대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 4, 567~ 584. Nov 2013

함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정 분석
- 직관적 지도의 보완을 중심으로 -

정 연 준* · 김 재 홍**

학교수학에서 함수의 연속성은 그래프를 이용하여 직관적으로 지도된다. 이는 일반적인 지도 방식이지만, 여러 연구자들이 이에 대한 문제를 제기하고, 형식적 측면이 강화된 방안이 대안으로 제시되고 있다. 본 논문은 함수의 연속성의 역사적 발달 과정을 분석하여, 직관적 지도를 보완하기 위하여 고려해야 할 시사점을 제시하는 것을 목적으로 한다. 역사적 분석 결과, 세 가지 관점에서 연속적인 변화를 분석하여 함수의 연속성에 대한 개념적 이해의 토대를 풍부하게 하고, 함수의 연속성 정의의 기반이 되는 연속적인 변화에 대한 관점을, 다른 관점과 함수 관계의 여러 표현 방식과의 관계를 종합하는 과정을 거치는 것을 직관적 지도를 위한 시사점으로 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

학교 수학에서 함수의 연속성 지도는 그래프의 한 점에서 끊어짐과 이어짐의 조건을 분석하여 함수의 연속 정의를 유도하는 것을 중심으로 한다(교육과학기술부, 2008, p.185). 이러한 지도 방식은 널리 채택된 것이며, 기하적 모델을 이용하여 함수의 연속성을 지도한다는 점에서 직관적 지도법이라 할 수 있다. 한편 학생들이 연속함수의 그래프는 ‘틈이 없는’, ‘한 조각’의 곡선이라는 그래프의 연결성에 강하게 연결된 이미지를 연속함수에 부여하고 있다는 점이 여러 연구에서 확인되어 왔다(Bezuidenhout, 2001; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Tall & Vinner, 1981; 박달원 · 홍순상 · 신민영, 2012; 이경화 · 신보미, 2005; 이진영, 2011). 성취도가 매우 높은 학생들을 포함하여 많은 학생들이, $y=f(x)$ 이 불연속인 점을 지닌 함수로 분류하며 연속함수는 끊어지지 않고 하나로 이어져 있는 그래프를 지녀야 한다고 인식한다는 것이 이들 연구에서 확인되었다.

몇몇 연구에서 이러한 상황이 과도한 기하적 이미지의 영향으로 간주되고 수학적 엄밀성과 정확성이 보다 강화된 지도법이 대안으로 제안되었다. 김동보(1983)는 대학수학의 연속함수의 정의의 의미로 학교수학의 연속성 지도를 보완하는 방안을 제시하였다. 박달원 · 홍순상 · 신민영(2012)은 정의역 끝점에서의 연속성 정의 지도에서 나타나는 문제점을 지적하며 정의역의 끝점에서도 함수의 연속성 정의가 문제없이 적용될 수 있도록 연속성 정의가 제시되어야 한다는 것과 함수의 연속성 정의가 함수의 정의역에서 이루어진다는 점이 명확하게 지도되어야 한다는

* 충남대학교, yjjoung@cnu.ac.kr (제1 저자)
** 한국교육과정평가원, masshong@kice.re.kr (교신저자)

점을 함수의 연속성 지도에서 개선 사항으로 제시하였다. 이진영(2011) 역시 이와 관련된 주제들이 교과서마다 다르게 제시되어 있는 부분들이 있다는 것을 지적하며 이러한 부분들이 일관성 있게 제시되어야 한다고 주장하였다.

Raman(2004)은 미국에서 사용되는 고등학교의 pre-calculus 교재, 대학교의 미적분 교재와 해석학 교재 등 세 수준의 교재에서의 함수의 연속성 지도 내용을 정의의 유형과 적용, 두 차원을 중심으로 비교・분석하였다. Raman은 다른 수준의 교재들이 전혀 다른 방식으로 함수의 연속성을 지도하고 있으며, 그래프의 연결성에 기반한 연속성에 대한 비형식적 이해와 '$\epsilon-\delta$'에 기반한 형식적인 정의가 잘 연결되지 못한다는 점을 지적하며, 이것이 함수의 연속성 이해에 문제가 될 수 있다고 주장하였다. 그에 의하면, 고등학교에서 연결성에 기반하여 지도되었던 내용이 미적분 수준에서는 별다른 설명 없이 '$\epsilon-\delta$'에 기반한 정의를 적용하는 것으로 대체된다.

이러한 상황들은 학교수학에서 함수의 연속성을 직관적으로 지도하지만 비형식적 혹은 직관적 설명과 인식이 연속성의 정의 이해에 어떻게 연결될 수 있는지에 대한 연구가 부족하다는 것을 시사한다. 함수의 연속성과 관련하여 나타나는 학생들의 기하적 이미지에 고착된 반응들은 학교수학에 포함되어 있는 비형식적인 내용과 수학의 형식적 정의가 잘 연결되지 못한 결과라고 할 수 있을 것이다. 연속성 지도 개선 방안들은 수학적 정확성의 개선에 초점을 맞춘 것이며, 직관적 지도에서 중요한 역할을 하는 연속성에 대한 비형식적 직관 혹은 이해에 대한 논의는 거의 담고 있지 않다. 직관적 지도가 비형식적 직관과 형식적 지식의 연결을 시도하는 것이라는 점을 인정한다면, 이러한 대응들이 지닌 제한점은 분명해 보인다. 비형식적 직관과 형식적인 정의의 관계 문제를 지적한 Raman(2004)도 이에 대하여 구체적으로 설명하지 않았다.

본 연구자들은 함수의 연속성의 역사적 발달 과정을 분석하여, 직관적이고 비형식적 인식과 형식적 지식 사이의 보다 건전한 연결 관계에 대한 시사점을 제안하고자 한다. 수학적 개념은 일반적으로 오랜 시간을 거쳐서 발달한다. 초기 단계에서는 비형식적 맥락에서 직관적 인식을 통해서 수학적 개념이 드러나고, 다양한 상황과 연결되면서 점진적으로 의식화되고, 최종적으로는 형식화되며 비형식적인 맥락, 직관적 인식과 개념의 정의와의 관계가 감추어진다. 본 논문에서는 함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정을 분석하여, 형식화된 정의 아래 감추어진 비형식적 맥락과 직관적 인식의 다양한 양상을 드러내고, 이를 통해서 비형식적 직관과 형식적 지식 사이의 관계를 강화하여 함수의 연속성의 직관적 지도를 개선하는데 필요한 시사점을 제시하고자 한다.

II. 함수의 연속성 개념의 역사적 발달과정

몇몇 연구자들에 의해 함수 연속성의 역사가 연구된 바 있다. Jourdain(1913), Grabiner(2005), Sierpinska(1994) 등은 현대적인 방식으로 함수의 연속성이 정의된 19세기 초 Cauchy와 그와 인접한 시기에 진행된 수학적 논의들을 다루었다. 함수 개념의 발달은 운동 현상 곧 연속적인 변화에 대한 연구를 통해서 촉진되었다(박교식, 1992; 정영옥, 1999; Kleiner, 1989). 이것은 함수의 연속성 개념의 발달이 연속적인 변화에 대한 이해의 발달과 연결되어 있다는 것을 뜻한다. Schubring(2005)은 무한소와 극한 개념의 역사적 발달 과정을 논의하면서 연속적인 변화에 대한 이해의 발달 과정을 논의하였다. 본 장에서는 연속적인

변화에 대한 이해가 함수의 연속성 개념의 직관적 이해를 구축하는데 기여한 것으로 해석하고, 이러한 관점을 중심으로 하여 선행 연구 결과를 종합하고 함수의 연속성의 역사적 발달 과정을 조망하겠다. 이러한 조망 과정은 기본적으로 연속적인 변화에 대한 비형식적이고 직관적인 인식과 형식화된 수학적 논의의 관계를 추출하는 것을 목적으로 한다.

1. 연속성의 의식화(고대 그리스 시대)

연속성에 대한 명확한 인식은 고대 그리스의 초기부터 발견된다. Pythagoras 학파는 공간과 시간이 연속적으로 전개된다고 설명한 바 있다(Boyer, 1991, pp.74-75). 고대 그리스인들은 선분의 길이와 평면도형의 넓이와 같은 기하적 대상들의 크기가 연속적으로 변한다고 생각하였다. 이들은 주어진 원과 넓이가 동일한 정사각형을 작도하는 법을 찾는데 성공하지 못하였지만 그러한 정사각형이 존재한다는 점을 의심하지 않았다. 정사각형의 넓이가 연속적으로 변하면서 증가한다고 믿었기 때문일 것이다.

Aristotle은 연속성의 체계적인 개념화를 제시하였다. Aristotle은 임의로 분할될 수 있다는 것을 연속성을 설명하는 기본 성질로 간주하였다(Schubring, 2005, p.154). 그는 모든 연속체는 부분들로 무한정 분할될 수 있으며, 분할된 부분은 분할되기 이전의 것과 동질적이며, 공간과 시간, 운동 등이 연속적인 양에 해당한다고 하였다. 그는 이러한 설명에 더하여, 연속성을 설명하는 두 가지 개념을 제시하였다(Schubring, 2005, pp.155-6). 계열(succession)은 두 원소가 잇달아 있으며 둘 사이에 동질인 다른 원소가 존재하지 않는 것을 말하며, 접촉(contiguity)은 한 계열을 이루는 두 원소가 서로 닿아 있는 상태를 말한다. Aristotle에 의하면, 연속하다는 것은 계열인 상태에 더하여 전체를 이루는 부분들 사이의 경계가 인식되지 않고 부분들이 드러나지 않은 채 하나의 동일한 전체를 이루는 상태에 있는 것에 해당한다. 부분들로 나눌 수 있지만, 분할을 하지 않는다면 그러한 부분들이 드러나지 않는다. 이러한 Aristotle의 연속성 개념화는 기하적 직선에 대한 직관을 바탕으로 한 것이다(Boyer, 1959, p.44; Ferraro, 2001, p. 550). 한편 Aristotle은 공간의 이동과 같은 연속적인 변화에 대하여 다음과 같이 언급하였다.

> 변화가 일어나는 정도는 연속적이다. 한 물체가 C에서 D로 이동했다고 하자. 그러면 CD가 분할될 수 없다면, 부분을 지니고 있지 않는 두 가지가 잇달아 있는 것인데, 둘 사이의 공간이 크기를 지니고 있고 따라서 한계 없이 나뉠 수 있기 때문에, 이는 불가능하다. 그래서 어떠한 주어진 변화를 실행하기 전에 대상은 셀 수 없이 많은 변화를 거쳐야 한다 (Schubring, 2005, p.156)에서 재인용).

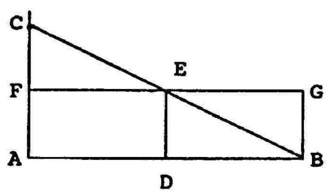
연속성에 대한 개념화를 이용하여 연속적인 변화를 설명한 것이다. 이러한 설명에서 연속적인 변화가 무한히 많은 변화를 내포하고 있다는 점과 암묵적이지만 중간의 모든 값을 거쳐야 한다는 점이 지적되고 있다(Schubring, 2005, p.156).

2. 연속적인 변화 현상의 탐구(14~17세기 초)

14~17세기에 기하적 도형을 이용하여 운동의 양적인 규칙성을 기술하는 연구들이 진행되었다(김영식 2001, p.64). 이로써 기하적인 연속성을 이용하여 연속적인 변화의 양적 규칙성이 설명되기 시작한 것이다.

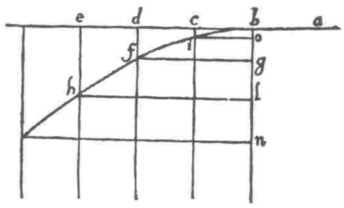
14세기 Oxford 대학 Merton 칼리지의 역학자들은 속도가 변할 때 이동 거리의 증가 규칙을 연구하였고, 이들의 연구는 프랑스의 Nicole

Oresme에 이어지면서 현재의 시간-속도 그래프가 등장하게 된다(Grant, 1992; Sherry, 1982). Oresme은 Merton 학파의 연구 결과를 기하학적으로 다루는 방법, 곧 현재의 시간−속도 그래프를 고안하였다. Oresme은 연속적 변화를 기하적 도형과 연결하여, 등속도 운동과 등가속도 운동의 시간-속도 그래프 아래의 넓이가 이동 거리에 해당한다는 것을 보였다(Boyer, 1959, p.81). 등가속도 운동의 경우 속도가 순간적으로 존재하는 한편 속도의 변화가 연속적으로 이루어지며, 이동거리 역시 연속적으로 증가한다. Oresme의 기하적 방법은 등가속도 운동의 속도와 거리의 연속적인 변화가 시간-속도 그래프에서 나타나는 삼각형의 높이와 넓이의 연속적인 변화에 대응한다는 것에 주목한 것이다(Sherry, 1982, pp.89-92). 운동 현상과 이차원 도형 사이에 동형성이 존재하며 이를 통해 기하학 도형의 넓이를 이용하여 거리의 증가 현상을 다룰 수 있다는 것을 보여준 것이다.



[그림 1] Oresme의 시간-속도 그래프

넓이와 거리 증가의 동형성에 대한 보다 명확한 진술은 Galilei에게서 발견된다(Sherry, 1982, pp.100-110). Oresme은 등가속도 운동이 중간 시점의 속도로 동일한 시간 동안 등속도 이동한 거리와 동일하다는 점을 밝히는데 머물렀다. 그런데 Galilei는 순간 속도와 거리의 증가를 넓이가 선분 곧 불가분량으로 이루어졌다는 아이디어를 사용하여 설명하였다. 그의 설명에 의하면, 시간—속도 그래프에서 그래프의 높이는 순간적인 이동 거리를 나타내며, 선분들의 합인 그래프 아래의 넓이는 순간적인 이동 거리의 합인 전체 이동거리가 된다. 이러한 아이디어를 통해서 그는 Oresme에서 한 걸음 더 나아가 등가속도 운동의 이동 거리가 시간의 제곱에 비례한다는 결론을 제시하였다. 또한 그는 투사체의 운동이 등속도의 수평 운동과 등가속도로 변하는 수직 운동으로 이루어져 있으며 따라서 투사체가 포물선을 그리며 움직일 것이라는 점을 유도하였다. Galilei의 이러한 연구는 Torricelli, Barrow 등에 의해서 일반화된다(Boyer, 1959, pp.130-132). 속도가 시간의 거듭제곱에 따라서 변하는 운동의 이동거리가 $y=x^n$의 그래프 아래의 넓이를 통해서 설명된 것이다. 곧 기하적 도형의 넓이를 이용하여 이동 거리가 시간에 대한 함수로 표현되었다.



[그림 2] 투사체의 궤도

3. 연속성 개념과 함수 개념의 발달 (17~18세기 중반)

16세기 후반 이후 등가속도 운동 등 연속적인 변화에 대한 이해가 발달하였는데, 17-8세기에는 연속성에 대한 이해가 더욱 확장되고, 연속적인 변화 혹은 증가 아이디어를 바탕으로 하는 변수와 함수 개념이 발달하였다.

연속성에 대한 근대적 논의는 Leibniz에서 시작된다(Schubring, 2005). Leibniz는 형이상학적 관점에서 '자연은 비약하여 진행되지 않는다'는 연

속성의 원리를 천명하고 이를 토대로 자신의 철학을 전개하였는데, 이러한 인식이 여러 수학자들에게 영향을 주었고 근대적인 연속성 논의의 출발점이 되었다. 강체의 충돌에 대한 사고 실험이 이러한 상황을 보여주는 대표적인 사례이다. 충돌 후 진행되는 물체의 운동에 대한 사고 실험 과정에서 강체는 순간적인 급격한 운동 변화를 초래한다는 점이 인식되었다. 크기가 다른 두 강체가 정면으로 충돌하면 크기가 작은 강체의 운동 방향이 크기가 큰 강체의 운동 방향으로, 곧 이전 운동 방향의 반대쪽으로 바뀌어야 한다. 곧 속도가 순간적으로 바뀌어야 하는 것이다. 연속성의 원리를 출발점으로 삼은 Leibniz는 이로부터 강체가 존재하지 않는다는 결론을 이끌어 내었다. 이 논의는 Johann Bernoulli, Boscovich 등에 의해서 받아들여졌다. 물체의 충돌에 대한 논의에서 Johann Bernoulli는 연속성의 원칙에 위배된다는 이유에서 절대적 강체를 거부하고 변형 과정이 운동과 충돌에서 변형되면서 전이 과정과 중간 단계를 허용하는 탄성체만을 인정하였다. 충돌에서 나타나는 속도의 변화가 중간의 모든 값을 거치면서 변하는 연속적인 변화이어야 한다고 가정한 것이다. Bernoulli의 영향을 받은 Boscovich 역시 중간의 모든 값을 거친다는 성질을 이용하여 연속성의 법칙 곧 연속적인 변화를 설명하였다.

> 여기에서 다룰 연속성의 법칙은 모든 양이 하나의 크기에서 다른 크기가 될 때 동일한 집합의 모든 중간 크기를 거쳐야 한다는 아이디어로 이루어져 있다. 일반적으로 사용되는 중간 단계 혹은 과정들로 통로가 이루어졌다는 말 역시 동일한 생각을 지닌다. 혹은 하나의 단계는 한 순간에 대응하며, 연속적인 사간의 작은 범위에 따라서 증가하거나 감소한다 ((Schubring(2005, pp.179-180)에서 재인용).

Schubring에 의하면, Leibniz는 연속성을 비약하지 않는 것으로 설명하였는데, 다른 수학자들은 중간값 성질 곧 연속성이 중간의 모든 단계 혹은 값을 거치는 것으로 설명하였다는 점에서 미묘한 차이점이 있었다. 이러한 차이에도 불구하고, 강체의 충돌에 대한 사고 실험은 연속성에 대한 이해가 보다 의식화되어 작용한 사례라고 할 수 있다.

17, 18세기에는 변량과 함수 개념이 발달하였는데, 여기에는 연속성에 대한 이해가 바탕이 되었다. 17세기에 해석 기하학을 발전시키고 미적분을 개척하던 수학자들은 변량과 함수 개념을 의식화하였다(Ferraro, 2001; Kleiner, 1989). 변량 개념은 Descartes와 Fermat의 해석 기하 연구에서 사용되었고 Newton의 연구에서 폭넓게 사용되었다. 이 당시 변량은 가로 축과 세로 축의 길이, 호의 길이, 곡선과 x축 사이의 넓이와 같은 연속적으로 변하는 기하적 양들을 나타냈다. 곡선의 접선 작도 혹은 도형의 넓이 계산 상황에서 관련된 변량들 사이의 관계를 설명하면서 함수 개념이 명시화된다. Leibniz는 곡선의 변량과 어떤 관계를 가지는 또 다른 기하적 변량을 지칭하기 위해 '함수'라는 용어를 사용하였다. 18세기 초에 들어서며 변량과 함수 개념에 좀 더 형식적 의미가 부여되기 시작하였다(Ferraro, 2001). 급수 이론이 발달하여 여러 기하적 양들과 곡선을 일괄적인 대수적 조작을 통하여 다룰 수 있게 되었고, 미적분에서는 이러한 식을 지칭할 명칭이 필요하였다. 함수가 그러한 식을 나타내는 용어로서 사용되었는데, 이 과정을 거치면서 변량과 함수 개념은 추상적이면서, 관계적인 의미로 변화하였다. 즉 기하적 대상을 표현하는 해석적 식은 점차적으로 변량들 사이에 성립하는 관계를 표현하고 조작하는 도구로 인식되었으며, 이를 통해 변량과 함수 개념은 보다 일반화되고 추상적인 일반적인 의미를 지니게 되었다. 이전에 변량은 기하적 대상을 지칭하는 것이었지만

18세기의 변량은 추상적인 양을 지칭하였고 함수는 변량들 사이의 관계로서 간주되었다. 18세기 후반 Lagrange는 다음과 같이 언급하였다.

> 함수를 구성하는 모든 변량들 사이에 성립하는 관계로서 함수를 조사할 때는, 변량을 추상적인 것으로 하고 이 변량이 함수에 들어가는 방식, 즉 그 자체와 다른 양들과 어떻게 결합되는지 만을 고려한다.(Ferraro(2001, p.541)에서 재인용)

대수적 식은 변량과 다른 변량들 사이의 관계를 설명하는 것이자 조작 도구이었다(Ferraro, 2001, p.550). 변량을 조작할 때 중요한 것은 다른 변량들과의 관계이지만, 18세기 수학자들은 변량에 해당하는 대상들의 성질 중, 연속적으로 증가하거나 감소하는 성질을 변량의 본질로 보았다. L'hopital은 변량의 기본 성질 하나를 '연속적으로 증가하거나 감소할' 수 있는 것으로 제시한 바 있으며, 이러한 아이디어는 미적분 연구자들에게 널리 받아들여졌다(Schubring, 2005, p.193). 변량 사이의 '관계'가 강조되기 시작하였지만 이 시기의 함수 개념은 대수적으로 조작 가능한 관계를 지칭하는 것이어서 현대적인 의미의 함수 개념은 아니다. 그러나 변수 사이의 종속 관계가 명확해 졌다는 점에서 이전 시대의 함수 개념에서 진일보한 것이었다.[1)]

4. 함수의 연속성의 의식화 (18세기 후반 ~19세기 초)

17, 8세기의 연속성에 대한 직관적 인식은 연속적으로 증가하는 기하적·역학적 양 관념과 강하게 연결되어 있어서 수학적 개념으로 형식화되지 못하였다(Schubring, 2005, p.86). 18세기 후반 이후 전형적이지 않은 함수들의 행동을 논의하게 되면서 함수의 연속성의 기준 문제가 표면화되고 함수의 연속성에 대한 개념화가 진행된다.

함수의 성질로서 '연속성'이 논의되게 된 것은 18세기 중반에 진행된 진동하는 현의 일반해에 관한 논쟁이었다(Jourdain, 1913; Youschkevich, 1976). 1747년 D'Alembert는 이 문제에 대한 편미분방정식을 세우고 일반해를 얻었으며, 현의 모양을 표현하는 함수는 연속성의 법칙을 따르는 것으로 보았다. Euler는 물리적 관점에서 현을 잡아당길 경우, 현에 뾰족한 부분이 생기며 따라서 현의 모양은 각 연속적으로 연결되어 있는 곡선들이 결합된 형태가 되며, 연속된 부분 곡선들을 표현하는 여러 식으로 표현되며 이러한 함수를 미적분의 대상으로 보아야 한다고 하였다. 이러한 논쟁을 거친 이후 Euler는 1748년 자신의 저서에서 함수를 하나의 해석적 식으로 표현되는 '연속 함수'와 부분 곡선들로 이어져 있는 혹은 여러 해석적 식들로 구성된 함수를 '불연속 함수'로 구별하였다(Jourdain, 1913; Youschkevich, 1976). Euler의 기준에 따르면 그래프가 모두 이어져 있다고 해도, 구간별로 다른 관계식에 의하여 정의되는 함수는 불연속 함수이다. Euler의 연속함수 분류는 Aristotle의 연속성 관념을 곡선이 아니라 곡선을 결정하는 식에 적용한 것이다(Ferraro, 2001). Euler는 대수적 유일성 기준을 만족하는 함수, 즉 전체에서 하나의 해석적 표현 혹은 식에 의해 함수값이 결정되는 함수를 연속함수로 간주하고, 그러한 유일성이 파괴된 함수 즉 함수값을 결정하는 식이 구간에 따라서 변하는 함수를 불연속함수로 간주하였다.

1) Euler는 1755년 다음과 같이 함수를 정의하였다. "만약, 한 양이 다른 양에 의존하여 다른 양이 변하면 처음 양도 변할 경우, 처음의 양을 다른 양의 함수라고 한다. 이것은 매우 포괄적인 개념이며 한 양이 다른 양에 의해 결정될 수 있는 모든 방식을 포함하고 있다. 따라서 만약 x가 변량을 나타낸다면, x에 의존하는 모든 양들은 어떠한 방식으로 결정되든 x에 대한 함수라고 한다(Klenier(1989, p.288)에서 재인용)."

그런데 쌍곡선은 서로 떨어져 있는 두 부분으로 이루어져 있어, Aristotle의 기준을 적용하면 불연속이다. Euler의 기준에 의하면 그래프가 두 결레 쌍곡선으로 서로 떨어져 있지만 $y=\frac{1}{x}$ 는 하나의 식으로 정의되기 때문에 연속함수로 간주된다(Youschkevich, 1976, pp.67-68). 이러한 분류는 곡선이 아니라 곡선을 결정하는 대수식을 보다 본질적인 것으로 간주한 결과이다. 이것은 대상이 나뉘어져 있지 않다는 것을 판단하는 기준으로 곡선을 이용하는 것과 곡선을 생성하는 해석적으로 표현된 함수 관계를 이용하는 것에서 차이가 날 수 있다는 것을 드러낸 사례이다. 곧 연속성은 관찰이 아니라 개념적 문제가 된 것이다(Ferraro, 2001).

연속함수에 대한 Euler의 구분은 18세기 후반기 상당한 영향력을 미쳤으나, 19세기 이후 그러한 구분이 무의미하다는 것이 확인되었다. 18세기 후반 이후 급수 이론이 더욱 발달함에 따라 하나의 해석적 식으로 표현된 함수가 분할된 함수식으로 표현될 수 있다는 것도 발견된 것이다 (Grattan-Guninness 2000). 예를 들어

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

는 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 또는, $h(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^2+t^2}\,dt$와 일치한다. 이러한 사례는 식의 유일성이 함수의 본질적 성질이나 조건이 되지 못한다는 것을 드러내었고, 식의 유일성으로 연속함수를 판단하는 것은 무의미한 일이 된다는 것이 확인된 것이다.

함수 연속성에 대한 다른 접근이 18세기 후반 편미분방정식의 해로서 불연속 함수를 인정할 수 있는지에 대한 Arbogast의 논의에서 발견된다. Arbogast는 함수의 법칙성이 파괴될 수 있는 방식을 둘로 세분하였다(Grabiner, 2005; Jourdain, 1913).[2] Arbogast는 Euler의 연속함수 개념을 수용하여, 함수값이 결정되는 규칙이 구간 별로 바뀌면서, 서로 다른 곡선들이 모여서 만들어진 곡선을 불연속(discontinuous)하다고 하였다. 그는 '불연속'을 세분하여, 함수의 규칙이 바뀌는 곳에서 곡선들이 연결되지 않으면 'dis-contiguous', 규칙이 바뀌지만 하나로 이어져 있는 경우를 'contiguous'라고 하였다. Arbogast는 이러한 경우 모두 연속성의 법칙이 붕괴된다고 언급하였다. 그러나 Arbogast는 'contiguous'한 함수의 경우 함수값이 연속적으로 변한다는 점을 지적하는 한편, 접촉성의 법칙을 따를 경우 함수값이 연속적으로 변화한다고 언급하였다. 또한, Arbogast는 곡선들의 조각이 서로 이어져 있는 것, 곧 그가 contiguity라고 부른 성질이 함수값의 급격한 변화가 없음을 보장한다는 점을 세 가지 특성을 이용하여 설명하였다.[3] 그의 논의에 의하면 Euler적 의미에서 연속함수와 'contiguous'한 함수가 접촉성의 법칙을 지키는 함수이다. Arbogast는 편미분 방정식의 해로서 가능한 함수가 이러

2) 연속성의 법칙은 한 양이 동일한 법칙에 종속되어, 중간 상태를 모두 통과하지 않고는 한 상태에서 다른 상태로 통과할 수 없다는 데 있다. 대수적 함수들이 연속적인 것으로 생각되는 것은 이러한 함수들의 여러 값들이 동일한 방식으로 변량들의 여러 값들에 의존하기 때문이다.; 변량이 연속적으로 증가한다고 가정해보자, 그 함수는 그에 상응하는 변동을 받아들일 것이다.; 그러나 한 양이 중간 상태를 모두 통과하지 않고는 한 상태에서 다른 상태로 통과할 수 없을 것이다. 따라서 대수 곡선의 세로좌표 y는 가로좌표 x가 변할 때, 한 값에서 다른 값으로 갑작스럽게 통과할 수 없다.: 하나의 세로좌표에서 어떤 양만큼의 차가 있는 다른 값으로의 도약이 생길 수 없다: 그러나 y의 모든 일련의 값들은 [⋯] 하나의 동일한 법칙에 의해 서로 연결되어야만 한다. 이 연속성은 두 가지 방식으로 파괴될 수 있다. 함수는 그 형식을 변화시킬 수 있다. 즉 함수가 그 변량에 의존하는 법칙이 갑자기 변할 수 있다. 여러 곡선들의 많은 부분들을 결합시켜 형성된 곡선이 이러한 종류이다. [⋯] 연속성의 법칙은 곡선의 여러 부분들은 각각이 연결되지 않을 때도 파괴된다. [⋯] 우리는 이러한 정류의 곡선을 '비접촉 곡선(discontiguity)'이라고 부를 것이다.(Jourdain(1913, p.288)에서 재인용)

한 함수들이라고 생각하였다. 또한 그는 함수값에 비약이 없으면 “모든 중간 상태를 거치지 않고서는 하나의 상태에서 다른 상태로 나아갈 수 없는 양(Grabiner, 2005, p.92)”이 된다고 언급하였다. 이러한 Arboagst의 접근은 함수값을 결정하는 규칙 자체보다는 함수값의 변화 혹은 함수의 행동에 대한 관심을 명확하게 드러낸 것으로, Euler의 관점과 다른 측면을 내포하고 있다.

Arbogast는 ‘도약’, ‘통과’ 등의 직관적인 용어를 사용하여 함수의 행동을 설명하였는데, 이를 대수적으로 설명하는 방식이 18세기 후반 등장하였다. Lagrange는 1797년에 Taylor 급수를 통한 함수의 근사 연구에서 한 부등식을 증명하며 곡선이 축의 원점을 절단하는 상황에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

> 곡선의 경로는 이 점에서 연속이다. 즉, 축을 절단하기 전에 그 축에 더 조금씩 접근할 것이고, 결과적으로 주어진 임의의 양보다 작은 양만큼 접근할 수 있다 따라서 우리는 항상 주어진 임의의 양보다 작은 세로좌표에 해당하는 가로좌표 h를 찾을 수 있다.; 그리고 h 보다 작은 모든 값들은 또한 주어진 양보다 작은 세로좌표에 대응한다.”(Grabiner(2005, p.95)에서 재인용)

이러한 Lagrange의 설명은 대수적으로 특히 부등식을 이용하여 함수의 행동을 설명한 한 조작으로 변환하였다(Grabiner, 2005, p.65)는 특징을 가지고 있으며, 종속 변량의 증가에서 그에 대응하는 독립변수의 증가가 어떻게 되는지(Jahnke, 2003, p.165)를 논의하고 있다. 그리고 Arbogast는 독립변량이 한 점에 대하여 통과하는 것으로 연속함수의 현상을 관찰하였지만 Lagrange는 독립변량이 한 지점을 향해 접근할 때 변화 현상에 대하여 논의하였다. 또한 Lagrange는 1798년에 중간값의 정리를 증명하였다. 증명과정에서 다항식의 연속성에 대하여 기술할 필요가 있었으며, 그는 양수 $x=p$와 $x=q$ 사이에서 정의된 두 다항식 P와 Q에 대하여 “이러한 양들은 필연적으로 x가 증가하는 방식에 따라 증가하고, x가 p에서 q까지의 모든 인식할 수 없을 정도로 증가할 때, 두 다항식 또한 인식할 수 없을 정도로 증가한다(Grabiner, 2005, pp.88-89)”고 다항함수의 행동을 설명하였다. 독립변수가 중간값을 모두 거치면서 변할 때, 종속변수 또한 중간값을 모두 거치면서 변한다는 성질이 독립변량의 매우 작은 변화량과 종속변량의 매우 작은 변화량 사이의 관계와 연결된다는 점이 명시된 것이다. 이러한 아이디어들은 함수값의 연속적인 변화를 엄밀하게 다룰 수 있는 수단이 되었다.

5. 함수의 연속성의 형식화 (19세기 이후)

현대적인 연속함수 개념은 19세기 수학자 Bolzano와 Cauchy를 통해서 나타났다. 이 두 수학자는 독립적으로 18세기에 논의된 연속함수와 관련된 여러 성질 중에서 핵심적인 성질을 뽑아 현대적인 의미의 연속함수 개념을 제시하고 이를 이용하여 여러 성질을 증명하였다(Grabiner, 2005, p.96). 이들에 의해서 기하적이며 동적인 함수의 행동에 대한 설명이 대수적 조작으로 전환되었다.

이 점을 가장 명확히 보여주는 것이 1817년의 Bolzano의 중간값 정리 증명에 대한 반성과 연속함수 정의이다(Jourdain, 1913, pp.695-696). 그는 이전의 중간값 정리의 증명을 비판하였다. 그에 의하면 이전의 증명은 연속성의 법칙을 따르는

3) Arbogast는 ‘contiguity’의 세 가지 특징을 제시하였다(Grabiner, 2005, p.92). 첫째, 이전 식의 최종 세로좌표는 새로운 식의 첫 번째 좌표와 서로 같거나 무한히 작은 정도로 다르다. 둘째, 변수가 연속적으로 증가한다면 함수도 그에 대응하여 변한다. 셋째, x에 대한 함수인 세로 좌표 y가 한 값에서, 유한한 차이가 있는, 다른 값으로 도약하는 것처럼 한 값에서 갑자기 다른 값으로 건너갈 수 없다.

두 함수 $f(x)$, $\phi(x)$에 대하여 x가 $f(x)$가 $\phi(x)$보다 작게 되는 곳에서부터 $f(x)$가 $\phi(x)$보다 크게 되는 곳으로 이동하는 상황에서 두 함수는 그 연속성으로 인하여 모든 중간값을 지나게 되며, $f(x)$와 $\phi(x)$가 동일한 순간이 존재할 수밖에 없다는 식으로 기술되어 있는데, 이것은 정리를 증명한 것이 아니라 정리에 의하여 증명한 것이라고 지적한다. Bolzano는 이러한 증명은 정확하지 않은 연속성 개념에 기반하고 있는 것으로 보고 다음과 같이 연속함수 개념을 제시하였다.

> x가 어떤 범위의 안, 밖의 모든 값에 대하여, 함수 $f(x)$가 w를 원하는 만큼 작게 잡을 때, 그 차 $f(x+w)-f(x)$는 주어진 임의의 값보다 작게 만들 수 있을 때에만 연속법의 법칙에 따라 변한다.(Grabiner(2005, p.87)에서 재인용)

Bolzano는 '연속성의 법칙'을 독립 변량과 종속 변량에 적용한 것이 시간과 운동 개념과 연속함수 개념을 섞이게 만들었고 이로 인해서 증명하고자 하는 것을 증명에 사용하게 되었다고 보았다. 그는 대수적으로 한 점 x에 대하여 w를 조정하여 함수값의 차 $f(x+w)-f(x)$를 임의의 값보다 작게 만들 수 있다는 것을 연속함수의 본질로 보았다. 이는 연속함수 개념이 동적이고 전체적인 관점에서 '연속성의 법칙'을 함수에 적용된 것에서 정적이고 국소적 관점에서 한 점을 기준으로 두 변량의 변화량에 대한 대수적 성질로서 전환을 의미한다.

Cauchy의 연속함수 정의는 Bolzano에 비하여 보다 언어적으로 기술되어 있다.

> 변수 x의 두 경계 사이의 모든 값에 대하여 $f(x+a)-f(x)$ 의 절대값이 a와 같이 무한히 줄어들 때, 함수 $f(x)$는 주어진 두 경계 사이에서 x에 대하여 연속함수이다.(Cauchy, 1899: 87)

그러나 Cauchy는 $\sin x$의 연속성을, Bolzano의 정의에 제시되어 있는 것과 동일하게, 대수적으로 증명하였다. Cauchy의 정의는 정리의 증명에서 명시적으로 사용될 수 있다는 의미에서 조작적이었다(Lützen, 2002, pp.475-6). Cauchy가 Euler의 연속함수 정의를 사용하지 않고 독립적인 정의를 제시한 것은 불연속 함수의 행동 분석과 관련되어 있는 것으로 보인다. Cauchy는 1814년 고정된 값에서 두드러지게 다른 값으로 갑자기 이동하는 함수에 대하여 다음과 같이 설명하였다(Grabiner, 2005; Jourdain, 1913). 그는 함수 $\phi(x)$와 한 점 Z, 매우 작은 양 ξ에 대하여

$$\phi(Z+\xi)-\phi(Z-\xi)=\Delta$$

라고 하였다. 이것을 통하여 Cauchy는 점 Z에서 도약이 있는 함수는 ξ가 0으로 작아질 때, $\phi(Z+\xi)-\phi(Z-\xi)$는 0으로 작아지지 않는다는 것을 확인하였다. 그로부터 연속함수는 ξ가 0으로 작아질 때, $\phi(Z+\xi)-\phi(Z-\xi)$ 또한 0으로 작아지게 되리라 추측하였을 것으로 보인다. 이러한 특성을 만족시키면, 독립변수의 증분이 충분히 작아지면 그에 따라서 함수값의 변화도 충분히 작아지게 된다. Cauchy는 연속성 정의를 이항 정리의 증명, 연속함수의 정적분의 존재성 증명 등에서 사용하였다.

이러한 성취에도 불구하고 Cauchy의 성취에는 제한이 있었다. Cauchy는 점별 연속성에 대한 언급 없이 구간별 연속성을 언급하였다(Grabiner, 2005, p.87; Lützen, 2002, p.475). Cauchy의 점별 연속성에 대한 이해는 불명확하였다(Schubring, 2005). 특히 그는 함수가 불연속적으로 행동하는 사례를 제시하면서 $y=\dfrac{1}{x}$ 가 $x=0$ 에서 불연속인 것으로 언급하였다(Cauchy, 1899, p.6). 기하

적으로 볼 때 $y=\frac{1}{x}$ 는 $x=0$ 를 기준으로 하여 분리되어 있으며, 따라서 Aristotle의 관점에서 볼 때 불연속하다. 또한 $y=\frac{1}{x}$ 가 실제로 변화하는 어떤 현상을 나타낸다고 하면, $x=0$ 에서 그 현상이 순간적으로 존재하지 않으며 따라서 끊어져 있다고 할 수 있다. 연속성을 현대적인 방식으로 정의하였지만, 직관적인 인식의 영향에서 완전히 벗어나지 못한 것이다. 이러한 모습은 Cauchy뿐 아니라 19세기에 활동을 한 많은 다른 수학자들에게서도 공통적으로 발견된다. 20세기에 이르기까지 수학자들은 중간값 정리를 연속성의 정의와 동치로 간주하였다(Sierpinska, 1994). 중간값 정리가 만족될 경우, 연속함수의 그래프는 끊어지지 않고 하나로 이어져 있다. 곧 연속성이 정의된 이후에도 수학자들은 19세기 후반에 이르기까지 연속함수의 그래프는 반드시 끊어지지 않고 이어져 있다고 간주한 것이다.

Cauchy는 또한 대수적으로 다룰 수 있음에도 불구하고 언어적으로 정의를 진술하였고, 동적인 접근에 기반한 극한 과정의 설명을 포함하고 있다. Weierstrass는 Cauchy의 방식에 대하여 '극한에 접근한다'고 한 것에 연속적인 운동에 대한 직관이 포함되어 있다고 비난하였다(Boyer, 1959). Cauchy의 언어적 진술에는 여전히 연속적인 변화에 대한 막연한 직관이 포함되어 있었다. Weierstrass는 x의 어떤 구간 안에서, 그 구간에 있는 임의의 값 x_0와 임의의 작은 양수 ϵ에 대하여, x_0 주위의 한 구간의 모든 값에 대해서 차 $f(x)-f(x_0)$의 절대값이 ϵ보다 작은 x_0 주위의 한 구간을 찾을 수 있으면 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 정의하였다. 이러한 정의는 극한 과정을 동적으로 제시하지 않고 정적으로 다룰 수 있게 하였으며, 이를 통해서 보다 엄밀한 접근이 가능할 수 있게 되었다.

다음 장에서 이상과 같은 역사적 분석 결과를 음미를 하여 함수 연속성의 직관적 지도를 위한 시사점을 추출하겠다.

III. 역사적 분석 결과의 음미

본 연구자들은 연속적인 변화에 대한 이해를 중심으로 함수 연속성에 대한 직관적 이해에 대하여 논의하기 위하여 역사적 분석을 시도하였다. 역사적 분석 결과에 비추어 보면, 함수 연속성의 직관적 이해와 지도와 관련하여 다음 사항에 주목할 필요가 있다. 역사적으로 등가속도 운동과 같은 연속적인 변화를 탐구하며 독립변수와 종속변수의 연속적인 변화에 대한 강한 심상이 형성되고 연속함수에 대한 직관적인 이해가 형성되었다고 할 수 있다. 연속적인 변화에 대한 심화된 이해와, 연속적으로 변화하는 양들 사이의 관계에 대한, 시간-속도 그래프와 같은, 기하적 표현은 연속함수에 대한 직관적 이해의 기초가 되었다. 그러나 함수 관계의 상이한 표현 방식은 함수의 연속성을 판단하는 기준과 관련하여 문제를 제기하였고, 이 문제를 해결하면서 함수 연속성의 형식적 개념화가 나타났다. 이들을 좀 더 상세히 논의해 보자.

첫째, 연속적인 변화를 다양한 관점에서 분석하는 사고 실험이 연속적인 변화에 대한 이해를 심화하는 역할을 하였다.

Aristotle은 무한하게 분할될 수 있음이 연속성을 결정하는 속성으로 보았고, 이를 토대로 연속적인 변화가 무한히 많은 단계를 거쳐야 한다는 점을 지적하였다. 무한히 많은 단계를 거쳐야 한다는 것은 직접적으로 지각할 수 있는 현상이 아니라 추론 혹은 일종의 사고실험을 통하여 도달한 결론이다. 유한 단계를 거치는 변화는 각 단계마다 급격한 변화가 있을 수밖에 없으며, 따

라서 연속적인 변화가 이루어지려면 무한히 많은 단계를 거쳐야 한다. 이러한 점은 당연한 지적이지만, 연속적인 변화의 특성을 이해하는 출발점이었다. 이하에서는 연속적인 변화가 무한히 많은 단계를 거쳐야 한다는 관점을 '무한 단계' 관점이라 하겠다. 17세기 중반 Leibniz는 비약이 없는 변화가 연속적인 변화라는 점을 천명하였다. 연속적인 변화가 되려면 어떠한 단계 혹은 순간에서도 급격한 변화가 일어나서는 안 된다. '무한 단계' 관점에서 변화가 비약이 없다는 점이 암묵적으로 전제되었다고 할 수 있는데, 17세기에 이르러서 비로소 이에 대한 의식화가 이루어진 것이다. 비약 없는 변화라는 관점은 이후 진행된 강체들의 충돌이라는 가상적인 상황에 대한 사고실험에서 핵심적인 역할을 하였다. 이러한 관점을 '비약 없음' 관점이라 하겠다. 무한히 많은 단계를 거치고 또한 비약하지 않으면서 변화할 경우 중간의 모든 단계를 거쳐야 한다는 것을 함축한다. 혹은 반대로 중간의 모든 단계를 거치면서 변화할 경우 비약하지 않고 무한히 많은 단계를 거쳐야 할 것이다. 이러한 점에서 중간의 모든 값을 거친다는 것은 연속적인 변화를 설명하는 또 다른 관점이라 할 수 있다. 이하에서는 이를 '중간값 관점'이라 하겠다. Leibniz 이후 많은 수학자들이 이러한 관점을 바탕으로 하여 연속적인 변화와 연속적인 함수에 대한 행동에 대한 논의를 전개하였다. 역사적으로 이러한 세 관점을 통하여 연속적인 변화에 대한 개념적 이해가 풍부하게 발달하였다. 시간-속도 관계의 기하적 표현은 단순히 그 자체로 연속적인 변화에 대한 모델 역할을 한 것이 아니라, 연속적인 변화에 대한 이러한 관점들을 바탕으로 하는 개념적 이해를 바탕으로 한 것이라 할 수 있다.

둘째, 형식화된 함수의 연속성 정의와 그 적용은 연속성에 대한 다양한 관점과 함수의 상이한 표현 방식을 통합하고 조정한 결과물이었다.

역사적으로 Leibniz가 '비약하지 않음' 관점에서 연속성에 대한 논의를 제시하였지만, 그 논의를 이어받은 수학자들이 '중간값' 관점에서 연속적인 변화를 논의하였다. 이것은 '비약 없음' 관점과 '중간값' 관점이 강하게 연결되어 있다는 것을 시사한다. 상식적으로 비약하지 않으려면 중간에 있는 모든 단계를 거쳐야 하고, 모든 단계를 거치면 비약하지 않게 된다. 연속적인 변화의 양면과 같은 것이라 할 수 있겠는데, 형식화된 수학에서는 '중간값' 관점에 해당하는 중간값 정리가 연속성의 정의와 별도 존재한다. 이러한 점은 연속성의 정의가 '비약 없음' 관점을 바탕으로 한다는 것을 시사한다. 실제로 함수의 연속성 정의는 독립변수의 증분을 충분히 작게 하면 함수값 곧 종속변수의 증분이 임의의 양수보다 작게 될 수 있다는 것을 뜻하며, 이것은 함수값의 변화가 주어진 점에서 급격하게 변하지 않는다는 것을 설명한다. 곧 함수의 연속성 정의는 '비약 없음' 관점을 바탕으로 한 것으로 보인다. 비형식화된 수준에서는 비약하지 않음과 중간의 모든 단계를 거침이 개념적으로 구분되지만 실체적으로는 서로 독립하여 존재할 수 없는 것처럼 보인다. 그러나 형식화된 수학의 세계에서 '중간값' 관점과 '비약 없음' 관점은 서로 구분되며 독립적으로 존재하는 수학적 성질이다. 연속성이 보존되지만 중간값 성질이 유지되지 않는 경우도 존재한다. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 이 대표적인 예이다. 그런데, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 의 연속성에 대한 판단은 역사적으로 변화하였다. Euler는 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 을 연속함수로 간주하였는데, 이는 '비약 없음' 관점과 함수의 대수적 표현 방식을 함께 고려한 결과이다. 대수적 함수 개념에 의존한 Euler는 함수값을 결정하는 규칙 자체의 변화 역시 급격한 변화에 포함시켜, 함수 관계의 대수적 표현이

항상 일정하게 유지되는 것을 비약적 변화가 없는 연속적인 변화 혹은 연속함수의 기준으로 삼았다. Cauchy는 연속함수의 정의를 정립하였지만, $f(x)=\dfrac{1}{x}$가 $x=0$에서 불연속인 것으로 간주하였다. 이러한 판단은 20세기에 이르기까지 많은 수학자들의 지지를 받았는데, 이는 기하적 표현과 '중간값' 관점의 영향을 받은 것으로 보인다. 연속함수는 독립변수가 연속적으로 가지는 모든 값에 대하여 함수값이 연속적으로 변하는 것으로 이해되었고, 이에 따라서 함수의 그래프는 연결되어 있어야 하는 것으로 간주된 것이다.

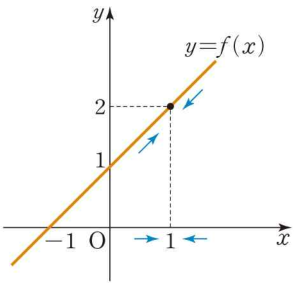
'비약 없음' 관점은 독립변수의 행동에 연속성을 전제할 필요가 없으며 따라서 정의해야 할 대상을 전제하지 않고 정의할 수 있는 통로를 제공하였다고 할 수 있다. 곧 순환적이지 않은 방식으로 연속성을 정의하기 위한 노력의 결과로서 '비약 없음' 관점이 연속성 정의의 바탕이 된 것이다. 하지만 함수 연속성 정의의 적용은 함수 관계의 표현 방식과의 관계도 고려된 것이다. '비약 없음'이 함수 관계에서 어떻게 표현될 수 있을지에 대한 종합적인 검토가 이루어졌을 때 연속성 정의가 비로소 적절하게 적용된 것이다. Cauchy는 현대적 정의에 도달하였지만, 함수의 기하적 표현에 제한되었고 그로 인해 '중간값'관점에서 완전히 벗어나지 못하였던 것이다. 이러한 점은 함수의 대수적 표현에 경도된 Euler와 대척점을 이룬다.

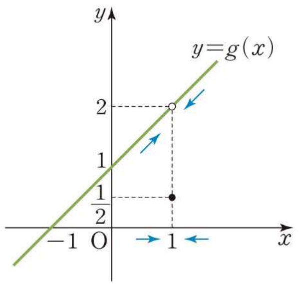
이상의 논의를 정리하면 함수 연속성의 역사적 발달에서 핵심은 세 관점을 바탕으로 하여 연속적인 변화에 대한 풍부한 개념화를 이루고, 이를 다양한 함수 관계의 표현 방식과 통합한 결과물이다. 이러한 지적이 타당하다면, 연속성의 직관적 지도를 위해서는 다음 사항들을 고려할 필요가 있다. 첫째, 연속적인 변화를 세 관점('무한' 관점, '비약 없음', '중간값')을 통하여 분석하고 각 관점을 의식화하는 과정을 통하여 연속적인 변화에 대한 직관적 이해를 풍부하게 한다. 여기에서 함수의 그래프는 연속성을 직접적으로 설명하는 대상이 아니라, 자신을 매개로 하여 연속적인 변화를 설명하는 수단의 역할을 한다는 것을 지도해야 한다. 기하적 모델을 통하여 연속적인 변화가 가지는 성질을 다양하게 분석하고 탐구하도록 지도하는 과정을 거칠 필요가 있다. 이러한 과정을 통하여 연속성이 기하적인 끊어짐 자체가 아니라 연속적인 변화 혹은 급격하게 변하지 않음을 의미한다는 점이 풍부하게 지도되어야 한다. 둘째, 대수적 표현과 기하적 표현의 관계가 다양한 함수를 대상으로 하여 연속성을 탐구하도록 하여, '비약 없음' 관점을 바탕으로 하는 연속성 정의의 적용이 함수의 표현 방식들과 연속적인 변화에 대한 다른 관점에 속되거나 고착되지 않도록 지도한다. 정의 자체만 지도하면, 역사적으로 나타난 바와 같이, 암묵적으로 '중간값' 관점이 적용에 영향을 줄 수 있다. 정의 자체를 지도하는 것에서 머무르지 않고, '중간값' 관점과의 관계를 명확하게 할 수 있게 한다. $f(x)=\dfrac{1}{x}$은 이를 위한 좋은 소재이다.

Ⅳ. 교과서 내용 분석

앞 장의 논의 결과에 비추어 보면, 세 관점을 통하여 연속적인 변화를 개념화하도록 지도하는 것과, 연속성 정의의 기반이 되는 '비약 없음' 관점을 드러내고 정의의 적용이 다른 관점과 함수 표현 방식에 속박되지 않도록 지도하는 것이 함수 연속성의 직관적 지도에 필요하다. 여기에서는 이러한 시사점에 비추어 교과서 내용을 분석하겠다.

부분적으로 다른 점들이 있을 수 있지만, 우리나라의 고등학교 교과서에서는 거의 비슷한 방식으로 함수의 연속성이 지도된다. 우선, 단원 도입부에서는 연속에 대한 일상적인 맥락과 기하적 상황을 제시한다. 이때 수학적 의미의 연속과 구분되지만, 이산적인 맥락에서 일상적인 연속의 의미를 제시되기도 한다.[4] 그리고 지평선을 향해 뻗어나가는 도로와 돌이 드문드문 놓인 징검다리를 함께 제시하여 비교하는 것과 같이 기하적 의미에서 이어져 있음과 끊어짐을 통하여 연속을 제시한다.





[그림 5] 한 점에서 그래프의 이어짐과 끊어짐

이후 [그림 3][5]과 같은 그래프를 사용하여 기하적 선의 이어짐과 끊어짐을 관찰하고, 극한 개념을 이용하여 연속 함수의 그래프와 불연속 함수 그래프의 특성을 기술하는 활동을 하게 된다. 이러한 과정을 통하여 한 점에서 함수의 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있기 위해서는 어떠한 조건이 충족되어야 하는지를 제시하고 한 점에서의 연속성과 불연속성을 정의한다. 교육과정해설서에 이와 관련하여 다음과 같이 기술되어 있다. “한 점에서 끊어진 함수의 그래프의 예를 통해 그 그래프가 이어지려면 어떤 조건이 필요하진 생각해 보게 함으로써 함수의 연속의 조건에 대한 직관적인 이해를 돕고, 함수의 연속에 대한 수학적 정의를 유도하도록 한다(교육과학부, 2008, p.185).″ 주어진 한 점에서 그래프가 끊어지는 현상이 나타나는 조건을 분석하고, 이로부터 그래프가 끊어지지 않고 이어지기 위해서 충족해야 할 세 가지 조건

(i) $x = a$에서 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있고

(ii) 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재하며

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

이 제시된다. 이후 복잡하지 않은 함수들을 대상으로 하여 연속과 불연속성을 판정하는 과제가 문제로 제시되고, 주어진 정의역 혹은 구간 전체에서 연속인 함수, 곧 연속함수의 정의가 지도되고, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$와 같이 하나의 식에 의해 결정되지 않은 함수가 연속인 구간을 찾거나 불연속인 지점을 찾는 문제 등이 다루어진다.

이상의 설명에 비추어보면 우리나라의 고등학교 교과서에서 함수의 연속성은 기하적 연결성에 의존하여 지도되고 있으며, 연속적인 변화와

4) 예를 들어 우정호외 7인(2009, p.28)에서는 다음과 상황을 통하여 연속의 의미를 도입한다. ″신문의 스포츠면에서 ‘연속’이란 말이 들어간 기사를 뽑아 보았어요. ‘연속 우승, 연속 골, 연속 안타, 연속 삼진, 연속 동작, 연속 결장, 연속 본선 진출’″

5) 우정호외 7인.(2009, p.29).

의 관계가 잘 지도되지 않고 있다. 그래프의 이어짐과 끊어짐을 분석하는 과정에서 독립변수와 종속변수의 움직임을 화살표로 나타내고 주목하도록 하지만, 화살표를 이용하여 설명되는 x 가 a 에 수렴하면 $f(x)$ 가 $f(a)$ 에 수렴한다는 것이 기하적 연결성의 맥락에서 벗어나기 어려워 보인다. 더욱이 '조건 (i)'은 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 등과 같은 함수를 연속함수에서 배제하는 조건이 될 수 있다. 많은 교과서들이 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 등과 같은 함수를 함수값이 정의되지 않았다는 점에서 불연속으로 판정하고 있다(박달원, 홍순상, 신민영, 2012). 또한 비슷한 함수에 이 조건을 적용하는 것을 예제에서 다루고 있다. 이러한 활동은 함수의 연속성을 더욱 기하적 연결성과 고착시킬 우려가 크다. 정리하면 함수의 연속성 정의는 '비약 없음' 관점을 기반으로 하는 것이지만, 기하적 맥락을 중심으로 지도하면서 그 특성이 명확하게 드러나지 않고 있다고 할 수 있다.

이러한 특성에도 불구하고, Raman(2004)의 분석에 비추어 보면, 우리나라 고등학교의 지도 방식은 '$\epsilon-\delta$'에 기반한 정의를 이용하여 함수의 연속성이 지도되는 미적분 교재와 매우 비슷하다. 우리나라 고등학교 교재에서는 '$\epsilon-\delta$'에 기반한 정의가 채택되지 않지만 교재에 제시된 연속성의 세 조건은 '$\epsilon-\delta$'에 기반한 정의를 초등화한 것이라 할 수 있다. 이는 '$\epsilon-\delta$'로 정의된 극한이 동적으로 지도되는 것과 관련된다. 그리고 우리나라 교재에서 다루는 문제들은 이러한 정의를 다양한 함수들, 기초적인 함수들부터 상당한 대수적 조작이 필요한 함수들에 적용하는 것으로 이루어져 있는데, 이는 함수의 연속성의 '$\epsilon-\delta$' 정의를 여러 함수에 적용하는 문제들에 대응된다. Raman은 이러한 문제들을 구문론적 성격의 문제라고 하였다. 이는 이 문제들이 함수의 연속성이 지닌 다른 내용이나 주제들과의 관계를 다루지 않고, 정의를 숙달시키는 역할을 한다는 뜻을 함축한 것으로 보인다. 이러한 평가는 우리나라의 교과서에서 제시된 문제에도 그대로 적용될 수 있다. 우리나라 교과서에서 다루는 문제들은 다양한 유형의 함수에 대하여 연속성의 세 조건을 적용하는 것에 초점을 맞추는 구문론적 특성이 강한 문제들이다. 그렇지만 연속적인 변화에 대한 다른 관점들을 다루지 않으며 이로 인해서 '중간값' 관점의 잠재적인 개입을 허용할 여지가 크다고 할 수 있다.

Raman(2004)은 해석학 수준의 교재에서 연속성과 다른 성질의 관계를 다루는 내용들과 문제들에 대해서는 의미론적 성격을 지녔다고 하였다. 연속성과 다른 성질들 사이의 관계를 다루는 것은 학교수학의 범위에서 다루기 쉽지 않다. 그러나 연속성의 정의와 직관적 측면의 관계를 다루는 것은 가능하며, 이것이 학교수학 수준에서의 의미론적으로 연속성을 다루는 것이라 할 수 있을 것이다. 우리나라 교과서의 전개 방식은 연속적인 변화에 대한 '비약 없음' 관점에 기반한 정의를 지도하지만, 기하적 설명에 의존하면서 정의가 가진 의미가 잘 드러나지 못하고 있다. 그렇기 때문에 함수의 연속성과 기하적 연결성 사이의 구분이 불명확해 지는 것이다. 연속적인 변화를 여러 관점을 통하여 풍부하게 분석하는 과정과, 다른 관점들 사이의 차이에 대한 분석하고 이들을 종합하는 과정은 학교수학에서 의미론적 측면에서 연속성을 제시하는 과정이라 할 수 있다. 이러한 과정을 거친다면 구문론적 숙달에 머무르지 않을 수 있고, 기하적 연결성이 연속적인 변화와 연결되고 함수의 연속성을 구분되는 것이 가능할 수 있다. 이를 위해서 함수의 연속성 지도에서 구체적으로 다음을 고려할 필요가 있다.

첫째, 등가속도 운동과 같이 연속적으로 변화

하는 현상에 대한 사고실험을 충분하게 하여 연속적인 변화의 특성을 세 관점을 통하여 학생들이 반성할 수 있게 한다. 그래프의 연결성에 대한 논의에 앞서 연속적인 변화에 대한 사고실험을 하여 연속적인 변화의 특성을 의식화한다면, 연결되어 있는 함수의 그래프가 연속적인 변화와 함수의 연속적인 변화의 모델이라는 점이 보다 분명하게 드러날 수 있을 것이다. 예를 들어, 정지해 있던 차가 일정하게 속도가 증가하여 시속 50킬로미터의 속도에 도달하는 과정을 분석하여 무한히 많은 중간의 모든 단계를 거치며 이 과정이 비약이 없다는 점을 학생들이 의식하도록 한다. 그리고 그러한 상황을 나타내는 그래프에 이러한 특성이 어떻게 반영되는지 확인하도록 한다.

둘째, 함수의 연속성 정의가 '비약 없음' 관점을 바탕으로 한다는 점과 '중간값' 관점과의 차이가 명확하게 나타나도록 지도한다. 순간적으로 비약이 없으면 중간의 모든 값을 거쳐야 하고, 반대로 중간의 모든 값을 거치면 순간적인 비약이 없기에 둘이 동등한 것으로 인식될 수 있다. 그럼에도 불구하고 둘 사이에 차이가 있다는 점을 지도할 필요가 있다. 이러한 차이를 통하여 'x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워진다'는 것과 '$f(x)$의 값이 일정한 값 l에 한없이 가까워진다'는 것이 주어진 점과 주변의 지점에서의 함수값을 비교하는 것을 의미한다는 점이 분명하게 제시되도록 한다. 이러한 사항을 지도할 때, 특히 $f(x)=\dfrac{1}{x}$와 같은 함수를 사례로 다루는 것이 필요할 수 있다.

셋째, 현재 교과서의 함수의 연속성 정의에서 $f(a)$의 존재성을 연속함수 판정 조건이 아닌 전제 조건으로 제시할 것으로 고려해야 한다. 대응 관계에 기반한 함수 개념과 이를 바탕으로 하는 연속함수 개념에서 함수의 불연속, 연속은 함수값의 존재를 전제로 하고 있어 함수값이 존재하지 않는 점에 대하여 함수의 연속, 불연속을 해석할 수 없다. 이러한 점은 이진영(2011)과 박달원, 홍순상, 신민영(2012)에서 이미 지적한 바 있다. $f(a)$의 존재성을 연속함수 판정 조건으로 제시할 경우, 학생들은 정의역에 속하지 않은 한 점에서의 연속성과 불연속성을 판별 가능 여부의 타당성이 불분명하게 이해될 수 있다. 정의되지 않은 한 점에 대하여 함수의 연속성을 파악하려 할 수 있으며, 이 경우 '비약 없음' 관점에 기반한 정의의 의미가 크게 훼손될 수 있다. 함수값이 정의되지 않은 점의 존재는 '비약 없음' 관점에서는 문제가 되지 않지만, 이에 비하여 '중간값' 관점에서는 다른 값들과 구분되기 어렵다. 정의되지 않는 점을 연속성에서 판단하도록 하는 것은 정의의 기본적인 특성을 훼손시키고 연속성의 의미를 이해하기 어렵게 만든다. 이 경우, 그래프의 이어짐과 끊어짐 그리고 암묵적이지만 '중간값' 관점이 더 강하게 자리잡을 가능성이 높아 질 것이다.

Ⅳ. 결 론

연속함수 개념은 연속적인 변화에 대한 풍부한 직관적인 이해를 바탕으로 하여 발달하였다. 기하적 모델, 곧 함수의 그래프는 연속적인 변화를 시각화하여 다룰 수 있는 수단을 제공하였으나, 최종적으로 연속성은 기하적 연결성과 구분되도록 정의되었다. 연속적인 변화에 대한 사고 실험을 통하여 연속적인 변화를 세 관점에서 분석하고 이를 그래프를 적용시키는 과정을 통하여 세 관점을 반성하고, 연속함수의 정의를 '비약 없음' 관점을 통하여 이해하고, 다른 관점들과 연결시키는 연속성의 의미를 풍부하면서 명확하게 하는 과정을 거친다면, 함수의 연속성이 직관적으로

지도되면서 함수의 연속성이 기하적 연결성에 고착되는 문제를 피할 수 있을 것이다. 현재의 지도 방식은 이러한 점들이 간과된 채 기하적 연결성에 기반하여 함수의 연속성을 지도되고 있다. 현재 교과서는 연속성을 이해하는데 필요한 여러 측면을 탐색하기 보다는 정의를 다양한 유형의 함수에 적용하는 구문론적 성격의 과제를 주로 다루고 있다. 연속성이 지닌 다양한 직관적 측면을 보다 충실하게 드러내는 것이 함수 연속성의 직관적 지도라고 한다면, 앞서 논의한 바들을 학생들에게 적절히 전달하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 함수의 연속성의 역사적 발달과정을 분석하여, 역사적 관점에서 본 직관적 이해를 구체적으로 제시하고, 직관적 지도의 개선에 대한 시사점을 제시하였다. 본 논문에서 제시된 시사점은 역사적 분석을 토대로 한 것이며, 이러한 시사점들이 현재 우리나라의 교실 상황에서 어떻게 유효하게 지도할 수 있는가에 대해서는 후속 연구를 통해서 구체화되고 검증되어야 할 것이다. 예를 들어 그래픽 계산기를 활용하여 연속적인 변화에 대한 사고실험을 효율적으로 진행하는 방법 등 실제 지도 방안을 개발하는 과정에서 많은 노력과 수정이 필요할 것이다. 이러한 어려움에도 불구하고 본 논문의 연구결과를 통하여 함수의 연속성 지도 개선에 필요한 기초 자료가 제시되었다고 생각한다. 한편으로 현장 교사들에게 함수의 연속성 지도에 내재한 어려움을 구체적으로 드러내고, 보다 세심한 접근을 하는데 도움이 될 수 있으리라 생각한다.

참고문헌

교육과학기술부(2008). **고등학교 교육과정 해설 (수학)**.

김동보(1983). 고교수학에서의 함수의 연속성에 관한 고찰. **수학 및 통계연구, 11**, 51-57.

김영식(2001). **과학혁명-전통적 관점과 새로운 관점**. 서울: 도서출판 아르케

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

박달원, 홍순상, 신민영(2012). 연속함수에 대한 고등학교 교과서의 정의와 고등학생들의 이해. **한국학교수학회논문집, 15**(3), 453-465.

우정호 외 7인 공저(2009). **미적분과 통계기본**. 두산동아 출판사.

이경화・신보미(2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해, **수학교육학연구 15**(15), 39-56

이진영(2011). **교수학적 변환의 관점에서 한 점에서 연속・불연속, 연속함수의 정의의 검토**. 이화여자대학교 석사학위 논문

정영옥(1999). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Bezuidenhout, J.(2001). Limits and continuity : some conceptions of first-year students. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 32(4)

Bos, H.(2000). Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition, in I. Grattan-Guiness(Ed.). *From the calculus to the set theory* Princeton University Press, 49-93

Boyer, C. B. (1991). *A History of Mathematics.* Jonh Willy & Sons.

__________. (1959). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publication Inc.

Cauchy, A.(1899). *Resume des Logons donne"es l'Ecolo royale Polyteehniquo sur le Galcul infinitesimal, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences et sous les auspices de M. le ministre de l'Instruction publique*, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy.

Ferrini-Mundy, J., Graham, K.(1994). Research in calculus learning : understanding of limits, derivatives and integrals in J.J Kaput, E. Dubinsky(Eds). R*esearch issues in undergraduate mathematics learning : Primary analyses and result* (MAA Notes Vol. 33), 31-45.

Ferraro, G. (2001). Analytical Symbols and Geometrical Figures in Eighteenth-Century Calculus, *Studies in History and Philosophy of Science*, 32(3), 535-555.

Grabiner, J.(2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications.

Grant, E. (1992). *Physical Science in the Middle Ages* (홍성욱, 김영식 옮김. 중세의 과학)

Grattan-Guinness, I.(2000). The Emergence of Mathematical Analysis and its Foundational Progress, 1780-1880, in Gtattan-Guinness, I.(Ed). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910 An Introductory History*. Princeton University Press, USA : New Jersey, 94-148.

Jahnke, H. N. (2003). *A History of analysis*. Amerian Mathematical Society.

Jourdain, P.(1913). The Origin of Cauchy's Conceptions of a definite integral and of the continuity of a function, *Isis* 1, 661-703.

Kleiner, I.(1989). Evolution of the Function Concept : A Brief History, *The College Mathematics Journal*, Vol. 20, No. 4, 282-300

Lützen, J.(2002). Between Rigor and Applications - Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis, *The Modern Physical and Mathematical Sciences*. 468-487

Raman, M.(2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbook. *Journal of Mathematical Behavior* 23, 389-404

Schubring(2005). Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition : *Number Concepts Underlying the Developments of Analysis in 17-19th Century France and Germany*. Springer, USA: New York

Sherry D. M. (1982). *A Philosophical history of the calculus*. Unpublished doctoral dissertations, Claremont University.

Sierpinska, A.(1994). *Understanding in Mathematics*. The Falmer Press, Great Britain: London

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference on limit and continuity. *Education Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Yuschkevich, A.P.(1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences* 16, 37-85

An Historical Investigation of the Historical Developments of the Concept of Continuous Functions

Joung, Youn-joon (Chungnam National University)
Kim, Jae-hong (KICE)

In school mathematics, the concept of continuous functions has been intuitively taught. Many researches reported that many students identified the continuity of function with the connectedness of the graphs. Several researchers proposed some ideas which are enhancing the formal aspects of the definition as alternative. We analysed the historical developments of the concept of continuous functions and drew pedagogical implications for the intuitive teaching of continuous functions from the result of analysis.

* Key Words : 연속함수(continuous function), 연속적인 변화(continuous change), 직관적 지도(intuitive teaching)

논문접수 : 2013. 10. 10
논문수정 : 2013. 11. 7
심사완료 : 2013. 11. 14