

# 단순 및 고정 지지된 Euler 보함수 성질을 갖는 다항식을 이용한 ‘ㄱ’형태 벽면 구조의 고유진동해석

## Free Vibration Analysis of ‘ㄱ’ Type Wall Structure using Polynomials having the Property of a Simple and Fixed Support Euler Beam Functions

윤 덕 영\* · 박 정 희†

DuckYoung Yoon and Jeonghee Park

(Received August 4, 2014 ; Revised October 21, 2014 ; Accepted October 21, 2014)

**Key Words** : Assumed Mode Function(파형가정함수), Component Mode Synthesis Method(부분모드합성법)

### ABSTRACT

Many studies using the assumed mode method have been found for the free vibration analysis of stiffened plate with known elastic boundary conditions. However many local structures such as tank edges and equipment foundations consist of connected structures and it is very difficult to find suitable elastic boundary conditions. In this study combined polynomials which satisfy simply and fixedly supported boundary conditions are proposed. The proposed method has been applied to tanks which bounded by bulkhead and a deck. The results of this study shows good agreements with these obtain by the FEA S/W(Patran/Nastran).

### 1. 서 론

선박의 주요 기진원과 인접한 기관실 및 선미에는 선박 운항상 필요한 연료 및 청수탱크 구조가 많이 배치되어 있으며 항상 진동에 노출되어 있다. 건조나 인도 후에 진동 문제가 야기되면 보강비용 및 납기지연 등 선박 품질 측면에서 회사 이미지에 손실을 주게 된다. 따라서 이러한 진동문제를 설계 단계에서 예방하기 위한 방진설계 검토가 필요하고 이런 이유로 각 조선소는 자체적으로 설계실 설계에 맞게 근사 해석적인 진동 계산 프로그램을 개발하여 사용하고 있다.

이러한 근사 해석적 계산 방법의 경우 주로 파형

함수로 Bernoulli-Euler 보 이론<sup>(4)</sup>을 사용하나, 연산 과정이 복잡하여 이를 간소화하기 위한 보함수 성질을 갖는 다항식 연구가 많이 진행되었다.

Han<sup>(2,3)</sup>은 경계 조건이 동일한 Euler 보 고유함수를 조합하여, 파형 가정함수를 정의하고 판에 대한 진동 해석을 수행 하였으며, Kim<sup>(5)</sup>은 Timoshenko 보함수 성질을 갖는 다항식을 이용 평판과 보의 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 고유진동 해석을 수행하였다. Chung<sup>(1)</sup>은 판 유추 구조계의 경계 조건을 단순 및 고정지지의 중간 상태로 보고 적절한 경계조건을 부여하기 위해 구조물 양단에 회전탄성 구속 조건을 고려하였으며 전단변형 및 회전관성 효과가 매우 큰 선체 이중저 판넬 구조와 같은 진동 해석을 위해 Timoshenko 보함수 성질을 갖는 다항

† Corresponding Author ; Member, Structural Design Department,  
Hyundai Samho Heavy Industry  
E-mail : parkjh@hshi.co.kr  
Tel : +82-61-460-2773, Fax : +82-61-460-3747  
\* Dept. of Naval Architecture and Ocean engineering, Chosun University

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

식 도출 방안을 제시하였다. 그러나 상기 연구들은 모두 주어진 탄성 경계조건에 대한 연구로서 적절한 경계조건 도출에 대한 연구는 발견하지 못 하였다. 이것이 지난 10년간 파형가정함수를 이용한 고유진동수 연구가 없었던 가장 큰 이유라 생각한다.

따라서, 이 연구의 목적은 판 구조에서 단순지지 경계조건과 고정지지 경계조건을 포함하는 파형 함수의 조합으로 실제 경계조건을 만족시키는 방법을 제시하고자 하였다.

## 2. 파형가정함수

Fig. 1은 단일 판과 연결 판 구조의 고유진동수와 고유모드를 유한요소 해석(FEA : finite element analysis) 프로그램을 통해 확인하였다. 그 결과 연결형 판 구조물 중 주 구조물의 1,2차 고유 모드는 단일 판의 해석 결과와 유사하고, 고유진동수는 단일 판의 고정-단순지지와 고정-고정지지 조건의 중간 상태에 있음을 확인할 수 있었다. 따라서, 두 조건의 조합된 상태의 파형함수를 정의하여 고유진동수 결과를 확인하였다.

먼저, 판 구조를 효과적으로 가정하는 방법은  $x$ 축 및  $y$ 축 방향으로 단순 보 고유함수의 선형 조합으로 가정하는 방법이 보편적으로 사용 되고 있다. 즉,

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn}(t) \cdot X_m(x) \cdot Y_n(y) \quad (1)$$

여기서,  $X_m(x), Y_n(y)$ 는  $x$ 축 및  $y$ 축 방향의 보의 고유함수이고,  $p, q$ 는 고유함수의 항수,  $A_{mn}(t)$ 은 각 항에 대한 미지 계수이다<sup>(2)</sup>.

보의 파형가정함수 중 고정-고정 경계조건( $\psi$ ), 고정-단순 경계조건( $\phi$ )과 단순-고정 경계조건( $\gamma$ )을 만족시키는 1차 파형 가정함수의 다항식은 식 (2)~(4)로 각각 얻을 수 있다.

$$\psi_1(\eta) = A_1(\eta+1)^2(\eta-1)^2 \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (2)$$

$$\phi_1(\eta) = B_1(\eta^4 - \eta^3 - 3\eta^2 + \eta + 2) \quad (3)$$

$$\gamma_1(\eta) = C_1(\eta^4 + \eta^3 - 3\eta^2 - \eta + 2) \quad (4)$$

계수  $A_1, B_1, C_1$ 은 보함수의 직교관계식을 이용하여 구현하였다.

Boundary Condition		1st Mode Shape	2nd Mode Shape
X : Clamp-Hinged Y : Clamp-Clamp			
	Natural frequency	1st Mode : 29.019 Hz	2nd Mode : 33.026 Hz
X : Clamp-Clamp Y : Clamp-Clamp			
	Natural frequency	1st Mode : 29.253 Hz	2nd Mode : 33.949 Hz
Boundary Condition		1st Mode Shape	2nd Mode Shape
- Bottom & Top : Clamp - Side : Clamp			
Natural frequency		29.132 Hz	33.218 Hz

Fig. 1 FEA results of single and connected plate

$$\int_{-1}^1 \psi_i \psi_j d\eta = \delta_{ij} \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \phi_i \phi_j d\eta = \delta_{ij} \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \gamma_i \gamma_j d\eta = \delta_{ij} \quad (7)$$

여기서  $i, j$ 는 진동차수이고,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta 이다.

$$A_1 = \frac{\int_{-1}^1 \psi_1^2 d\eta}{\sqrt{\int_{-1}^1 (\eta^4 - 2\eta^2 + 1)^2 d\eta}} \quad (8)$$

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 \phi_1^2 d\eta}{\sqrt{\int_{-1}^1 (\eta^4 - \eta^3 - 3\eta^2 + \eta + 2)^2 d\eta}} \quad (9)$$

$$C_1 = \frac{\int_{-1}^1 \gamma_1^2 d\eta}{\sqrt{\int_{-1}^1 (\eta^4 + \eta^3 - 3\eta^2 - \eta + 2)^2 d\eta}} \quad (10)$$

그리고, 2차모드 이상의 파형함수는 아래 식 (11)~(13)로부터 구현 할 수 있다.

$$\psi_k = A_k \left[ \psi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \cdot \psi_{i-1} \right] \quad (11)$$

$$\phi_k = B_k \left[ \phi_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} b_{ki} \cdot \phi_{i-1} \right] \quad (12)$$

$$\gamma_k = B_k \left[ \gamma_{k-1} \cdot \eta - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \cdot \gamma_{i-1} \right] \quad (13)$$

계수  $a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}$ 는 보함수의 직교관계식과 위 식 (11)~(13)으로부터 구할 수 있다.

Fig. 2에서  $w_1(x, y)$  판의  $y$ 축의 경우 갑판과 갑판 사이의 구조물로 구속되어 있으므로 좌형 가정함수를 고정-고정지지 조건만으로 가정 하고  $x$ 축의 경우에는 고정-고정( $\psi$ )과 고정-단순( $\phi$ ) 좌형 가정함수의 조합으로 표현 하였다.

$w_2(x, y)$ 의 경우도 위와 유사한 방법으로 정의하였으나  $x$ 축의 가정 좌형 함수를 단순-고정( $\gamma$ )지지 좌형 가정함수를 사용하여 정리하였다.

$$x_1(\eta) = \sum_{i=1}^m (\psi_i(\eta) p_{Ai}(t) + \phi_i(\eta) q_{Ai}(t)) \tag{14}$$

$$y_1(\eta) = \sum_{j=1}^n (\psi_j(\eta) p_{Bj}(t)) \tag{15}$$

$$w_1(x, y) = f_{A11} \psi_1 \psi_1 + \dots + f_{Ann} \psi_m \psi_n + g_{A11} \phi_1 \psi_1 + \dots + g_{Ann} \phi_m \psi_n \tag{16}$$

$$x_2(\eta) = \sum_{k=1}^s (\psi_k(\eta) p_{Ck}(t) + \gamma_k(\eta) q_{Ck}(t)) \tag{17}$$

$$y_2(\eta) = \sum_{l=1}^u (\psi_l(\eta) p_{Dl}(t)) \tag{18}$$

$$w_2(x, y) = f_{B11} \psi_1 \psi_1 + \dots + f_{Bsu} \psi_s \psi_u + g_{B11} \gamma_1 \psi_1 + \dots + g_{Bsu} \gamma_s \psi_u \tag{19}$$

여기서,  $p_{Ai}(t), q_{Ai}(t), p_{Bj}(t), p_{Ck}(t), q_{Ck}(t), p_{Dl}(t)$ 는 보 좌형 가정함수에서의 일반 좌표계이며,  $f_{A11}(t), \dots, f_{Ann}(t), g_{A11}(t), \dots, g_{Ann}(t), f_{B11}(t), \dots, f_{Bsu}(t), g_{B11}(t), \dots, g_{Bsu}(t)$ 는 벽면 구조를 이루는 좌형가정함수의 일반좌표계이다.

### 3. 부분모드합성

Fig. 2는 선체 내부의 일반 탱크 구조물 형상을

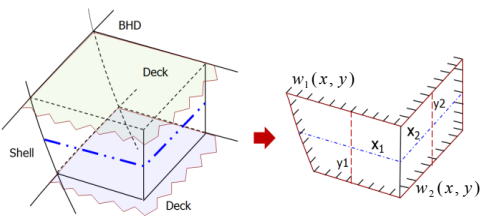


Fig. 2 The shape of connected structure

표현한 것으로 연결 구조물의 해석을 위해 구조물 연결부에서 경계조건을 만족시키는 부분모드 합성법<sup>(6)</sup>을 이용하였다.

Fig. 2와 같은 'Γ'자 연결 구조는 다음과 같은 경사각과 모멘트에 대한 연속조건을 만족 시켜야 한다.

#### [Slope Continuity]

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(1, y) - \frac{\partial w_2}{\partial x}(-1, y) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{1}{l_1} [g_{A11} \phi'_1 \psi_1 + \dots + g_{Ann} \phi'_m \psi_m] - \frac{1}{l_3} [g_{B11} \gamma'_1 \psi_1 + \dots + g_{Bsu} \gamma'_s \psi_u] = 0 \tag{21}$$

$$g_{Bsu} = \frac{1}{\alpha} [g_{A11} \cdot \frac{\phi'_1 \psi_1}{\gamma'_s \psi_u} + \dots + g_{Ann} \cdot \frac{\phi'_m \psi_n}{\gamma'_s \psi_u}] - [g_{B11} \cdot \frac{\gamma'_1 \psi_1}{\gamma'_s \psi_u} + \dots + g_{Bsu-1} \cdot \frac{\gamma'_s \psi_{u-1}}{\gamma'_s \psi_u}] \tag{22}$$

#### [Moment Continuity]

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(1, y) + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(-1, y) = 0 \tag{23}$$

$$f_{Bsu} = -\frac{1}{\alpha^2} [f_{A11} \cdot \frac{\psi''_1 \psi_1}{\psi''_s \psi_u} + \dots + f_{Ann} \cdot \frac{\psi''_m \psi_n}{\psi''_s \psi_u}] - [f_{B11} \cdot \frac{\psi''_1 \psi_1}{\psi''_s \psi_u} + \dots + f_{Bsu-1} \cdot \frac{\psi''_s \psi_{u-1}}{\psi''_s \psi_u}] \tag{24}$$

위 식에서 보는 바와 같이 경사각에 대해서 경계 조건은 단순지지 경계조건을 만족시키는  $g$  자유도 계만 관여하고, 모멘트 경계조건을 만족시키는 경우에는  $f$  자유도계만 관여함을 알 수 있다.

### 4. 연결구조물의 진동해석

좌형가정함수를 이용한 고전적 근사 해법에 의한 진동 해석을 위해서는 해석 대상계의 탄성에너지 및 운동에너지 산식이 요구된다. 좌형가정함수는 Euler 보 함수나 전단변형 효과를 고려한 Timoshenko 보 함수를 일반적으로 이용하고 있으며 Timoshenko 보 함수를 이용한 진동해석 방법에 대해서는 이미 Kim<sup>(5)</sup>이나 Chung<sup>(1)</sup>에 의해 수식화되어 있다.

이 연구에서는 연결구조물의 대한 진동해석 정식화 방법에 대해 유용성을 확인하고자 먼저 Euler 보

함수 성질을 갖는 다항식을 파형 함수로 정의하여 고유진동수를 계산하였으며 정식화 방법의 유용성

검증을 위해 Fig. 3 '⌋'-형태 벽면 구조물에  $w_2(x, y)$  구조물 길이 변화에 따른 정식화 계산과 유한요소법 (FEA) 결과를 비교/검토하였다. 유한요소 해석은 Patran/Nastran을 사용하였으며 '⌋' 형태의 구조물은 아래와 같은 형상을 모델로 하였다.

Fig. 2처럼 주요 고려 대상인 구조물이 갑판과 격

**Table 1** The property of model

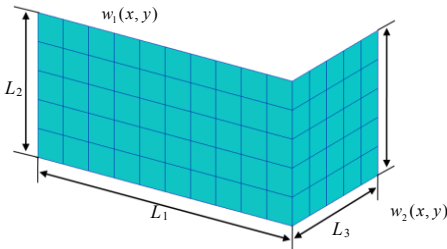
Thickness[mm]	Elastic modulus[N/m <sup>2</sup> ]	Density[kg/m <sup>3</sup> ]
20.0	2.1E11	7,850

**Table 2** The comparison of results(unit : Hz)

L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>	Calculation results				FEA			
				W <sub>1</sub> plate		W <sub>2</sub> plate		W <sub>1</sub> plate		W <sub>2</sub> plate	
				1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
10 m	2 m	2 m	2 m	25.258	29.172	39.6509	79.560	28.119	29.150	38.911	78.265
10 m	2 m	4 m	2 m	28.258	29.171	30.1476	38.2295	28.117	29.132	30.067	37.318
10 m	2 m	6 m	2 m	28.258	29.1707	28.8382	31.7294	28.116	29.161	28.752	31.631
10 m	2 m	8 m	2 m	28.258	29.1706	28.4347	29.9250	28.114	29.141	28.323	29.910
10 m	4 m	2 m	4 m	7.3174	8.4221	24.2613	66.5475	7.299	8.4139	22.595	65.952
10 m	4 m	4 m	4 m	7.3174	8.4211	9.9257	20.4227	7.2926	8.3736	9.9945	20.678
10 m	4 m	6 m	4 m	7.3174	8.4209	8.0618	11.9233	7.2894	8.4561	8.06	12.036
10 m	4 m	8 m	4 m	7.3174	8.4207	7.5330	9.4307	7.2854	8.3852	7.5275	9.4263
10 m	5 m	2 m	5 m	4.8210	6.0355	22.7025	65.2687	4.8372	6.1126	21.289	64.061
10 m	5 m	4 m	5 m	4.8210	6.0346	7.7592	18.7341	4.8271	6.0555	7.9146	19.248
10 m	5 m	6 m	5 m	4.8210	6.0343	5.6593	9.8768	4.8218	6.1803	5.7169	10.156
10 m	5 m	8 m	5 m	4.8206	6.0342	5.0606	7.1596	4.8151	6.0707	5.105	7.2607
10 m	6 m	2 m	6 m	3.4765	4.7952	21.9302	64.6035	3.5219	4.9357	20.579	63.508
10 m	6 m	4 m	6 m	3.4764	4.7944	6.6836	17.8992	3.5076	4.8633	6.8827	18.545
10 m	6 m	6 m	6 m	3.4764	4.7942	4.4059	8.8678	3.4994	5.0291	4.5036	9.2425
10 m	6 m	8 m	6 m	3.4764	4.7940	3.7410	6.0089	3.451	3.559	4.715	5.081
10 m	8 m	2 m	8 m	2.166	3.6533	19.9793	63.9653	2.1509	3.7996	19.815	62.33
10 m	8 m	4 m	8 m	2.1658	3.6527	5.7362	16.6369	2.2379	3.7774	5.9676	17.907
10 m	8 m	6 m	8 m	2.1658	3.6525	3.2489	7.9454	2.2234	4.0017	3.3912	8.4389
10 m	8 m	8 m	8 m	2.1658	3.6525	2.4780	4.9726	2.206	3.8013	2.6315	5.2166
10 m	10 m	2 m	10 m	1.5860	3.1835	19.6919	63.6776	1.6688	3.438	19.569	61.910
10 m	10 m	4 m	10 m	1.5858	3.1830	5.3571	16.8109	1.6906	3.3351	5.5970	17.634
10 m	10 m	6 m	10 m	1.5858	3.1829	2.7747	7.6042	1.6697	3.6048	2.9365	8.112
10 m	10 m	8 m	10 m	1.5858	3.1829	1.9366	4.5556	1.6448	3.3624	2.1369	4.8292

**Table 3** FEA result of single plate for simply supported boundary conditions(unit : Hz)

Single plate for simply supported boundary conditions							
L <sub>1</sub>	L <sub>2</sub>	L <sub>3</sub>	L <sub>4</sub>	W <sub>1</sub> plate		W <sub>2</sub> plate	
				1st	2nd	1st	2nd
10 m	6 m	2 m	6 m	3.4648	4.7624	20.477	63.273
10 m	6 m	4 m	6 m	3.4648	4.7624	6.6272	17.055
10 m	6 m	6 m	6 m	3.4648	4.7624	4.3862	8.7119
10 m	6 m	8 m	6 m	3.4648	4.7624	3.7278	5.9475



**Fig. 3** The model for comparison of calculated results

벽 등으로 구속되는 점을 감안하여 모서리 부분은 모두 고정 조건으로 고려하였다.

Table 3은 Table 2의 계산결과 중 L1:L2가 1:0.6인 사례에 대해 하나의 평판에 대해 고정-단순지지 조건에 대한 유한요소 해석 결과를 나타내었다. Table 2의 계산 결과와 비교하면 전반적으로 가장 낮은 수치를 나타내고 있다. 이는 단순지지 조건과 더불어 고정지지 조건이 연결부위에 영향을 미치고 있다고 판단되는 부분이다.

Table 2의 길이 변화에 따른 정식화 방법 계산 결과를 살펴보면, 1차 모드는 유한요소 해석 결과와 유사하지만, 2차 모드의 경우 길이(L1, L3) : 높이(L2, L4)비가 1:0.6보다 작을 경우에는 유한요소 해석과 5% 미만의 결과를 보이고 길이:높이비가 1:1의 경우 약 10% 정도의 차이가 발생하지만, 실제 선박의 탱크 구조는 길이:높이비가 통상 1:0.5보다 작다. 그리고 통상 FEA 결과에서도 10% 마진을 고려하는데 초기 설계 단계에서 벽의 공진 검토를 위한 것으로 조선소에서 관심 있는 저주파수 영역에서 FEA 결과와 유사함을 보여 주고 있다.

### 5. 결 론

연결구조물의 경계조건을 만족시키기 위하여 단

순지지 및 고정지지 조건을 만족하는 다항식의 조합으로 파형함수를 가정함으로써 자유도계 증가를 최소화하는 효율적 방법을 제안하고 그 유용성을 Euler 보 성질을 갖는 '┌' 형태의 벽면 구조물에 적용하여 검증하였다.

이 연구는 경계조건 파악의 한계 때문에 실용성에 제한을 받는 탱크나 각종 보기대와 같은 연결 구조나 판의 고유진동해석에 파형가정함수 방법을 제시하였다.

### 후 기

이 논문은 2013 학년도 조선대학교 학술 연구비 지원을 받아 연구되었음.

### References

- (1) Chung, J. H., Chung, T. Y. and Kim, K. C., 1992, Vibration Analysis of Mindlin Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions, Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 29, No. 1, pp. 158~172.
- (2) Han, S. Y., 1994, Vibration Analysis of Local Plate for the Hull Structure, Bulletin of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 31, No. 3, pp. 33~35.
- (3) Han, S. Y. and Kweon, H., 2000, Development of the Program for Vibration Analysis of Local Plate with Appendage, Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference, pp. 311~321.
- (4) Ahn, C. W., Hong, D. K., Kim, D. Y., Choi, S. C. and Park, I. S., 2001, A Study on the Optimal Position Determination of Middle Supporting points to Maximize the First Natural Frequency of a Beam, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 11, No. 1, pp. 89~95.

(5) Kim, B. H., Kim, J. H. and Cho, D. S., 2004, Free Vibration Analysis Stiffened Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 623~628.

(6) Thomson, W. T., 1993, Theory of Vibration with Applications, 4th Edition, Prentice Hall, New Jersey, pp. 360~365.



**Jeong-Hee Park** is received his B.S. and M.S. degrees from Chosun University in 1996 and 1999 respectively. He is currently a senior engineer at the Hyundai Samho Heavy Industry, Korea. His research interests are the reduction of vibration and noise in the ship.



**Duck-Young Yoon** is received his B.S. degrees from Seoul National University in 1978, M.S. and Ph.D. degrees from Massachusetts Institute of Technology(MIT) in 1984 and 1987 respectively. He is currently a Professor of department of naval architecture and ocean engineering, Chosun University, Korea.