

공분산 추정방법에 따른 최적자산배분 성과 분석

이 순 희[†]

카이스트 경영대학

Covariance Estimation and the Effect on the Performance of the Optimal Portfolio

Soonhee Lee

College of Business, KAIST

■ Abstract ■

In this paper, I suggest several techniques to estimate covariance matrix and compare the performance of the global minimum variance portfolio (GMVP) in terms of out of sample mean standard deviation and return. As a result, the return differences among the GMVPs are insignificant. The mean standard deviation of the GMVP using historical covariance is sensitive to the estimation window and the number of assets in the portfolio. Among the model covariance, the GMVP using constant systematic risk ratio model or using short sale restriction shows the best performance. The performance difference between the GMVPs using historical covariance and model covariance becomes insignificant as the historical covariance is estimated with longer estimation window. Lastly, the implied volatilities from ELW prices do not lead to superior performance to the historical variance.

Keywords : Global Minimum Variance Portfolio, Covariance Estimation, Historical Covariance, Implied Volatility, Correlation

1. 서 론

투자자가 주어진 위험수준 하에서 기대수익률과 위험 모두를 고려한 최적의 포트폴리오를 결정할

때 많이 사용하는 방법 중 하나는 자산의 기대수익률과 공분산을 이용한 Markowitz의 평균-분산(mean-variance) 자산배분모형이다. 이 모형에서 포트폴리오 위험은 자산의 공분산 정보를 이용하여 추정

논문접수일 : 2014년 09월 17일 논문게재확정일 : 2014년 10월 12일

[†] 교신저자, soon0573@gmail.com

되는데, 이때 가장 손쉽게 자산의 공분산 정보를 추정하는 방법은 과거 수익률의 표본공분산(역사적 공분산)을 이용하는 것이다. 그러나 Elton et al.[8]은 모형에 의해 추정된 상관계수가 역사적상관계수보다 실현상관계수를 더 잘 설명하는 것을 발견하고 역사적 상관계수에는 추정오차가 상당함을 보였다. Chopra and Ziemba[3], 이창수, 이광봉[1]의 연구에 따르면 모수추정치의 오차는 최적포트폴리오의 성과를 떨어뜨리는데, 많은 실증연구에서 역사적공분산을 사용한 최적포트폴리오가 모형에 의해 추정된 공분산을 사용한 경우보다 나쁜 성과를 보임으로써 Elton et al.의 결과와 일치하는 모습을 보인다. 이와 관련하여 많은 연구들이 포트폴리오 성과를 높이기 위한 다양한 공분산 추정방법을 제시하였는데, 이를 정리하면 다음과 같다.

Chan et al.[2]은 역사적변동성을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오가 단순평균 포트폴리오나 요인모형으로 추정된 공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오보다 더 큰 외표본 표준편차를 가지는 것을 발견하였고, Jagannathan and Ma[11]는 역사적공분산을 이용한 포트폴리오보다 공매불가능 제약을 부과하거나 모형에 의해 추정된 공분산을 이용한 포트폴리오의 성과가 더 좋은 것을 발견하였다. 그러나 이와 같이 공분산 정보를 사용하지 않는 단순평균 포트폴리오나 특정 가정 하에서 추정된 공분산을 이용한 포트폴리오가 더 좋은 성과를 보이는 것은 직관적으로 이해하기 어려운 면이 있다. 이를 테면 첫째, 모든 정보를 활용한 역사적공분산이 일부 정보를 누락하여 추정한 공분산보다 성과가 나쁘다는 점과, 둘째, 실제 빈번히 관찰되는 공매를 제한한 경우가 더 좋은 성과를 보인다는 점이다. Jagannathan and Ma는 위 현상을 다음과 같이 설명하였다. 역사적공분산과 모형공분산은 각각 추정오차(Estimation error)와 모형오차(Specification error)를 가지는데, 모형공분산은 역사적공분산보다 공분산을 안정적으로 추정(Shrinkage estimator)함으로써 상대적으로 작은 추정오차를 가진다. 따라서 각각의 공분산을 이용하여 구성된 포트폴리오의

상대적 성과는 추정오차와 모형오차 간의 트레이드 오프(trade off)에 의해서 결정되며, 실증적으로 모형오차를 가지지만 작은 추정오차를 가지는 모형공분산이 더 좋은 포트폴리오 성과를 보인 것이다. 이러한 주장을 뒷받침하는 증거로, 공분산 추정오차를 줄이기 위해 장기간 수익률 자료를 이용하여 구성된 포트폴리오는 모형공분산을 이용한 경우보다 더 좋은 성과를 가지는 것을 보였다. 한편, Ledoit and Wolf[15]는 역사적공분산의 추정오차가 작은 모형공분산을 조합함으로써 포트폴리오 수익률과 정보비율(information ratio)을 높였다. 이와 유사하게 Demiguel et al.[5]은 단순평균 포트폴리오와 열네 가지의 모형공분산을 이용하여 구성된 포트폴리오의 성과를 비교하여 경우에 따라서 단순평균 포트폴리오의 성과가 더 좋은 것을 보여, 모형오차 및 추정오차에 의한 영향이 상당함을 보였다. 동시에 50개 종목을 이용하여 구성된 포트폴리오가 단순평균 포트폴리오보다 더 좋은 성과를 가지기 위해서는 매우 장기 월 수익률 자료가 필요함을 보였다. 한편, Demiguel et al.[6]은 모형오차를 가진 공분산을 이용한 최적포트폴리오가 추정오차를 가지는 공분산을 이용한 경우보다 더 좋은 성과를 가지기 위해 만족해야 하는 조건을 제시하였다. 역사적공분산을 사용하여 최적포트폴리오를 구성한 것과 달리, Kostakis et al.[14], Demiguel et al.[7], Kempf et al.[13]은 옵션시장에서 관측되는 내재변동성을 이용하여 공분산을 추정하고 이를 이용할 경우 최소분산 포트폴리오 성과가 개선되는 것을 보였다. 이러한 결과는 내재변동성이 실현변동성을 더 잘 추정함으로써 포트폴리오 성과를 높인 것으로 해석할 수 있는데, 이는 실현변동성에 대한 내재변동성의 연구[4, 5]결과와 일치한다.

본 연구에서는, 위의 연구들과 같이, 역사적공분산 이외에 공분산 추정오차를 줄이는 다양한 추정방법을 제시하고, 각각의 추정된 공분산을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과를 비교하였다. 분석에 사용된 공분산은 역사적공분산, 모든 자산들의 상관계수를 상수로 추정하는 평균상관계수도

형(CM1), 자산의 수익률이 시장모형에 의해 설명된다는 가정과 체계적위험과 비체계적위험 간의 비율에 관한 가정을 추가되는 상수체계적위험비율모형(CM2)과 베타비례 체계적위험비율모형(CM3)을 제시하였다. 또한 각각의 추정모형에 대해 공매가능여부에 따른 추가제약을 부과하여, 총 여덟 가지 방법으로 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과를 살펴보았다. 마지막으로, ELW 가격자료에서 개별주식의 내재변동성을 추정하고, 이를 이용한 포트폴리오가 미국시장의 연구결과와 같이 역사적변동성을 이용한 포트폴리오보다 더 좋은 성과를 보이는지 살펴보았다.

본 연구의 의의는 다음과 같다. 한국 주식시장에서 다양한 방법으로 공분산을 추정하고 이를 활용한 최소분산 포트폴리오의 성과를 분석함으로써, 역사적공분산을 이용하여 위험지표를 추정하는 것은 경우에 따라 상당한 추정오차가 있을 수 있음을 실증적으로 보였다. 이 연구는 비단 평균-분산 자산배분모형뿐 아니라, 자산 간 공분산 정보를 사용하는 다른 위험지표 모형에도 상당한 시사점을 준다고 생각된다. 또한 한국 ELW 가격에서 추정된 내재변동성이 포트폴리오 성과를 개선시킬 수 있는지 살펴봄으로써, 내재변동성이 역사적변동성의 추정오차를 줄이는 것에 기여하는지 살펴본 최초의 연구이다.

분석결과는 다음과 같다. 첫째, 최소분산 포트폴리오의 평균 수익률은 모형에 따라 유의한 차이를 발생시키지 않았으나, 표준편차는 모형에 따라 유의한 차이를 보였다. 둘째, 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오의 표준편차는 구성자산 수와 추정 기간에 영향을 받았다. 단기 수익률 자료를 사용한 최소분산 포트폴리오는 모형공분산을 이용한 경우보다 더 큰 외표본 표준편차를 보이지만, 장기 수익률 자료를 사용한 경우는 오히려 모형공분산을 이용한 경우보다 더 낮거나 유의하지 않은 외표본 표준편차를 보였다. 이러한 결과는 Jagannathan and Ma[11], Demiguel et al.[5]에서 설명한 것과 같이, 단기 자료를 사용함에 의해서 공분산 추정오차가 커지고 동시

에 최소분산 포트폴리오의 성과도 나빠진 것으로 해석할 수 있다. 셋째, 제시된 모형 중에서 CM2 모형(상수체계적위험비율모형) 공분산을 이용하거나 공매불가능제약을 부과한 경우의 최소분산 포트폴리오가 가장 낮은 외표본 표준편차를 보였다. 넷째, 장기 간 수익률자료로 추정할 경우, 역사적공분산을 이용한 포트폴리오가 모형공분산을 이용한 경우보다 뛰어나거나 동일한 성과를 보였다. 따라서 수익률자료가 충분하다면 복잡한 모형을 쓰지 않고도 충분히 포트폴리오 성과를 높일 수 있는 것으로 보인다. 다만, 포트폴리오 성과는 구성하는 종목 수에 영향을 받기 때문에, 상황에 따라 공분산 추정에 사용되는 자료의 기간이나 모형 선택에 주의가 요구된다. 마지막으로, 미국시장과 달리, ELW 내재변동성을 이용한 포트폴리오는 역사적 변동성을 이용한 포트폴리오와 유의한 차이를 보이지 않았다. 즉, 국내 ELW 내재변동성은 추정오차를 감소시키지 않는 것으로 보인다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. 제 2장에서는 본 연구에서 분석대상이 되는 최소분산 포트폴리오의 구성방법 및 성과지표에 대하여 서술하고, 제 3장에서는 공분산 추정방법을 설명한다. 제 4장에서는 각 모형에 따라 구성된 최소분산 포트폴리오 성과를 비교하고, 제 5장에서는 ELW 가격에서 추정된 내재변동성을 사용하여 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과를 살펴본다. 제 6장에서는 분석결과를 요약한다.

2. 최소분산 포트폴리오의 구성방법 및 성과지표

Markowitz의 평균-분산 자산배분모형은 기대수익률과 자산 간 공분산을 이용하여 최적포트폴리오를 구성하는 방법을 제시하였고, 이를 기반한 많은 연구들은 투자자의 접점포트폴리오(Tangent portfolio)에 관하여 조사하였다. 그러나, 공분산 추정 방법에 관한 연구[3, 2, 11, 6, 7]에서는 주로 최소분산 포트폴리오(Global Minimum Variance Portfolio)를 구성하고 그 성과를 살펴보는데, 그 이유는 최소

분산 포트폴리오 성과가 공분산에 의해서만 결정되어 공분산 추정 성과를 살펴보기에 가장 적합하기 때문이다.

최소분산 포트폴리오는 개별자산에 w 의 비중으로 투자한 포트폴리오가 투자비중의 총 합이 1이 되는 제약조건 하에서 분산을 최소로 만드는 포트폴리오를 뜻한다. 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \min w' \Sigma w & \quad (1) \\ \text{such that } w' \mathbf{1}_N = 1 & \quad (2) \end{aligned}$$

이때 Σ 는 공분산을 의미하며, $\mathbf{1}_N$ 은 모든 항이 1인 N 차 벡터이다. 목적함수 (1)의 해가 되는 최적 투자비중은

$$w = \frac{1}{\mathbf{1}_N' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_N \quad (3)$$

와 같이 결정되는데, 이를 통해 알 수 있듯이 최소분산 포트폴리오는 개별자산의 기대수익률과 상관없이 공분산에 의해서만 결정된다.

각각의 공분산을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과는 외표본 평균 표준편차, 평균 수익률로 나타낸다. 이를 위해 매월 말 공분산을 추정하여 최소분산 포트폴리오를 구성하고, 포트폴리오의 이후 한 달간 일일수익률을 계산한다. 이 수익률의 연환산 평균 수익률, 연환산 표준편차를 구하고, 이 값의 시계열 평균을 포트폴리오 외표본 성과로 한다.

3. 공분산행렬 추정 모형

최소분산 포트폴리오는 역사적공분산, 모형공분산을 이용하여 구성하는데, 공매가능한 경우와 공매불가능한 경우에 대해 각각 구성하였다. 제 3장에서는 각 모형의 공분산 추정방법을 살펴보고, 공분산 추정의 관점에서 공매불가능 제약이 가지는 의미에 관하여 살펴본다.

3.1 공분산행렬 추정 1(Hist : 역사적공분산)

역사적공분산은 추정시점으로부터 과거 일정기간(D일) 동안 i, j 주식의 실제 수익률 자료를 이용하여 추정된 표본 공분산으로, 다음과 같이 추정된다.

$$\begin{aligned} \text{cov}(r_{it}, r_{jt}) &= \frac{1}{D} \sum_{s=1}^D (r_{i,t-s} - \bar{r}_i)(r_{j,t-s} - \bar{r}_j), \quad (4) \\ &\text{for } i, j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

이때, \bar{r}_i 및 \bar{r}_j 는 표본 평균을 의미한다.

이 방법은 가장 쉽게 공분산을 추정하는 방법으로, 공분산을 이용한 포트폴리오 성과를 살펴볼 때 벤치마크로 이용한다.

3.2 공분산행렬 추정 2(CM1 : 평균상관계수모형)

Chan et al.[3], Ledoit and Wolf[15], Elton et al.[8]은 공분산을 추정할 때 상관계수를 0과 1사이의 특정 값으로 정하고 추정오차가 작은 공분산을 구하였다. 그러나 이 방법은 시장정보를 완전히 배제하고 상수값을 임의로 정하였다는 점에서 문제가 있다. 본 연구에서는 상수 상관계수를 가지지만 동시에 시장정보를 반영할 수 있도록 Skintzi and Refenes[16]방법을 사용하여 공분산을 추정하였다. Skintzi and Refenes는 주가지수가 개별자산의 포트폴리오라는 점을 이용하여, 개별자산들로 구성된 포트폴리오의 내재변동성이 지수옵션의 내재변동성과 같도록 만드는 평균상관계수를 구했다. 그리고 이 값의 변화가 지수옵션의 내재변동성의 변화를 설명하는 것을 보였다. 즉, 개별종목의 실제 상관계수 값과 다르게 편차(bias)를 가진다 하더라도 평균상관계수의 변화가 변동성의 변화에 대한 유의한 정보를 가지는 것을 보였다. 본 연구에서는 Skintzi and Refenes가 제시하는 평균상관계수를 이용하여 추정한 공분산을 CM1이라 칭하고, 다음과 같이 구한다.

자산 i 와 j 의 t 시점 상관계수를 $\rho_{i,j,t}$ 라고 하면, 개별자산과 시장포트폴리오의 분산 공분산의 관계식에 의해 다음 식 (5)가 성립한다.

$$\sigma_{M,t}^2 = \sum_i^N w_{itm}^2 \sigma_{it}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i} w_{it} w_{jt} \rho_{ijt} \sigma_{it} \sigma_{jt} \quad (5)$$

이때 식 (5)에서 ρ_{ijt} 대신 $\bar{\rho}_t$ (상수상관계수)를 이용하면 식 (6)이 성립한다.

$$\sigma_{M,t}^2 = \sum_i^N w_{itm}^2 \sigma_{it}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i} w_{it} w_{jt} \bar{\rho}_t \sigma_{it} \sigma_{jt} \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)의 우변을 같게 놓고 풀면 상관계수의 평균은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_t &= \frac{\sigma_{M,t}^2 - \sum_{i=1}^N w_{itm}^2 \sigma_{it}^2}{2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i} w_{it} w_{jt} \sigma_{it} \sigma_{jt}} \quad (7) \\ &= \frac{\sigma_{M,t}^2 - \sum_{i=1}^N w_{itm}^2 \sigma_{it}^2}{(\sum_{i=1}^N w_{imt} \sigma_{it})^2 - \sum_{i=1}^N w_{itm}^2 \sigma_{it}^2} \end{aligned}$$

위에서 구해진 평균상관계수를 자산간의 공분산 행렬의 모든 종목에 적용하면, 자산 i와 j의 t시점 공분산 값은 $\bar{\rho}_t \sigma_{it} \sigma_{jt}$ 로 결정된다.

이 모형에서는 상관계수가 식 (7)에서와 같이 상수로 정해지기 때문에, 이 모형의 공분산은 역사적 공분산보다 작은 추정오차를 가지고 동시에 상수상관계수라는 제약을 부과함으로써 모형오차를 가지게 된다.

3.3 공분산행렬 추정 3(CM2 : 상수체계적위험비율모형)

Green and Hollifield[10], Chan et al.[2], Jagannathan and Ma[11]는 개별주식수익률이 (단일)요인수익률에 의해 설명된다는 요인모형을 가정하고 공분산을 추정하였다. Kempf et al.[13]은 단일요인 가정뿐 아니라, 요인모형에서 구해진 체계적 위험과 비체계적 위험이 일정한 값을 가진다는 실증연구[9] 결과를 추가적으로 반영하여 공분산을 추정하고, 이를 이용한 포트폴리오 성과가 역사적공분산을 이용한 경우보다 뛰어난 것을 보였다. 본 연구에서는 이 모형에 의한 공분산을 CM2(상수체계적위험모형)라고 칭하고, 다음과 같이 구하였다.

가정 1 : 각 자산의 수익률은 시장모형(market model)을 따른다.

가정 2 : 각 시점에서 체계적위험, 비체계적위험의 비율은 모든 자산이 동일하다.

첫 번째 가정은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$r_{it} = \alpha_{it} + \beta_{it} r_{Mt} + \epsilon_{it}, \quad \forall i=1, \dots, N \quad (8)$$

r_{it} 는 t시점에서 자산 i의 수익률, r_{Mt} 는 t시점 시장포트폴리오의 수익률을 의미하며, 서로 다른 자산의 비체계적 위험 ϵ_{it} 과 ϵ_{jt} 는 독립이다. 이 가정을 통해, 자산 i와 j 수익률의 공분산은 식 (9)로 표현된다.

$$\text{cov}(r_{it}, r_{jt}) = \begin{cases} \beta_{it} \beta_{jt} \sigma_{Mt}^2 & i \neq j \text{일 때} \\ \beta_{it}^2 \sigma_{Mt}^2 + \sigma_{\epsilon_{it}}^2 & i = j \text{일 때} \end{cases} \quad (9)$$

식 (9)에 두 번째 가정을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{it}^2 = \beta_{it}^2 \sigma_{Mt}^2 + (1 - c_t) \sigma_{\epsilon_{it}}^2, \quad 0 \leq c_t \leq 1 \quad (10)$$

위 식 (10)을 정리하면 식 (11)을 도출할 수 있다.

$$\frac{\beta_{it}^2 \sigma_{Mt}^2}{\sigma_{it}^2} = c_t \quad (11)$$

식 (11)에 의하면, 각각의 시점에서 모든 개별자산의 ‘체계적위험/총위험’은 시간에 따라서 변하지만 한 시점에서는 모든 자산에 동일하여 상수상관계수를 가진다. 위에서 계산된 값을 식 (9)의 $i \neq j$ 인 경우에 대입하면 서로 다른 두 자산의 공분산이 다음과 같이 도출된다.

$$\text{cov}(r_{it}, r_{jt}) = c_t \sigma_{\epsilon_{it}} \sigma_{\epsilon_{jt}} \quad (12)$$

마지막으로, t시점에서 전체 시가총액 대비 자산

i의 시가총액 비율을 w_{itm} 이라고 두면 시장포트폴리오의 베타는 1이기 때문에 다음을 만족해야 한다.

$$\sum_{i=1}^N w_{itm} \beta_{it} = 1 \tag{13}$$

이제 식 (11), 식 (13)을 정리하면 자산들끼리의 상관관계수이자 총 위험 중 체계적 위험의 비율 c_t 는 다음과 같이 표현된다.

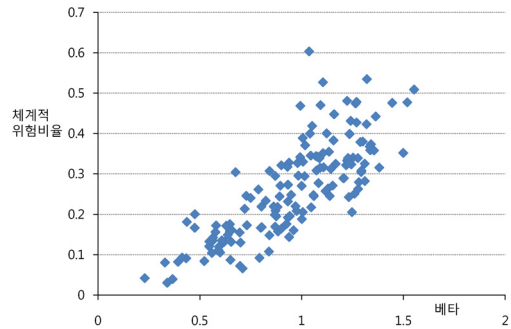
$$c_t = \frac{\sigma_{Mt}^2}{(\sum_{i=1}^N w_{itm} \sigma_{it})^2} \tag{14}$$

결과적으로 CM2(상수체계적위험비율모형)에서는 일반적인 요인모형에서 추정된 것과 달리 자산 간 상관관계수가 상수로 결정되고, 이는 CM1과 같이 작은 공분산 추정오차와 모형오차를 가진다.

3.4 공분산행렬 추정 4(CM3 : 베타비례 체계적위험비율모형)

위 CM2(상수체계적위험비율모형)는 단일요인모형 가정뿐 아니라 체계적위험과 비체계적위험 비율에 관한 가정을 더한 모형이다. 그러나 이 모형은 미국 주식시장의 실증연구에 근거한 것으로, 국내 시장에서도 성립하는지 확신할 수 없다. 이에 국내 주식 시장에서도 동일한 현상이 관측되는지 살펴보고, 그 결과에 따라 수정된 모형을 제시하고자 한다.

국내시장에서 자산들의 체계적 위험비율을 다음과 같이 살펴보았다. 시장모형을 가정하고 매월 말 과거 3년 주식수익률 자료를 이용하여 베타를 구하고, 이후 한 달 동안의 실현된 수익률 자료를 이용하여 체계적 위험비율(체계적위험/총위험)을 구하였다. 매월 말 구한 시계열자료를 이용하여 평균 베타와 평균 체계적 위험비율을 구하고, 자산 별로 동일한 일정한 비율을 보이는지 살펴보았다. [그림 1]은 KOSPI200종목의 평균 베타와 체계적 위험비율을 나타낸다.



KOSPI 200 Index에 속하는 모든 종목을 대상으로, 매월 말, 과거 3년의 일일주가수익률을 이용하여 각 주식의 시장베타를 구하고, 이후 한 달 수익률 자료를 이용하여 체계적 위험비율(체계적위험/총위험)을 구하였다. 이렇게 추정된 자산 별 체계적 위험비율과 베타의 시계열자료를 평균하여 종목별 평균베타와 체계적 위험비율을 구하고, 이를 그림으로 나타냈다.

[그림 1] 체계적 위험비율과 베타

[그림 1]에 의하면 국내시장에서는 CM2의 가정과 달리 체계적위험비율이 일정하지 않고, 베타에 비례하여 증가하는 경향을 보인다.1) 이 결과를 이용하여 CM2의 가정 2를 다음과 같이 수정하였다.

가정 2' : 각 시점에서 체계적 위험비율은 베타에 비례한다.

이를 적용하면 식 (10)은 다음과 같이 바뀐다.

$$\sigma_{it}^2 = \beta_{it}^2 \sigma_{Mt}^2 + (1 - d_t \beta_{it}) \sigma_{it}^2 \tag{15}$$

위 식 (15)를 정리하여 식 (16)을 도출할 수 있다.

$$\frac{\beta_{it} \sigma_{Mt}^2}{\sigma_{it}^2} = d_t \tag{16}$$

그리고 베타의 가중평균이 1이라는 정보를 이용하여 정리하면 다음을 도출할 수 있다.

1) 매 추정시점에서 베타와 총위험을 구하기 위해 사용된 시계열자료의 기간을 다르게 하여도 동일한 경향이 있음을 확인하였다.

$$d_i = \frac{\sigma_{Mt}^2}{\sum_{i=1}^N w_{itm} \sigma_{it}^2} \quad (17)$$

식 (16)과 식 (17)을 이용하면 베타는 식 (18)과 같이 결정된다.

$$\beta_{it} = \frac{\sigma_{it}^2}{\sum_{i=1}^N w_{itm} \sigma_{it}^2} \quad (18)$$

동시에 공분산은 다음과 같이 결정된다.²⁾

$$\text{cov}(r_{it}, r_{jt}) = \begin{cases} \frac{\sigma_{it}^2 \sigma_{jt}^2}{(\sum_{i=1}^N w_{itm} \sigma_{it}^2)^2} \sigma_{Mt}^2, & i \neq j \text{ 일 때} \\ \sigma_{it}^2, & i = j \text{ 일 때} \end{cases} \quad (19)$$

CM3(베타비례 체계적위험비율모형)은 동일한 요인모형을 적용한 CM2가 상수 상관계수를 가지는 것과 달리 종목 별로 다르게 추정된 상관계수를 가진다. 그러나 이 역시 역사적 평균 공분산보다 작은 값을 가지기 때문에, CM3 공분산 역시 앞의 두 모형과 유사하게 역사적공분산에 비해 작은 공분산 추정오차와 모형오차를 가진다.

3.5 공분산 추정 관점에서 공매제약조건의 의미

본 연구에서는 추정된 공분산을 이용하여 각각 공매가능/공매불가능 제약 하에서 최소분산 포트폴리오를 구성하고, 이들의 성과를 비교한다. 공매불가능 제약하에서 최소분산 포트폴리오는 다음의 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \min w' \Sigma w \\ & \text{such that } w' 1_N = 1 \\ & w_i \geq 0, \text{ for } \forall i \end{aligned} \quad (20)$$

공매불가능 제약은 포트폴리오를 구성하는 자산의 비중을 0보다 크거나 같게 만드는 조건으로, 본 연구

2) 경우에 따라서 공분산 행렬이 양의 정부호(positive definite)가 성립하지 않을 수 있다. 이 경우는 Kempf et al.에서 사용한 것과 같이 비체계적 위험비율이 5% 미만인 경우, 5%로 제약을 줌으로써 해결하였다.

의 주제인 공분산 추정과는 별개의 문제이다. 그러나 Jagannathan and Ma[11]가 공매불가능 제약 하에서 최적해는 식 (21)과 동일한 것을 증명하였다.

$$\begin{aligned} & \min w' \hat{\Sigma} w \\ & \text{such that } w' 1_N = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

이때, $\hat{\Sigma} = \Sigma - (\lambda 1_N + 1_N \lambda')$ 이고, λ 는 식 (20)의 양수 제약식에 대한 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 의미한다. 따라서 공매불가능 조건은 과대 추정된 공분산 값을 줄임으로써 추정오차를 줄이는 방법(Shrinkage estimator)으로 해석될 수 있다.

따라서 본 연구는 공분산 추정을 위해 네 가지 방법을 제안하고 성과를 살펴보지만, 각각의 모형에 공매불가능 제약을 부과함으로써 총 여덟 가지 공분산 추정방법에 대해 살펴본 것과 같다.

4. 실증분석 결과

4.1 자료

포트폴리오를 구성하는 종목은 2005년 12월~2013년 6월까지 KOSPI200 Index에 포함되어 있으면서 ELW를 발행한 종목³⁾ 중에서 시가총액 상위 30 혹은 50종목의 주식으로 구성하였다. 분석에 필요한 일일 주가가격, 시가총액, 개별주식 배당자료는 에프앤가이드(Fnguide)에서, 매 시점의 KOSPI200 종목리스트는 거래소에서 구하였다. ELW 자료는 5장에서 상세하게 설명한다.

4.2 실증분석

선행연구에서 최소분산 포트폴리오의 성과는 공

3) 단순히 최소분산 포트폴리오를 구성하기 위한 조건으로는 ELW 발행여부가 필요하지 않으나, 이후 ELW에서 도출한 내재변동성을 사용하여 구성된 포트폴리오와의 비교분석을 위하여 ELW를 발행한 종목으로 한정하여 살펴본다. 현재의 분석대상은 매월 말, 잔여만기가 30일 이상 90일 이하, 가격도가 80~120사이에 존재하는 ELW를 발행한 종목이다.

분산을 추정하는 방법에 따라 유의한 차이를 보이고, 추정오차가 큰 역사적공분산을 기반으로 포트폴리오를 구성하는 것은 최선의 선택이 아닐 수 있음을 보였다. 이를 단적으로 살펴보기 위하여, 역사적공분산을 이용해 구성된 최소분산 포트폴리오(이후 역사적공분산 최소분산 포트폴리오)와 공분산 정보를 전혀 사용하지 않고 구성된 포트폴리오(시장비중가중평균, 단순평균 포트폴리오)의 성과를 비교해 보았다.

<표 1>은 과거 60, 240영업일 일일수익률을 이용하여 추정한 역사적공분산(이후 60, 240영업일 역사적공분산) 최소분산 포트폴리오(Hist 60, Hist 240)와 단순평균/시장비중평균 포트폴리오의 외표본 성과를 비교한 것이다. Panel A는 60영업일 역사적공분

산을 이용하여 구한 최소분산 포트폴리오를 살펴본 결과이다. 시가총액이 큰 50개의 자산으로 구성된 최소분산 포트폴리오의 실현된 평균 표준편차는 31.3%로 시장비중(단순) 평균 포트폴리오의 평균 표준편차, 19.6%, 19.9%,보다 크고, 그 차이 또한 통계적으로 유의(p-value 0.01)하였다. 최소분산 포트폴리오의 평균 수익률은 0.2%로 시장비중(단순)평균 포트폴리오의 평균 수익률, 3.3%, 1.3%, 보다 작지만 그 차이는 통계적으로 유의하지 않았다. 이와 달리 시가총액 상위 30개 종목으로 구성된 시장비중(단순)평균 포트폴리오는 평균 표준편차, 평균 수익률 모두 최소분산 포트폴리오와 유의한 차이를 보이지 않았다. Panel B는 240영업일 공분산을 이용하여 구성

<표 1> 시장비중(단순)평균 포트폴리오와 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오 성과

단순평균 포트폴리오는 투자대상종목을 동일한 비중으로 구성된 포트폴리오이고, 시장비중평균 포트폴리오는 투자대상 종목을 각각의 시가총액 비중대로 구성된 포트폴리오이다. Hist는 역사적공분산을 이용해 구성된 최소분산 포트폴리오를 뜻한다. 각 포트폴리오는 분석대상이 되는 개별주식 중에 시가총액 상위 30, 50개 종목을 이용하여 구성하였다. 매월 말, 세 가지 방법으로 포트폴리오를 구성하고, 구성된 포트폴리오의 다음 한 달 동안의 일일 수익률을 이용하여 연환산 평균 수익률, 연환산 표준편차를 구한다. 아래의 표는 포트폴리오 별 연환산 평균 수익률, 표준편차의 시계열평균을 나타낸다. Panel A, B는 각각 60, 240영업일 자료를 이용하여 역사적공분산을 추정한 경우의 최소분산 포트폴리오와 시장비중(단순)평균 포트폴리오 성과를 보여준다. 각각의 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오(Hist) 아래의 괄호는 각각 최소분산 포트폴리오와 시장비중평균 포트폴리오, 최소분산 포트폴리오와 단순평균 포트폴리오의 평균 표준편차, 평균 수익률이 통계적으로 동일한 값을 가지는지를 테스트한 p-value이다.

Panel A : 60영업일 수익률 사용

	구성 종목수 : 30		구성 종목 수 : 50	
	평균 표준편차	평균 수익률	평균 표준편차	평균 수익률
시장비중평균 포트폴리오	0.202	0.037	0.199	0.033
단순평균 포트폴리오	0.191	0.020	0.196	0.013
Hist 60	0.195	0.092	0.313	0.002
	(0.61)	(0.67)	(0.01)	(0.87)
	(0.77)	(0.59)	(0.01)	(0.95)

Panel B : 240영업일 수익률 사용

	구성 종목수 : 30		구성 종목 수 : 50	
	평균 표준편차	평균 수익률	평균 표준편차	평균 수익률
시장비중평균 포트폴리오	0.202	0.037	0.199	0.033
단순평균 포트폴리오	0.191	0.020	0.196	0.013
Hist 240	0.162	0.103	0.175	0.117
	(0.01)	(0.54)	(0.07)	(0.47)
	(0.03)	(0.47)	(0.13)	(0.39)

한 최소분산 포트폴리오의 외표본 성과를 나타내는데, Panel A의 결과와 다소 다르다. 50, 30개 종목으로 구성된 최소분산 포트폴리오의 평균 표준편차는 각각 17.5%, 16.2%로 60영업일 자료를 사용한 경우보다 현저히 줄어들었고, 시장비중(단순)평균 포트폴리오보다 유의하게 작다. 동시에 평균 수익률도 11.7%, 10.3%로 상승하였으나, 시장비중(단순)평균 포트폴리오와 유의한 차이를 보이지는 않았다. 이를 종합하면, 공분산 추정에 사용된 기간이 짧을수록, 포트폴리오 구성종목 수가 많을수록, 최소분산 포트폴리오의 성과는 나빠지는 것으로 보인다. 이러한 결과는 구성종목이 많을수록 추정오차를 줄이기 위해서 더 장기의 수익률자료가 필요하고, 동일한 자산

수로 구성된 포트폴리오의 경우에 더 긴 자산 수익률을 사용할수록 추정오차가 줄어든다는 Jagannathan and Ma[11]의 연구결과와 일치한다.

앞의 분석에서 보인 역사적공분산 포트폴리오 성과차이가 추정오차에 의해서 발생한 것인지 보다 자세히 살펴보기 위해 모형공분산 최소분산 포트폴리오와 비교해 보도록 한다. 이는 <표 2>에서 살펴볼 수 있다. <표 2>는 60영업일 수익률 자료를 이용하여 추정된 각각의 공분산을 이용하여 30, 50개의 종목으로 구성된 최소분산 포트폴리오의 평균 표준편차, 평균 수익률을 나타낸다. 각각의 모형공분산 최소분산 포트폴리오의 성과지표 아래의 첫 번째 괄호는 공매 제약이 없이 구성된 역사적공분산 최소분산 포트폴

<표 2> 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오 성과 분석 I

아래의 표는 총 여덟 가지 방법으로 도출한 최소분산 포트폴리오의 외표본 성과(연환산 평균 표준편차, 연환산 평균 수익률)를 나타내는데, 추정치는 과거 60일 자료를 이용했고, 포트폴리오는 각각 분석대상이 되는 개별 주식 중에 시가총액 상위 30, 50개 종목을 이용하여 구성하였다. CM1은 평균 상관계수 모형에 따라 도출한 포트폴리오를 의미하며 CM2, CM3는 각각 체계적위험과 비체계적위험 간의 비율에 관한 가정(상수비율, 베타비율)에 따라 도출한 포트폴리오를, Hist는 역사적공분산을 이용한 포트폴리오를 뜻한다. 각각의 모형이름 뒤에 붙은 _restriction은 포트폴리오가 공매 불가능 제약 하에서 구성되었음을 의미한다. 평균 표준편차 및 평균 수익률 값 아래의 첫 번째 및 두 번째 괄호는, Hist 및 Hist_restriction과 동일한 값을 가지는지를 검증한 p-value를 나타낸다.

	구성 종목수 : 50		구성 종목 수 : 30	
	평균 표준편차	평균 수익률	평균 표준편차	평균 수익률
CM 1	0.17 (0.00) (0.02)	0.03 (0.87) (0.85)	0.17 (0.01) (0.11)	0.01 (0.49) (0.63)
CM 1_restriction	0.15 (0.00) (0.89)	0.03 (0.84) (0.89)	0.05 (0.00) (0.79)	0.05 (0.69) (0.9)
CM 2	0.15 (0.00) (0.22)	0.05 (0.76) (0.97)	0.16 (0.01) (0.49)	0.00 (0.41) (0.55)
CM 2_restriction	0.14 (0.00) (0.82)	0.03 (0.86) (0.85)	0.15 (0.00) (0.59)	0.04 (0.67) (0.87)
CM 3	0.16 (0.00) (0.07)	0.02 (0.89) (0.81)	0.16 (0.01) (0.28)	0.01 (0.46) (0.6)
CM 3_restriction	0.14 (0.00) (0.96)	0.03 (0.86) (0.86)	0.15 (0.00) (0.67)	0.04 (0.67) (0.88)
Hist 60	0.31	0.00	0.20	0.09
Hist 60_restriction	0.14	0.05	0.15	0.06

리오와 동일한 평균값을 가지는지 검증한 p-value를 나타내고, 아래의 두 번째 괄호는 공매제약이 있는 경우의 역사적공분산 최소분산 포트폴리오 성과와 동일한 평균을 가지는지 검증한 p-value를 나타낸다.

먼저 공매제약 없이 구성된 역사적공분산 최소분산 포트폴리오를 살펴보자. 역사적변동성 최소분산 포트폴리오의 연환산 평균 표준편차는 구성종목 수에 따라 각각 31%와 20%의 값을 가진다. 이 값은 모형공분산 최소분산 포트폴리오들의 외표본 평균 표준편차(15%~17%)에 비해서 크고, 두 그룹간 표준편차 차이는 모든 경우에 통계적으로 유의하였다. 이와 달리 역사적변동성과 내재변동성 최소분산 포트폴리오 평균 수익률은 각각 0%, 9% 그리고 0%~5%로 통계적으로 유의하지 않은 차이를 보인다. 즉, 역사적변동성 최소분산 포트폴리오에서 공분산 추정 오차를 줄이는 것은 포트폴리오의 수익률보다 표준

편차에 유의한 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

공매불가능 제약이 있는 경우 역사적변동성 최소분산 포트폴리오 표준편차는 14%, 15%로 공매제약이 없는 경우에 비해 각각 17%, 4% 낮아지고, 평균 수익률은 5%, 6%로 공매제약이 없는 경우와 5%, -3%의 차이를 보인다. 표에 나타나있지는 않지만, 표준편차 차이는 통계적으로 유의하고 평균 수익률 차이는 유의하지 않았다. 또한 공매불가능 제약 하에서 역사적공분산 최소분산 포트폴리오는 모형공분산을 이용한 경우와 유의하지 않은 평균 표준편차, 평균 수익률 차이를 보인다(CM1에 비해서는 더 좋은 성과를 보인다). 따라서 공매제약을 부과하거나 요인 모형 공분산을 이용하면 공분산 추정오차를 상당부분 줄일 수 있고, 이는 Jagannathan and Ma[11], Demiguel et al.[6], Demiguel et al.[7]과 일치하는 결과이다.

〈표 3〉 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오 성과 분석 II

아래의 표는 과거 120, 240, 480일의 추정기간을 이용하여 <표 2>를 재현하였다. 단 포트폴리오는 50개 종목으로 구성하였다.

	구성 종목수 : 120		구성 종목수 : 240		구성 종목수 : 480	
	평균 표준편차	평균 수익률	평균 표준편차	평균 수익률	평균 표준편차	평균 수익률
CM 1	0.18 (0.91) (0.01)	0.03 (0.43) (0.67)	0.19 (0.01) (0.01)	0.04 (0.56) (0.87)	0.19 (0.01) (0.01)	0.08 (0.98) (0.91)
CM 1_restriction	0.15 (0.01) (0.48)	0.02 (0.31) (0.53)	0.15 (0.77) (0.22)	0.01 (0.3) (0.58)	0.15 (0.69) (0.21)	0.03 (0.55) (0.62)
CM 2	0.15 (0.02) (0.21)	0.05 (0.48) (0.78)	0.15 (0.64) (0.29)	0.05 (0.56) (0.93)	0.15 (0.79) (0.28)	0.06 (0.81) (0.91)
CM 2_restriction	0.14 (0.01) (0.98)	0.03 (0.39) (0.65)	0.14 (0.09) (0.86)	0.03 (0.42) (0.74)	0.14 (0.36) (0.96)	0.03 (0.58) (0.65)
CM 3	0.16 (0.02) (0.14)	0.04 (0.42) (0.68)	0.16 (0.35) (0.01)	0.04 (0.51) (0.82)	0.17 (0.04) (0.01)	0.02 (0.53) (0.59)
CM 3_restriction	0.15 (0.17) (0.14)	0.03 (0.38) (0.63)	0.15 (0.15) (0.14)	0.03 (0.44) (0.76)	0.15 (0.78) (0.57)	0.02 (0.53) (0.61)
Hist	0.18 (0.01)	0.12 (0.64)	0.16 (0.13)	0.10 (0.61)	0.15 (0.36)	0.08 (0.90)
Hist_restriction	0.14	0.07	0.14	0.06	0.14	0.07

다음으로, 보다 장기 수익률 자료로 역사적공분산을 추정된 경우의 성과를 살펴보고, 추정에 사용된 기간에 따른 공분산 추정오차의 변화를 가능해보았다.

<표 3>에서 보면, 역사적공분산을 추정하기 위해 참고된 기간(120, 240, 480일)이 길어지면 역사적공분산 최소분산 포트폴리오의 평균 수익률이 각각 12%, 10%, 8%, 평균 표준편차가 18%, 16%, 15%로 60일 영업일 자료를 이용한 경우보다 평균 수익률은 높아지고, 평균 표준편차는 줄어들었다.⁴⁾ 이 결과는 장기간 수익률자료를 사용하면 공분산 추정오차가 작아지고 포트폴리오 성과가 높아진다는 것을 지지하는 것으로 해석할 수 있는데, 이는 역사적공분산과 모형공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오 성과를 비교함으로써 보다 명확하게 살펴볼 수 있다. <표 3>에서 120영업일 자료를 사용한 경우를 살펴보면, 공매계약이 없는 경우 역사적공분산 최소분산 포트폴리오는 CM1 모형과는 유의하지 않은 성과차이를 보이지만, CM2, CM3 모형공분산 최소분산 포트폴리오보다 유의하게 높은 평균 표준편차를 보여 여전히 공분산 추정오차가 상당한 영향을 미치는 것으로 보인다. 그러나 보다 장기 수익률자료를 사용하면 공매가능한 경우의 역사적공분산 최소분산 포트폴리오 평균 표준편차는 16%, 15%로 16%~19%의 평균 표준편차를 가지는 CM1, CM3 최소분산 포트폴리오보다 유의하게 낮은 성과를 보이고, CM2 최소분산 포트폴리오와는 유의하지 않은 평균 표준편차, 평균 수익률 차이를 보인다. 또한 장기간 수익률 자료를 사용할수록 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오의 성과가 공매여부에 따라 유의하지 않은 성과차이를 보인다.

위 결과를 정리하면 다음과 같다. 단기 수익률 자료를 이용하여 추정된 역사적공분산은 상당한 추정오차를 가지기 때문에, 모형오차를 가지지만 작은 공분산 추정오차를 가지는 모형공분산 최소분산 포

트폴리오가 더 좋은 포트폴리오 성과를 보였다. 모형공분산 중에서는 CM2(상수체계적위험비율모형) 혹은 공매불가능 제약을 이용한 포트폴리오의 성과가 가장 좋았다. 그러나 장기 수익률 자료를 사용할 경우 역사적공분산의 추정오차가 줄어들어, 모형공분산을 이용한 경우보다 뛰어나거나 동일한 성과를 보였다. 따라서 수익률자료가 충분하다면 복잡한 모형을 쓰지 않고도 충분히 포트폴리오 성과를 높일 수 있는 것으로 보인다. 다만, 포트폴리오 성과는 구성하는 종목 수에 영향을 받기 때문에, 상황에 따라 공분산 추정에 사용되는 자료의 기간이나 모형 선택에 주의가 요구된다.

5. 내재변동성을 이용한 최소분산 포트폴리오 구성

역사적 수익률정보를 이용하여 공분산을 추정하고자 할 경우 필연적으로 추정에 사용되는 기간을 선택하는 문제에 직면하게 되는데 이에 대한 명확한 기준이 없고, 수익률 자료는 실현된 정보로서 미래에 대한 기대를 반영하지 않아서 역사적변동성을 사용하는 것에 논란이 있을 수 있다. 이러한 논란을 피하는 방법으로서 역사적변동성 대신 옵션가격으로부터 관측된 내재변동성을 사용하는 방법이 제시되었다. 실증적으로 Kostakis et al.[14], Demiguel et al.[7], Kempf et al.[13]은 미국 개별 옵션자료에서 구해진 내재변동성을 이용하여 공분산을 구하고, 이를 이용하여 구성된 포트폴리오가 역사적변동성을 이용하여 구성된 경우보다 더 좋은 성과를 보이는 것을 발견하였다. 이 결과는 내재변동성이 역사적변동성의 추정오차를 줄임으로써 최소분산 포트폴리오 성과를 높인 것으로 해석할 수 있는데, 이는 내재변동성이 실현변동성에 대한 예측력을 가진다는 연구[4, 12]결과와 일치한다.

본 연구에서도 이와 유사하게 한국시장에서 거래되는 ELW 가격정보를 이용하여 내재변동성을 구하고, 내재변동성을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오가 더 좋은 성과를 보이는지 살펴보았다.

4) 평균 수익률 차이는 통계적으로 유의하지 않고, 평균 표준편차의 차이는 유의하였다.

5.1 자료설명 및 내재변동성 추정

2005년 12월부터 2013년 6월까지의 ELW 거래가격, 거래수량, 기초자산, 옵션종류, 행사가격의 정보를 이용하였는데, 이는 에프엔가이드(Fnguide)로부터 구하였다. 세부적으로 분석의 편의를 위해 다음과 같은 조건을 부여하였다. 옵션의 종류를 기준으로 중도행사가 가능한 미국형 옵션(American option ELW)이나, 바스켓옵션(Basket option) 및 디지털옵션(Digital option)과 같은 이색옵션(Exotic option)을 제외하고 표준형 콜 옵션의 성격을 가지는 ELW를 대상으로 하였다. 각 시점에서 거래량이 없거나, 만기가 4주 이하 90일 이상인 경우, 가격도(Moneyness)가 0.9 이하 혹은 1.1 이상인 옵션과 거래종가가 20원 이하인 경우는 제외하였다. 무위험 수익률로는 CD rate을 사용하였고, 이는 에프엔가이드(Fnguide)에서 구하였다.

위의 조건에 부합하는 ELW 최종가격을 이용하여 매월 말 식 (22)의 기하평균아시아옵션모형⁵⁾을 사용하여 내재변동성을 추정하였다.

$$C(0) = \exp(-rT_1)E[\max(\sqrt[5]{S_{T-4\Delta t}S_{T-3\Delta t}\cdots S_T} - K, 0)]$$

$$= \exp(-rT_1)\left(\exp\left(M + \frac{V}{2}\right)N\left(\frac{M - \ln(K) + V}{\sqrt{V}}\right) - KN\left(\frac{M - \ln(K)}{\sqrt{V}}\right)\right)$$

단,

$$M = E[\ln^5 \sqrt{S_{T-4\Delta t}S_{T-3\Delta t}\cdots S_T}]$$

5) 개별 주식을 대상으로 발행되는 ELW는 만기상환액이 옵션만기일 이전 특정기간(5영업일) 동안 주식 종가의 산술평균으로 결정되는 산술평균아시아안옵션(Arithmetic Asian option)이다. 그러나 산술평균아시아안옵션 가격은 정확한 해가 알려지지 않아 추정에 상당한 시간이 소요되고, 한 달 이상의 잔여만기가 남은 장기옵션의 경우 기하평균아시아안옵션모형과 산술평균아시아안옵션모형 간의 내재변동성차이가 크지 않아, 편의상 기하평균아시아안옵션의 모형을 사용하였다.

$$= \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - 2\Delta t)$$

$$V = \text{var}[\ln^5 \sqrt{S_{T-4\Delta t}S_{T-3\Delta t}\cdots S_T}] = \sigma^2\left(T - \frac{14}{5}\Delta t\right)$$

$S_{T-x\Delta t}$ 는 옵션 만기 x일 이전의 주가, $C(0)$ 는 0 시점에서 관측되는 Call ELW 가격, T_1 은 관측시점에서 ELW의 상환액을 돌려받는 시간까지 잔여기간, T 는 관측시점에서 ELW의 상환액이 결정되는 시간(옵션 만기), S_{t_0} 는 현재주가에서 만기시점까지 예상되는 배당의 현가를 뺀 값이다. 예상되는 배당현가는 관측시점에서부터 과거 1년 동안의 배당이 향후 동일하게 계속 발생한다고 가정하고 옵션만기까지 예측되는 배당의 현가로 정의하였다.

5.2 내재변동성을 이용한 최소분산 포트폴리오 성과 분석

미국 개별옵션은 기초자산인 주식에 관하여 규칙적인 만기 및 행사가격을 가지는 옵션이 시장에 상장되어 거래된다. 따라서 매 시점 모든 자산에 대해 동일한 만기를 가지는 옵션을 관측할 수 있다. 그러나 한국 ELW는 발행자가 특정주식에 대해 비정기적으로 비정형화된 조건으로 발행되기 때문에, 개별옵션과 달리 매 시점 기초자산에 대해 관측할 수 있는 옵션의 만기 및 행사가격이 일정하지 않다. 따라서 모든 시점에서 기초자산에 대해 동일한 조건의 내재변동성을 구할 수 없는데, 본 연구에서는 만기일자 별 ATM에 가장 가까운 ELW의 내재변동성을 구하고, 그 값들을 단순평균하여 주식의 내재변동성으로 하였다.⁶⁾ 이렇게 추정된 자산 별 내재변동성을 이용하여 모형공분산을 구하고, 이를 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오(내재변동성 포트폴리오)의 성과를 역사적공분산 최소분산 포트폴리오의 성과와 비교하였다. 이는 <표 4>에서 살펴볼 수 있다.

6) 이와 같은 방법뿐 아니라 상장되어 있는 모든 ELW의 내재변동성을 거래금액비중에 따라 가중평균하여 대표 내재변동성을 구한 경우에도 결과는 유사하였다.

〈표 4〉 내재변동성을 이용하여 구한 최소분산 포트폴리오 성과 비교

Hist 60, Hist 120은 각각 60, 120영업일 역사적공분산 최소분산 포트폴리오의 성과를, CM1, CM2, CM3는 ELW 가격으로부터 추정된 내재변동성을 이용한 모형공분산 최소분산 포트폴리오 성과를 나타낸다. 최소분산 포트폴리오 분석대상 종목 중에서 시가총액 상위 50개 종목으로 구성되었다. 모형공분산 최소분산 포트폴리오의 결과 아래의 괄호는 최소분산 포트폴리오의 성과가 역사적공분산 최소분산 포트폴리오(Hist 60, Hist 120)의 성과와 동일한 평균값을 가지는지 테스트한 p-value이다.

	공매가능		공매불가능	
	평균 표준편차	평균 수익률	평균 표준편차	평균 수익률
CM1	0.17 (0.01) (0.52)	-0.02 (0.88) (0.18)	0.15 (0.43) (0.29)	0.01 (0.66) (0.44)
CM2	0.16 (0.01) (0.31)	0.01 (0.94) (0.29)	0.15 (0.47) (0.33)	0.00 (0.64) (0.42)
CM3	0.16 (0.01) (0.28)	-0.02 (0.87) (0.16)	0.15 (0.47) (0.33)	0.00 (0.63) (0.41)
Hist 60	0.31	0.00	0.14	0.05
Hist 120	0.18	0.12	0.14	0.17

공매가 가능한 경우, 내재변동성을 이용하여 구성한 최소분산 포트폴리오는 16%에서 17%에 이르는 평균 표준편차를 가지는데, 이는 모든 모형에서 60영업일 역사적공분산을 사용한 최소분산 포트폴리오보다 유의하게 낮은 평균 표준편차, 유의하지 않은 평균 수익률 차이를 보인다. 그러나 120영업일 역사적공분산을 사용하면 모든 경우 유의하지 않은 성과차이를 보인다. 공매불가능 제약이 있는 경우에는 역사적공분산을 이용한 최적포트폴리오가 14%의 평균 표준편차를 가짐으로써 15%의 평균 표준편차를 보이는 내재변동성 최소분산 포트폴리오보다 낮은 평균 표준편차를 보인다. 그러나 그 차이는 통계적으로 유의하지 않고, 평균 수익률 역시 모든 경우에 유의하지 않은 차이를 보였다.

그러나 이러한 비교는 역사적변동성과 내재변동성의 차이뿐 아니라 공분산 차이에 의한 영향도 포함되어 있기 때문에, 변동성 추정에 의한 영향을 살펴보기 위해 역사적변동성을 이용한 포트폴리오를 구성하고 그 성과를 비교해보았다. 이는 <표 5>에 나타나 있다.

Panel A는 60영업일 역사적변동성과 내재변동

성을 이용하여 구성한 모형공분산 최소분산 포트폴리오 성과를 보여준다. 역사적변동성을 기반으로 구성한 포트폴리오의 평균 표준편차는 최소 14.3%에서 최대 16.8%의 값을 보이고, 내재변동성을 이용한 포트폴리오는 15.1%에서 16.9%의 평균 표준편차를 보인다. 그러나 각각의 모형에서 두 변동성의 차이는 모두 통계적으로 유의하지 않았다. 평균 수익률은 역사적변동성과 내재변동성을 이용한 포트폴리오가 각각 2.4%~5%, -2.4%~1.3%을 보여 역사적변동성을 이용한 경우가 더 높지만, 이 역시 통계적으로 유의하지 않았다. Panel B는 120영업일 역사적변동성을 이용한 분석결과이다. 120영업일 역사적변동성 최소분산 포트폴리오는 14.3%에서 17.7%의 평균 표준편차, 1.8%에서 5.1%의 평균 수익률 값을 보여, 변동성 추정에 사용된 기간에 따른 성과 차이가 크지 않았다. 또한 모든 경우에 내재변동성과 역사적변동성을 사용한 최소분산 포트폴리오 간에 유의하지 않은 성과차이를 보였다. 이러한 결과는 표에 나타내지는 않았지만 보다 장기 수익률 자료를 사용한 경우에도 동일하였다.

〈표 5〉 내재변동성을 이용하여 구한 최소분산 포트폴리오 성과 비교

아래의 표는 역사적변동성과 내재변동성을 이용하여 추정된 모형공분산을 추정하고, 이를 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과를 나타낸다. 최소분산 포트폴리오는 분석대상 종목 중에서 시가총액 상위 50개 종목으로 구성되었다. Panel A는 과거 60영업일 수익률 자료를 사용하여 역사적변동성을 추정한 경우를 나타내고, Panel B는 과거 120영업일 수익률 자료를 사용하여 역사적변동성을 추정한 경우의 결과이다. 각각 모형 별 내재변동성과 역사적변동성을 이용한 최소분산포트폴리오의 성과 옆의 괄호는 두 최소분산 포트폴리오의 성과가 서로 같은지를 테스트한 p-value이다.

Panel A : 60영업일 자료 사용

	평균 표준편차			평균 수익률		
	내재변동성	역사적변동성	p-값	내재변동성	역사적변동성	p-값
CM 1	0.169	0.168	(0.94)	-0.022	0.028	(0.63)
CM 1_restriction	0.152	0.146	(0.51)	0.007	0.034	(0.77)
CM 2	0.165	0.155	(0.27)	0.013	0.050	(0.66)
CM 2_restriction	0.151	0.143	(0.35)	0.004	0.030	(0.77)
CM 3	0.164	0.162	(0.87)	-0.024	0.024	(0.63)
CM 3_restriction	0.151	0.144	(0.44)	0.003	0.030	(0.76)

Panel B : 120영업일 자료 사용

	평균 표준편차			평균 수익률		
	내재변동성	역사적변동성	p-값	내재변동성	역사적변동성	p-값
CM 1	0.169	0.177	(0.46)	-0.022	0.032	(0.61)
CM 1_restriction	0.152	0.148	(0.67)	0.007	0.018	(0.91)
CM 2	0.165	0.153	(0.19)	0.013	0.051	(0.66)
CM 2_restriction	0.151	0.143	(0.34)	0.004	0.034	(0.73)
CM 3	0.164	0.163	(0.94)	-0.024	0.036	(0.54)
CM 3_restriction	0.151	0.146	(0.55)	0.003	0.031	(0.76)

위 <표 4>와 <표 5>의 결과를 정리하면 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 첫째, ELW 내재변동성을 사용하여 구해진 모형공분산 최소분산 포트폴리오는 역사적변동성을 사용한 경우보다 좋거나 동일한 성과를 보인다. 둘째, 역사적변동성을 사용하여 구성된 포트폴리오는 내재변동성을 사용하여 구성된 포트폴리오와 유의하지 않은 차이를 보였다. 즉, 포트폴리오 관점에서는 ELW에 내재된 내재변동성을 사용하는 것이 역사적변동성에 포함되어 있는 추정오차를 유의미하게 줄이지 못하는 것으로 볼 수 있다.

이러한 결과는 미국 개별옵션으로부터 구한 내재변동성을 이용한 포트폴리오가 역사적변동성을

이용한 경우보다 좋은 성과를 보이는 것과 다르다. 이에 대한 원인은 미국 개별옵션이 역사적변동성보다 미래변동성에 대한 더 정확한 정보를 가지고 있는 것과 달리, 한국 ELW 시장에서 관측되는 내재변동성이 역사적변동성에 비해 정보우위에 있지 않기 때문이거나, 혹은 미국 개별옵션과 달리 만기가 일정하지 않게 발행되는 ELW 내재변동성을 가중평균함으로써 발생한 계산의 부정확성 때문일 수도 있다. 보다 정확한 원인을 알아내기 위해서는 다른 연구가 병행되어야 할 것이나, 이는 본 연구의 범위에 벗어나는 것으로 판단하여 추가 분석하지 않았으며, 추후 연구가 필요한 부분이다.

6. 결 론

본 연구에서는 역사적공분산 이외 공분산 추정오차를 줄이는 다양한 추정방법을 제시하고, 각각의 추정된 공분산을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과를 비교함으로써 공분산 추정 방법의 성과를 평가하였다. 분석에 사용된 공분산은 역사적공분산, 모든 자산들의 상관계수를 상수로 추정하는 평균상관계수모형(CM1), 자산의 수익률이 시장모형에 의해 설명된다는 가정과 체계적위험과 비체계적위험 간의 비율에 관한 가정을 추가하여 구한 상수체계적위험비율모형(CM2)과 베타비례체계적위험비율모형(CM3)을 제시하였다. 또한 각각의 추정모형에 대해 공매가능여부에 따른 추가제약을 부과하여 총 여덟 가지 방법으로 구성된 최소분산 포트폴리오의 성과를 살펴보았다. 마지막으로, ELW 가격자료에서 개별주식의 내재변동성을 추정하고, 이를 이용한 포트폴리오가, 미국시장의 연구결과와 같이, 역사적변동성을 이용한 포트폴리오보다 더 좋은 성과를 보이는지 살펴보았다.

분석결과는 다음과 같다. 첫째, 최소분산 포트폴리오의 평균 수익률은 모형에 따라 유의한 차이를 발생시키지 않았으나 표준편차는 모형에 따라 유의한 차이를 보였다. 둘째, 역사적공분산을 이용한 최소분산 포트폴리오의 표준편차는 구성자산 수와 역사적공분산 추정을 위해 사용한 수익률자료의 기간에 영향을 받았다 셋째, 제시된 모형 중에서 CM2 모형(상수체계적위험비율모형) 공분산을 이용하거나 공매불가능 제약을 부과한 경우의 최소분산 포트폴리오가 가장 낮은 외표본 표준편차를 보였다. 넷째, 장기간 수익률자료로부터 추정된 역사적공분산을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오는 모형공분산을 이용한 경우보다 뛰어나거나 동일한 성과를 보였다. 따라서 수익률자료가 충분하다면 복잡한 모형을 쓰지 않고도 충분히 포트폴리오 성과를 높일 수 있는 것으로 보인다. 다만, 포트폴리오 성과는 구성하는 종목 수에 영향을 받기 때문에, 상황에 따라 공분산 추정에 사용되는 자료의 기간이나 모형 선택에 주의가 요구

된다. 마지막으로, ELW 가격으로부터 추정된 내재변동성을 이용하여 구성된 최소분산 포트폴리오는 개별 옵션을 이용한 미국의 연구결과와 달리 역사적변동성을 이용한 최소분산 포트폴리오와 유의한 차이를 보이지 않음으로써, 내재변동성이 추정오차를 유의하게 감소시키지 않는 것으로 보인다.

참 고 문 헌

- [1] 이창수, 이광봉, “모수 추정치의 오차가 포트폴리오 최적성에 미치는 효과에 관한 연구”, 『금융공학연구』, 제1권(2002), pp.1-13.
- [2] Chan, L.K.C., J. Karceski, and J. Lakonishock, “On Portfolio Optimization : Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model,” *Review of Financial Studies*, Vol.12, No.5 (1999), pp.937-971.
- [3] Chopra, V.K. and W.T. Ziemba, “The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice,” *Journal of Portfolio Management*, Vol.19, No.2(1993), pp.6-11.
- [4] Christensen, B.J. and N.R. Prabhala, “The relation between implied and realized volatility,” *Journal of Financial Economics*, Vol.50, No.2(1998), pp.125-150.
- [5] DeMiguel, V., L. Garlappi, and R. Uppal, “Optimal Versus Naive Diversification : How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy?,” *Review of Financial Studies*, Vol.22, No.5 (2009a), pp.1915-1953.
- [6] DeMiguel, V., L. Garlappi, and R. Uppal, “Generalized approach to portfolio optimization : Improving performance by constraining portfolio norms,” *Management Science*, Vol.55, No.5(2009b), pp.798-812.
- [7] DeMiguel, V., Y. Plyakha, R. Uppal, and G. Vilkov, “Improving portfolio selection using

- option-implied volatility and skewness," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.48, No.6(2013), pp.1813-1845.
- [8] Elton, E.J., M.J. Gruber, and J. Spitzer, "Improved Estimates of Correlation Coefficients and their Impact on Optimum Portfolios," *European Financial Management*, Vol.12, No.3(2006), pp.303-318.
- [9] Fu, F., "Idiosyncratic risk and the cross-section of expected stock returns," *Journal of financial Economics*, Vol.91, No.1(2009), pp.24-37.
- [10] Green, R.C. and B. Hollifield, "When will mean-variance efficient portfolios be well diversified?," *Journal of Finance*, Vol.47, No.5(1992), pp.1785-1809.
- [11] Jagannathan, R. and T.M.T. Ma, "Risk Reduction in Large Portfolios : Why imposing the wrong constraints helps," *Journal of Finance*, Vol.58, No.4(2003), pp.1651-1684.
- [12] Jiang, G.J. and Y.S. Tian, "The model-free implied volatility and its information content," *Review of Financial Studies*, Vol.18, No.4(2005), pp.1305-1342.
- [13] Kempf, A., O. Korn, and S. Sabning, "Portfolio optimization using forward-looking information," *Review of Finance*, 2014.
- [14] Kostakis, A., N. Panigirtzoqlou, and G. Skiadopoulos, "Market timing with option-implied distributions : A forward-looking approach," *Management Science*, Vol.57, No.7(2011), pp.1231-1249.
- [15] Ledoit, O. and M. Wolf, "Honey, I shrunk the sample covariance matrix," *Journal of Portfolio Management*, Vol.30, No.4(2004), pp.110-119.
- [16] Skintzi, V.D. and A.N. Refenes, "Implied correlation index : A new measure of diversification," *Journal of Futures Markets*, Vol.25, No.2(2005), pp.171-197.