원점, 즉, 원판의 중심점에서 반경방향으로의 거리에 해당한다.

3.2 계산 모델 2

Fig. 3의 계산 모델 2는 원판 중심의 두께가 2 mm, 바깥 원주부분의 두께가 1 mm로 선형적으로 두께가 변화하는 반경 100 mm의 원판이다. 경계 조건은 원판 중심과 원판 바깥쪽 원주가 단순지지이다. 원판의 종탄성계수는 200 GPa이고, 푸아송 비는 0.3이다.

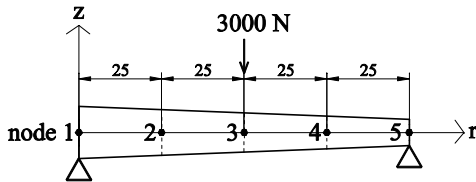


Fig. 3 Model 2 subdivided into 4 elements

Table 2 Lateral displacements of model 2 [mm]

Position [m]	Number of ring elements			
	4	8	12	100
0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.025	-0.5965	-0.6051	-0.6070	-0.6087
0.050	-1.2465	-1.2532	-1.2547	-1.2560
0.075	-0.9589	-0.9628	-0.9636	-0.9643
0.100	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Fig. 3와 같이 원판에 3000 N의 횡방향 하중이 작용할 때, 원판을 4개, 8개, 12개 및 100개의 축

대칭 요소로 모델링하여 원판의 처짐을 유한요소법(FEM)과 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 계산하였다. 계산 모델 2에서도 양 방법의 계산 결과는 잘 일치하였고, 따라서 유한요소-전달강성계수법의 신뢰성을 재확인할 수 있었다. Table 2에서도 축대칭 요소의 개수가 증가할수록 처짐량이 수렴해 감을 확인할 수 있었다.

3.3 계산 모델 3

Fig. 4의 계산 모델 3은 안쪽 반경이 25 mm, 바깥쪽 반경이 100 mm인 환원판이다. Fig. 4는 계산 모델 3을 3개의 축대칭 링요소로 모델링한 것으로, 절원주 1과 절원주 2 사이의 원판 두께는 2 mm로 일정하고, 절원주 4의 두께는 1 mm이고 원판 두께는 절원주 2부터 절원주 4까지 선형적으로 축소된다. 경계조건은 환원판의 내부 반경이 구속이고, 종탄성계수는 200 GPa, 푸아송 비는 0.3이다.

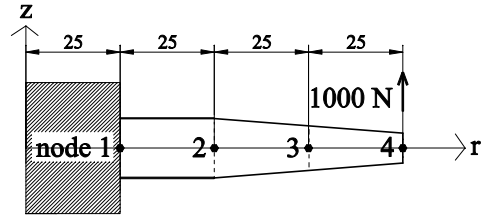


Fig. 4 Model 3 subdivided into 3 elements

Table 3 Lateral displacements of model 3 [mm]

Position [m]	Number of ring elements			
	3	6	9	90
0.025	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.050	0.3928	0.3952	0.3954	0.3955
0.075	1.2431	1.2464	1.2467	1.2468
0.100	2.4154	2.4209	2.4213	2.4214

Fig. 4와 같이 환원판의 가장자리 원주에 1000 N의 횡방향 하중이 작용할 때, 원판을 3개, 6개, 9개, 그리고 90 개의 축대칭 링요소로 모델링하여

원판의 횡방향 변위를 유한요소법(FEM)과 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)으로 계산하였다. 여기서도 양 방법의 계산 결과는 잘 일치하였고, Table 3에서도 축대칭 링요소의 개수가 증가할수록 횡방향 변위가 수렴해 감을 확인할 수 있었다.

5. 결 론

유한요소-전달강성계수법은 유한요소법의 모델링 과정과 전달강성계수법의 전달 과정을 조합한 해석 알고리즘이다. 이 논문에서는 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 횡방향 하중을 받는 축대칭 원판의 정적해석 알고리즘을 정식화하였다.

두께가 일정한 원판, 두께가 선형적으로 변하는 원판, 그리고 원판의 일부는 두께가 일정하고 일부는 두께가 선형적으로 변하는 환원판을 대상으로 정적해석을 유한요소-전달강성계수법으로 수행한 후, 그 계산 결과를 기존의 유한요소법의 계산 결과와 비교하였다. 3 가지 수치계산 모델에 대하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 정적해석을 수행한 결과는 잘 일치하였다. 그리고 축대칭 링요소의 개수가 증가할수록 계산 결과가 잘 수렴해 감을 알 수 있었다.

Reference

1. J. R. Vinson, 1989, "The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates, and Shells", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 70-85.
2. T. J. R. Hughes, 1987, "The Finite Element Method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)", Prentice-Hall, New Jersey.
3. E. C. Pestel and F. A. Leckie, 1963, "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-Hill, New York.
4. M. S. Choi, 2001, "A Study on the Static Sensitivity Analysis Algorithm Using the Transfer of Stiffness Coefficient", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 5,

- No. 4, pp. 82-89.
5. M. S. Choi, 2003, "Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, pp. 805-815.
6. M. S. Choi and D. H. Moon, 2012, "Static Analysis of Three Dimensional Solid Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method Introducing Hexahedral Element", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 16, No. 1, pp. 78-83.
7. C. T. F. Ross, 1990, "Finite Element Methods in Engineering Science", Ellis Horwood, New York, pp. 388-409.