대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 4, 553~ 565. Nov 2013

초등 예비교사교육에서 Lakatos 방법론의 적용과 효과1)

이 동 환*

본 연구는 Pick의 정리를 소재로 하여 Lakatos의 방법론을 적용한 초등예비교사 교육을 실시하고 그 교육적 효과를 분석하였다. Lakatos 방법론에 따라 설계된 수업에서 예비교사들은 수학적 추측을 제기하고, 추측에 대한 반례를 발견하고, 반례에 따라 추측을 수정하면서 보조정리합체법, 괴물배제법, 괴물조정법, 예외배제법 등을 사용하였고, 이러한 과정에서 다양한 수학적 사고와 전략을 경험할 수 있었다. 이러한 수학적 경험은 예비교사들에게 수학에 대한 새로운 관점을 형성하는 좋은 기회가 되었다. 이러한 수학에 대한 관점의 변화는 수학을 가르치는 방식의 변화와 연결되었다. 예비교사들은 새로운 수학수업의 가능성을 직접 확인함으로서 새로운 수업에 대한 강력한 동기부여가 되었고, 수학수업에서 상호작용과 토의의 중요성과 가능성을 실감할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

본 연구는 초등예비교사들에게 어떠한 수학적 경험을 제공해야 하는가에 대한 문제의식에서 출발하였다. 수학교육의 근본 문제가 연역적 양식으로 전개되는 학교 수학에서 비롯되는 비판적, 발견적 사고 경험의 결핍(강문봉, 1993, 183)에 있다고 할 때, 예비교사들은 장차 학생들에게 이러한 사고 경험을 제공할 수 있어야 한다. 이를 위해 예비교사들이 먼저 교사교육 단계에서 이러한 수학적 경험에 익숙해져야 한다. 특히, 2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학교과서는 기존의 연역적 전개 양식에서 학생의 자발적인 발견과 참여를 강조하는 방향으로 변화하고 있다. 다시 말해, '스토리텔링 수학'으로 대표되는 이러한 수학교육의 변화는 수학교사에게 새로운 역할을 요구하고 있다. 이러한 변화의 배경에는 Freudenthal의 현실주의 수학교육 철학이 자리하고 있다. Freudenthal은 수학이 이미 완성된 기성수학으로 가르쳐지는 현실에 문제의식을 느끼고, 수학이 발생하던 역동적인 과정이 수학 수업에서 재연되어야 한다는 점을 강조하였다. 즉, 학생의 현실을 출발점으로 해서 이미 발명된 수학을 학생 스스로 개선된 방법에 의해서 재창조해 나가는 안내된 재발명을 제안하였다 (Freudenthal, 1983). 따라서 초등 수학교과서에서 스토리텔링을 강조한다는 의미는 단순히 수학수업에 재미있는 이야기를 도입한다는 데 있는 것이 아니라 학습자에게 수학의 역동적인 발생 과정을 경험할 수 있는 학습 환경을 제공한다는데 있는 것이다. 이를 위해 수학교사는 수학의 발생 과정을 이해하고 경험해야 한다. 이러한 배경에서 수학의 발생 과정을 통찰력 있게 분석한

---

* 부산교육대학교, dhdhdh@bnue.ac.kr
1) 이 논문은 2013년도 부산교육대학교 교육연구원의 지원을 받아 연구되었음.

Lakatos의 수리철학은 예비교사 교육에 중요한 시사점을 던져줄 수 있다. Lakatos에 따르면 수학의 발전은 입증된 지식이 순차적으로 축적되어가는 선형적인 과정이 아니라 원시추측에서 시작하여 소박한 증명이 제기되고 이에 대한 반례가 등장하면서 반박되고, 반례에 대처하는 과정에서 증명이 개선되는 변증법적인 과정이다 (Lakatos, 1976).

> Lakatos의 수리철학은 학생들에게 수학의 성장과 발달이라는 새로운 면을 인식하게 할 수 있으며, 수학적 발견의 원천을 인식하게 할 수 있다. 또한 인간은 수학을 창조하고 이를 세련시켜 나간다는 사실을 일깨워 줄 수 있는 교육적으로 매우 의미 있는 수리철학이다(강문봉, 2004, 143).

이러한 장점에 힘입어 Lakatos의 수리철학은 중등학교 이상의 수준에서 증명과 관련하여 활발하게 논의되고 있지만(서동엽, 1999; Larson & Zandieh, 2008, 박경미, 2009), 증명을 다루지 않는 초등학교 수준에서는 논의되는 경우가 드물다(강문봉 2004). 그러나 앞서 언급한 수학교육적 가치는 초등수학 단계에서도 매우 중요한 목표이므로 Lakatos의 수리철학을 초등수학교육에서 적용하기 위한 노력이 필요하다. 실제로 강문봉(2004)은 Lakatos가 증명의 목적으로 밝힌 '추측을 개선하는 활동'(Lakatos 1976, 41)은 초등수학에서도 충분히 다룰 수 있는 활동이므로, Lakatos의 방법론을 초등학교 수준에서 적용할 수 있는 방안과 그 적용 사례를 제시하였다. 그러나 실제로 그 방안을 실시하고 결과를 제시하지는 않았다. 본 연구에서는 초등학교 학생이 아닌 초등예비교사를 대상으로 Lakatos의 방법론을 적용한 수업을 설계하고 실시하여 그 효과를 분석하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. Lakatos의 방법론

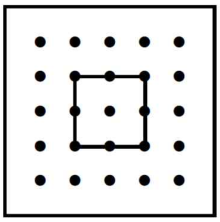
Laktos는 수학적 지식은 의심의 여지없이 확실한 정리의 수가 단조롭게 늘어나면서 성장하는 것이 아니라, 증명과 반박의 논리에 의해 추측이 끊임없이 개선되는 변증법적 과정을 통해 성장한다고 주장한다(Lakatos, 1976). Laktos는 만들어지고 있는 수학적 지식의 완전한 확실성을 입증할 수 없으며, 다만 추측하고 추측을 검사하고 반박하고 새로운 개선된 추측을 만들어 발전시켜 나갈 수 있다는 견해를 제시하고 있다. 이러한 관점에서 Lakatos는 수학이 추측과 반박에 의해 성장하는 과정을 분석하여 추측을 반박하는 반례가 등장했을 때, 이에 대처하는 방법을 제시하고 있다. 본 연구에서는 이러한 방법을 Lakatos의 방법론으로 규정하고 예비교사들이 수학학습 과정에서 이러한 방법을 경험할 수 있도록 수업을 설계하였다.

Lakatos는 추측을 반박하는 반례가 등장했을 때, 다음과 같이 대처할 수 있다고 하였다 (Lakatos, 1976; 강문봉, 1993, 박경미, 2009). 첫째, 가장 간단한 방법으로서 반례가 나타났으므로 추측을 기각하는 것이다. 둘째, 반례가 잘못되었다고 보고 반례를 괴물이라고 하여 이를 배제함으로서 원래의 추측을 존속시키는 괴물배제법이 있다. 괴물배제자들은 반례가 제기된 원인이 용어의 의미가 불분명하기 때문이라고 보고 용어를 명확히 정의함으로서 반례를 제외한다. 셋째, 반례라고 본 관점은 왜곡된 관점에 의한 것이며 기괴한 해석이라 보고, 관점을 시정하여 반례가 실제로 반례가 아닌 예라고 설명하여 반례를 예로 전환시키는 괴물조정법이다. 넷째, 원래의 추측은 예외를 제외한 영역에서는 참이므로 예외에 대하여 언급한 조건절을 첨가하여 그

것을 참인 명제로 바꾸는 예외배제법이 있다. 다섯째, 보조정리합체법은 증명분석을 통해 반례를 유발시킨 부분추측 혹은 보조정리를 찾고 수정하여 증명에 합체시키고 원시 추측에 조건을 추가하는 방법이다.

2. Pick의 정리

Pick의 정리는 1899년 George Pick이 처음 소개하고 증명하였다. Pick의 정리는 격자점을 꼭짓점으로 하여 이루어진 다각형의 넓이를 계산하는 방법을 말한다. 격자점은 xy평면에서 좌표가 모두 정수인 점을 뜻한다. 다각형의 내부에 있는 격자점을 내부점이라 하고, 다각형의 변 위에 있는 격자점을 경계점이라고 할 때, 내부점의 개수(i)와 경계점의 개수(b)를 이용하여 다각형의 넓이(S)를 $S=\frac{1}{2}b-1+i$ 로 계산할 수 있다(Papadopoulos & Iatridou, 2010). 예를 들어, [그림 Ⅱ-1]의 경우 내부점의 개수는 1, 경계점의 개수는 8이므로 다각형의 넓이는 $S=\frac{8}{2}-1+1=4$ 로 구할 수 있다.



[그림 Ⅱ-1]

본 연구에서 lakatos의 방법론을 적용한 수업의 소재로 Pick의 정리를 선택한 이유는 다음과 같은 예비교사 교육의 원칙과 관련이 있다.

> 초등수학을 효과적으로 가르치기 위해 초등교사가 갖춰야 하는 수학지식은 다음 두 가지 조건을 만족해야 한다. (a) 자신이 가르칠 내용과 관련된 수학지식, (b) 수학의 기본적인 원칙(수학적 사고의 본질)에 부합하는 방식.(Wu, 2011, 372).

Pick의 정리는 초등학교 교육과정에서 다루는 내용과 밀접한 관련이 있으며, 귀납과 유추를 비롯한 다양한 수학적 사고의 기회를 제공할 수 있다. 이에 대해 자세히 살펴보면 다음과 같다.

Pick의 정리는 격자점으로 이루어진 다각형의 넓이와 그 격자점의 개수 사이에 일정한 관계가 있음을 말하고 있다. 그런데 격자점으로 이루어진 다각형은 초등학교 교과서에 자주 등장한다[2]. 초등학교 2학년 교과서를 보면 기하판 위에 삼각형과 사각형을 만들어보는 활동이 등장한다. 학생들이 고무줄로 격자점을 연결하여 여러 가지 삼각형과 사각형을 만들어본다. 이러한 기하판은 나중에 다각형의 넓이와 둘레의 길이를 쉽게 파악하고 이들 사이의 관계를 이해하는데 활용된다. 초등학교 교육과정에서 기하판은 다각형을 만들고 그 성질을 탐구하는 유용한 교구로서 활용되고 있다. 초등학교 교육과정에서 다각형을 이루는 격자점의 개수와 넓이 사이의 관계를 Pick의 정리의 형태로 다루지는 않지만 수업시간에 이와 관련된 질문이 제기될 수 있다. 직접적으로 Pick의 정리를 다루는 경우는 드물겠지만, 초등학교 교육과정에서 자주 등장하는 기하판과 관련된 Pick의 정리는 예비교사의 흥미와 관심을 끌기에 충분하다.

Pick의 정리를 발견하는 과정에서 귀납과 추측이라는 발견적 사고를 경험 할 수 있으며, 증명과정에서는 유추와 일반화를 경험할 수 있다(Papadopoulos & Iatridou, 2010).

2) 2학년 1학기(여러 가지 도형), 3학년 1학기(평면도형), 4학년 1학기(삼각형), 5학년 1학기(도형의 합동)에서 기하판, 점판, 모눈종이 등이 사용된다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상

본 연구자가 소속된 교육대학교의 초등수학교수법 강좌를 수강한 2학년 30명을 대상으로 연구를 수행하였다. 본 연구에 참여한 2학년 학생들은 본 강좌를 통해 처음으로 수학교육이론을 접하게 된다. 본 강좌의 목적은 예비교사로서 초등수학교육과 관련된 여러 가지 이론을 이해하고 이를 바탕으로 각자의 경험과 개성이 반영된 수학교수법을 설계하는 것이다.

2. 연구절차

예비교사들이 자연스럽게 추측을 제기할 수 있도록 Pick의 정리를 소재로 수업을 설계했다. 주어진 조건을 만족하는 도형을 찾아보는 활동을 하면서 예비교사들은 자연스럽게 격자점의 개수와 다각형의 넓이 사이의 관계를 발견할 수 있었다. 그러나 그 관계를 공식화시키는 데 어려움이 있었고 이 때 연구자가 개입하였다. 공식을 직접 제시하지 않고 특정 상황에 주목하도록 유도하였다. 그 뒤로 연구자는 학생들이 발견한 추측이나 반례를 기록하고 확인하거나 대립되는 상황을 정리하면서 예비교사들의 판단을 유도하는 역할을 하였다.

3. 자료수집 및 분석

예비교사들의 수학학습 과정을 분석하기 위해 수업장면을 녹화하고 전사하였다. Pick의 정리를 발견하는 과정에서 나타난 추측과 반례 그리고 여러 가지 비형식적 전략 등을 토대로 예비교사들이 어떠한 수학적 경험을 하였는가를 질적으로 분석하였다. 특히, 반례가 제시된 후에 어떠한 대처를 하는지에 대해 Lakatos의 방법론을 토대로 분석하였다. 또한 수업 후 예비교사들이 작성한 수업일기 내용을 분석하였다. 자료를 수집하고 정리하면서 예비교사에게 미친 교육적 효과의 분석 기준으로서 예비교사들이 경험한 수학적 사고, 수학에 대한 관점의 변화, 수학을 가르치는 방법 등을 도출하고 이에 따라 분석을 정련하였다.

Ⅳ. 연구결과

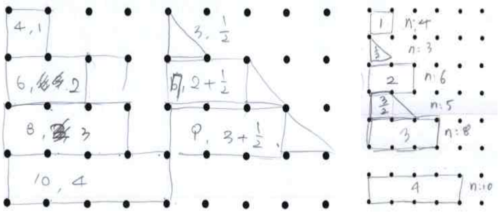
본 연구는 Pick의 정리를 소재로 하여 Lakatos의 방법론을 적용한 예비교사 교육을 실시하고 그 교육적 효과를 분석하는데 목적이 있다. 예비교사들은 Pick의 정리를 중심으로 진행한 수업을 통해 수학을 배우고 가르치는 새로운 방법을 경험하고 수학을 새로운 관점에서 바라보게 되었다. 따라서 본 연구는 교육적 효과를 수학을 배우는 방법, 수학을 가르치는 방법, 수학에 대한 태도 등의 세 가지로 구분[3]하여 분석하였다. 수학을 배우는 방법의 측면은 예비교사들이 Pick의 정리를 발견하는 과정에서 경험한 수학적 사고 방식에 초점을 두고 분석하였고, 수학을 가르치는 방법과 수학에 대한 태도는 예비교사들이 작성한 수업일기의 분석을 통해 분석하였다.

1. Pick의 정리에 대한 교수-학습과정 분석

수업은 예비교사들이 다각형을 이루는 격자점의 개수와 다각형의 넓이 사이의 관계를 인식하고 그 관계를 구체적인 공식 즉, Pick의 정리로

3) 이러한 구분은 예비교사를 수학학습자, 수학교사, 수학연구자의 입장으로 놓고 각각의 입장에서 그들에게 일어난 변화를 기술하려는 의도에서 비롯되었다.

표현하는 것을 목표로 하였다. 이를 위해 Pick의 정리를 직접 제시할 수 없으므로 우선 초등학교 교과서에서 기하판이 사용되는 사례를 소개하고, 주어진 조건[4]을 만족하는 다각형을 찾아보는 과제를 제시하였다([그림Ⅱ-1]). 예비교사들이 만든 여러 가지 다각형을 전체 학급에 소개한 뒤에, 이러한 다각형들의 특징을 찾아보도록 했다. 예비교사들은 제시된 다각형의 둘레의 길이, 모양, 넓이 등을 비교하면서 넓이가 모두 동일함을 발견하였다. 이러한 활동을 통해 넓이와 격자점 사이의 일정한 관계가 있음을 발견하였다. 이러한 관계를 공식화하기 위해서는 격자점의 개수를 변화시키면서 넓이가 어떻게 변하는지를 살펴볼 필요가 있었다. 예비교사들은 격자점의 개수가 서로 다른 다각형을 만들고 각각의 넓이를 구해보는 활동을 하였으나 쉽게 공식화시키지 못하였다. 이 때 연구자는 내부점에 점이 없는 다각형에 한정해서 공식을 찾아보라고 제안하였다.



[그림 Ⅳ-1] 내부점이 없는 다각형의 넓이와 격자점 개수의 관계 탐구

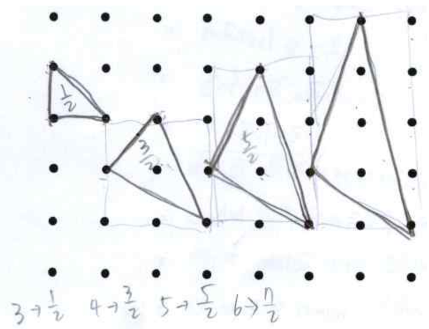
예비교사들은 내부에 점이 없는 경우에([그림 Ⅳ-1]) 격자점이 1개씩 증가할 때마다 넓이가 $\frac{1}{2}$씩 증가한다는 사실을 발견하고, 이를 일종의 등차수열로 생각하였다. 등차수열의 일반항을 곧 넓이로 생각하고 넓이를 $\frac{1}{2}n-1$[5]로 표현하였다. 격자점으로 이루어진 다각형의 넓이(S)와 격자점 개수(n) 사이에 $S=\frac{1}{2}n-1$ 라는 관계가 성립함을 발견하였다[6]. 그러나 곧 예비교사들은 내부에 점이 있는 다각형에선 정리①이 성립하지 않는다는 사실을 발견하였다. 즉, [그림Ⅱ-1]이 정리①의 반례가 된 것이다.

연구자는 예비교사들에게 정리①의 공식을 포기할 것인지 아니면 내부에 점이 있는 다각형에도 적용할 수 있도록 공식을 변형할 수 있는지 탐구하도록 질문하였다. 대부분은 내부에 점이 있는 다각형에 대해 $\frac{1}{2}n-1$로 구한 넓이와 실제 넓이를 비교하면서 공식을 변형하려고 시도하였고 곧 내부에 존재하는 점의 개수에 따라 넓이의 차이가 발생함을 발견하였다.

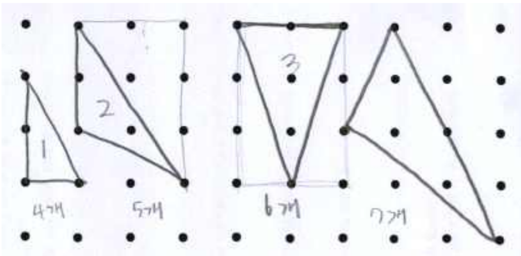
S1 : [그림Ⅱ-1]을 보면, 점이 8개니까 $\frac{1}{2}n-1$에 대입하면 넓이가 3으로 나오는데, 실제로 구하면 넓이가 4이거든. 그러니까 지금 공식에서 내부에 있는 점의 개수만큼 더해주면 될 것 같아. 다른 경우도 확인해봤는데 성립했어.

S2 : 아까 $S=\frac{1}{2}n-1$ 발견할 때랑 비슷하게 점의 개수를 하나 씩 늘려봤거든요([그림Ⅳ-2]). 바깥에 있는 점[7]의 개수는 그대로 두고 내부에 있는 점만 하나 씩 늘렸더니 아까처럼 규칙이 있었어요. $S=n-\frac{5}{2}$라고 할 수 있어요[8].

4) [그림 Ⅱ-1]과 같이 경계점이 8개, 내부점이 1개로 이루어진 다각형. 다각형을 이루는 격자점을 내부점과 경계점으로 구분하는 것도 예비교사들이 발견해야 하는 중요한 사항이므로, 수업에서는 이를 구분하지 않고 내부에 점이 1개 있는 다각형으로 설명하였다.
5) n은 격자점의 개수를 나타내는데, 아직까지 n은 내부점과 경계점을 모두 포함한 개수이다.
6) 논의의 편의상 이러한 명제를 정리①로 표현하겠다.
7) 경계점을 표현하는 말인데, 이 학생은 내부의 점과 구분하기 위한 의도로서 ‘바깥에 있는 점’으로 표현함.
8) 여기서 n은 내부점과 경계점을 모두 포함한 개수이다.



[그림Ⅳ-2] 내부점의 개수를 증가시킨 경우



[그림Ⅳ-3] $S=n-3$으로 표현되는 경우

두 학생(S1, S2)이 주장하는 공식의 모습은 서로 다르지만 두 경우 모두 내부점의 개수만큼 다각형의 넓이가 증가한다는 점은 동일하다. 그러나 S2의 공식을 [그림Ⅱ-1]에 적용하면 성립하지 않는다. 실제로 여러 학생들이 S2의 주장에 대해 [그림Ⅱ-1]을 반례[9]로 제시하였다. 반면에 S1의 설명은 [그림Ⅳ-2]의 사례에도 그대로 적용되었다. 연구자는 S2의 설명에서 무엇이 잘못되었는지를 찾아보도록 제안하였고, 예비교사들은 그 차이를 다음과 같이 설명하였다.

S3 : [그림 Ⅳ-3]의 경우에 S2의 생각처럼 해보면 $S=n-3$이 되요. 그런데, 도형이 달라지면 공식도 달라지게 돼서 이상해져요.

S2 : 제가 생각한 [그림Ⅳ-2]은 바깥에 있는 점이 3개인데, [그림Ⅳ-3]는 바깥 점이 4개라서 $S=n-\frac{5}{2}$과 $S=n-3$의 차이가 생긴 것 같네요.

S4 : 내부에 있는 점의 개수가 늘어나는 만큼 넓이가 늘어난다는 점에서 S1, S2의 생각은 서로 비슷하고 옳은 것 같아요. 그런데 다각형의 내부에 있는 점과 바깥에 있는 점을 구분해야 할 것 같아요. S1의 공식은 바깥점만 공식에 대입하고, 내부점은 따로 더하니까 공식을 안 바꿔도 되는데, S2는 내부점 바깥점 모두 합한 것을 n에 대입하니까 도형에 따라 공식이 다르게 되는 것 같아요.

이처럼 예비교사들은 다각형을 이루는 점을 내부점과 경계점으로 구분할 필요가 있음을 인식하였다. 게다가 내부점의 개수는 넓이에 1만큼의 영향을 주고, 경계점의 개수는 $\frac{1}{2}$만큼의 영향을 준다는 점도 인식하였다. 이에 본 연구자는 논의를 종합하여, 격자점으로 이루어진 다각형의 넓이(S)는 내부점의 개수(b)와 경계점의 개수(i)에 따라 $S=\frac{1}{2}b-1+i$ 로 표현할 수 있다[10]고 정리하였다.

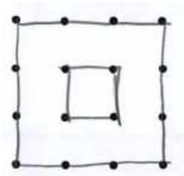
정리②를 발견하는 과정에서 S1은 반례①에 기존의 정리①를 적용해보고 그 차이가 내부점의 개수로 인해 발생된 것이라고 추측했다. S1은 어떠한 수학적 근거를 제기하기 보다는 우연히 그렇게 해보았던 것이다. 이에 반해 S2는 정리①을 발견하는 과정을 근거로 해서 유추적 사고를 했다고 볼 수 있다. 정리①이 내부점은 그대로 유지하고 경계점을 하나씩 늘려가면서 발견되었으므로, 이번에는 경계점은 그대로 유지하면서 내부점의 개수를 하나씩 늘려가면서 규칙을 발견하려고 한 것이다. 비록 그 규칙이 내부점과 경계점의 구분을 하지 않아서 특수한 경우에만 성립하였지만, 이러한 사고방식은 수학적으로 자

9) [그림Ⅱ－1]을 반례①로 표현하겠다.
10) 논의의 편의상 이러한 명제를 정리②로 표현하겠다.

연스럽고 이해가 가능하였기에 S3와 S4가 후속해서 S2의 아이디어를 발전시킬 수 있었던 것이다. 그 결과 우연한 추측이었던 S1의 공식이 수학적인 근거를 얻게 되고 정리②로서 제 모습을 갖출 수 있게 된 것이다.

예비교사들이 반례①에 대처하면서 정리①을 정리②로 개선하는 과정을 보조정리합체법으로 설명할 수 있다. 보조정리합체법은 증명분석을 통해 반례를 유발시킨 부분추측 혹은 보조정리를 찾고 수정하여 증명에 합체시키고 원시 추측에 조건을 추가하는 방법이다. 그런데 예비교사들이 정리①, 정리②를 발견하면서 증명을 한 것은 아니므로, 예비교사들의 활동을 보조정리합체법으로 보기에 힘든 측면이 있다. 그러나 증명은 추측을 부분추측으로 분해하는 과정이라는 Lakatos의 관점에서 보자면, 반례①의 등장은 예비교사들에게 정리①을 발견하는 과정을 보다 상세하게 분석하는 계기가 되었다. 즉, 정리①을 발견하는 과정을 분석하여 내부점과 외부점의 역할이 다르다는 점을 찾아내어 내부점과 외부점을 구분할 필요성을 인식했다고 볼 수 있다. 반례①이 정리①을 반박할 수 있는 근본적인 원인이 내부점과 외부점을 구분하여 생각하지 않았다는 데 있음을 발견하고 이러한 조건을 정리①에 추가해서 찾아낸 것이 정리②라고 볼 수 있다.

정리②가 제시된 이후, 예비교사들은 또 다른 반례가 존재할 수 있다는 생각을 하였다. 이미 앞서 반례를 찾아본 경험이 있었기 때문에 이는 자연스러운 반응이었다. 연구자는 아직 수학적인 증명이 이루어진 상황이 아니므로 반례가 존재할 가능성이 충분함을 지적하며 반례 찾기를 장려하였다. 이 과정에서 두 가지 유형의 반례가 제시되었다([그림 Ⅳ-4], [그림 Ⅳ-5]).



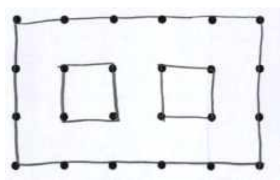
[그림 Ⅳ-4]반례②

[그림 Ⅳ-5]반례③

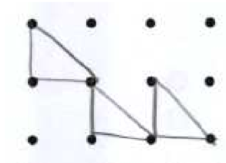
반례에 대처하는 예비교사들의 반응에는 일정한 흐름이 있었다. 앞서 반례를 포함하도록 공식을 수정해서 성공했듯이 이번에도 반례를 포함하도록 공식을 변형하였다. 반례를 포함하도록 공식을 변형하려는 시도가 나타났다.

S5: 반례②의 경우 기존 공식을 적용하면 넓이가 $\frac{16}{2}-1+0=7$인데, 실제 넓이는 8이거든요. 다각형 내부에 있는 구멍의 개수를 더하면 될 것 같아요. 실제로 구멍이 2개인 도형을 그려봤더니 넓이에서 2만큼 차이가 있었어요([그림 Ⅳ-6]). 그러니까 구멍이 있는 다각형의 경우에 구멍의 개수를 h라고 하면, $S=\frac{1}{2}b-1+i+h$ 라고 하면 될 것 같아요.

S6: 반례③의 경우엔 겹치는 점의 개수가 영향을 주더라구요. 반례③을 기존 공식대로 계산하면, $\frac{5}{2}-1+0=\frac{3}{2}$인데 실제 넓이는 1로 그 차이가 $\frac{1}{2}$이거든요. 그런데, [그림 Ⅳ-7]처럼 겹치는 점이 2개일 때는 넓이의 차이가 1이 되요. 그러니까 서로 겹치는 다각형의 경우 겹치는 점의 개수를 d 라고 하면 $S=\frac{1}{2}b-1+i-\frac{1}{2}d$ 가 되요.



[그림 Ⅳ-6] 구멍이 2개

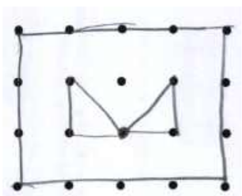


[그림 Ⅳ-7] 겹치는 점이 2개

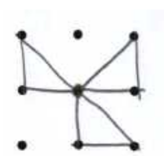
그러나 변형된 공식에 대한 또 다른 반례가 제기되자([그림 Ⅳ-8], [그림 Ⅳ-9]) 공식을 변형하기 보다는 반례를 구분하는 모습을 보였고, 결국에는 반례에 대한 의문을 제기하게 되었다. 우선, 반례를 유형화하려는 모습이 나타났다.

S5: 반례③은 구멍이 서로 떨어져 있고, 반례④는 구멍이 서로 겹쳐져 있는데, 내가 말한 공식 ($S=\frac{1}{2}b-1+i+h$)은 반례③처럼 구멍이 서로 떨어져 있는 경우에만 성립하는 것 같아요. 반례④와 같은 경우는 다시 공식을 변형하면 될 것 같은데.. 그럼 너무 복잡해질 것 같고..

S6: 내가 말한 공식($S=\frac{1}{2}b-1+i-\frac{1}{2}d$)은 반례⑤처럼 겹쳐진 점에 3개 이상의 도형이 붙어 있는 경우엔 적용되지 않는 것 같네요. 제 공식은 2개의 도형이 한 점에서 겹쳐진 경우에만 적용된다고 볼 수 있겠네요..



[그림 Ⅳ-8] 반례④



[그림 Ⅳ-9] 반례⑤

S5, S6 모두 새로 제기된 반례를 통해 자신이 발견한 공식의 적용 범위를 보다 구체화시켰다. 즉, S5가 발견한 내용은 내부에 구멍이 있는 다각형의 경우 그 구멍이 서로 겹쳐있지 않다면, 그 다각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}b-1+i+h$ 이라는 것이고, S6이 발견한 내용은 한 점에서 서로 겹쳐있는 다각형의 경우, 그 겹쳐진 점에 두 개의 다각형만이 연결되었을 때, 그 다각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}b-1+i-\frac{1}{2}d$ 라는 것이다. 그러나 이러한 주장에 대해 예비교사들은 너무 복잡할 뿐만 아니라 이런 식으로 하다보면 무수히 많은 경우가 존재할 수도 있는데 그 때 마다 이렇게 설명하는 것은 의미가 없다고 생각하였다. 즉, $S=\frac{1}{2}b-1+i$로 충분하다는 생각에 도달하였다. 실제로 여기에는 두 가지 근거가 제기되었다.

S7: 저는 반례②,③,④,⑤가 반례가 아니라고 생각해요. 우리가 너무 반례 찾는 것에 몰두해서 괴상한 도형만 찾아내고 있었는데, 그러한 도형은 다각형이 아닌 것 같아요. 그냥 다각형에 대해서만 생각하면 $S=\frac{1}{2}b-1+i$로 충분하다고 봅니다.

S8: 저도 비슷한 생각인데요. 덧붙이자면 $S=\frac{1}{2}b-1+i$을 이용해서 반례②,③,④,⑤ 넓이를 충분히 구할 수 있어요. 반례②의 경우 구멍 생각하지 않고 큰 사각형 넓이를 공식으로 구하고 구멍 부분이 작은 사각형도 공식으로 구할 수 있으니까 두 개 구해서 빼면 구멍 뚫린 사각형 넓이가 나오잖아요. 마찬가지로 반례③은 붙어 있는 삼각형에 대해 따로 따로 공식을 적용해서 더하면 되잖아요. 이렇게 $S=\frac{1}{2}b-1+i$로도 충분하니까 반례②,③,④,⑤는 반례로서 의미가 없다고 생각해요.

예비교사들은 반례①과 반례②,③,④,⑤를 구분하였다. 반례①은 정리①을 개선해야 하는 이유가 될 수 있었고 그로부터 정리②라는 개선된 결과를 도출하는 반례로서의 역할을 했지만, 반례②,③,④,⑤는 정리②를 개선해야 하는 이유가 될 수 없다고 본 것이다. 그 이유는 두 가지였

다. 하나는 반례①은 다각형의 정의에 부합하지만 반례②,③,④,⑤는 다각형으로 보기 힘들다는 점이 있고, 다른 하나는 정리①로는 반례①의 넓이를 계산할 수 없었지만, 정리②로는 반례②,③,④,⑤의 넓이를 계산할 수 있다는 점 때문이었다. 이러한 과정에서 예비교사들은 다각형의 정의를 반성하는 경험을 했다고 볼 수 있다. 예비교사들은 다각형은 내부에 구멍이 없어야 하고 변이 서로 겹쳐서는 안 된다는 사실을 확인하였고, 그러한 성질이 다각형의 직관적인 형태뿐만 아니라 Pick의 정리라는 수학적 법칙의 일반성과도 관련이 있음을 인식할 수 있었다.

예비교사들이 반례②,③,④,⑤에 대처하는 과정에서 괴물배제법, 괴물조정법, 예외배제법이 나타났다. S5가 반례②에 대처하기 위해 $S=\frac{1}{2}b-1+i+h$ 라는 공식을 제기했는데, 이를 반박하는 반례④가 등장하자 자신이 발견한 공식은 '다각형 내부의 구멍이 서로 겹치지 않을 때'에는 성립한다고 자신의 공식을 수정하였다. 즉, 반례를 제외하기 위해 자신의 추측에 조건을 첨가하는 예외배제법이라고 볼 수 있다. 그러나 S5는 곧 이러한 방식으로 대처하는 것의 한계를 인식했다고 볼 수 있다. 반례③,④,⑤ 각각에 대해 서로 다른 공식이 존재해야 하기 때문이다. S7은 반례②,③,④,⑤가 '괴상한' 도형이라 언급하며 다각형에 대해서만 생각할 것을 요구했는데, 이는 괴물배제법에 해당한다고 볼 수 있다. 예비교사들은 괴물배제를 위해 다각형을 엄밀하게 정의할 필요성을 느꼈다. 즉, 변이 서로 겹치거나 내부에 구멍이 있는 도형은 다각형이 아니라는 조건을 다각형의 정의에 첨가하였다. S8은 반례②,③,④,⑤가 괴물도 예외도 아니라고 생각했다. 기존의 공식으로 이들의 넓이를 계산할 수 있으므로 반례로서의 의미가 없다고 본 것이다. 즉, 반례②,③,④,⑤는 각각이 기존 공식으로 구할 수 있는 다각형의 혼합이라고 본다면 반례가 실제로는 반례가 아닌 예가 될 수 있다는 것이다. 이는 괴물조정법에 해당한다. 이처럼 예비교사들은 반례②,③,④,⑤에 대처하면서 괴물배제법, 예외배제법, 괴물조정법을 경험할 수 있었는데, 결국 예비교사들은 괴물조정법을 선호하였다.

2. 예비교사들의 Pick의 정리에 대한 수업일기 분석

예비교사들이 수업에서 배운 내용을 정리하고 반성할 수 있도록 수업일기를 작성하게 하였다. 수업일기의 형식은 지난 수업에서 새로 알게 된 것, 지난 수업에서 아직 이해가 안 되는 것, 오늘 수업에서 알고 싶은 것 등의 세 가지 질문으로 구성되었고 각각에 대해 자신의 생각을 자유롭게 적도록 하였다. 수업일기는 매 수업마다 작성하도록 하였고 본 연구에서는 Pick의 정리에 대한 수업일기의 내용을 분석하였다. 예비교사들의 수업일기 내용을 분석한 결과 수학에 대한 관점의 변화와 수학을 가르치는 방법에 대한 관점의 변화를 확인할 수 있었다.

가. 수학에 대한 관점의 변화

예비교사들은 수업을 통해 배운 내용으로서 격자점으로 이루어진 다각형의 넓이는 $S=\frac{1}{2}b-1+i$로 구할 수 있다는 Pick의 정리를 기억하기 보다는 그 결과에 이르는 과정 자체를 인상 깊게 느끼고 있었고, 자신과 친구들이 그 과정에 직접 참여했다는 경험을 통해 수학에 대한 자신감을 형성할 수 있었다.

가장 인상 깊었던 수업 내용은 '점과 도형의 넓이 간 규칙성 찾기 활동'이었습니다. 작은 규칙성 찾기

에서부터 시작해서 차츰 확대되어 큰 틀을 지닌 이론으로 확립되는 과정을 직접 경험함으로써 다시금 수학의 성격과 논리성을 깨달았습니다(S9).

$S = \frac{1}{2}b - 1 + i$ 라는 일반화된 식을 도출하면서 뿌듯함을 느낄 수 있었고 꼭 수학자만이 이러한 과정을 알 수 있는 것이 아니라 우리 또한 수학적 원리에 대해서 풀 수 있다는 자신감을 가질 수 있었다. 또한 다각형의 넓이의 일반식을 기하판의 특징을 이용하여 도출하라는 문제에 대해서 함께 토론하면서 답을 내놓고 그것에 대한 반증이 나오고 또 그 반증을 대체할 수 있는 대안을 내놓으면서 수학적 사고력이 길러진다는 것이 어떠한 것인지 느낄 수 있었다(S10).

위 수업일기 내용을 통해 예비교사들의 수학에 대한 관점을 엿볼 수 있다. 수학이란 처음부터 정의가 제시되어 연역적으로 전개되는 것이 아니라 '규칙성 찾기에서 시작'하여 점진적으로 '큰 틀을 지닌 이론'으로 발전한다는 관점을 갖게 되었으며, 수학이란 특별한 수학자만이 할 수 있는 것이 아니라 누구나 그 과정에 참여하여 발견의 기쁨을 느낄 수 있다는 생각을 갖게 되었다. 또한 수학이란 처음부터 완벽한 형태로 제시되기 보다는 추측과 반증 그리고 토론을 통해 점진적으로 발전한다는 관점을 형성하였다.

예비교사들은 수학을 발견하는 과정에 직접 참여하면서 자신이 발견한 수학적 내용보다는 수학에 대한 관점을 새로 배웠다고 볼 수 있다. 수업의 표면적인 목적은 Pick의 정리를 발견하는 것이었고 실제로 예비교사들은 자신이 발견한 Pick의 정리 자체에 대해서도 놀라움을 느꼈으나 수업일기를 분석한 결과 그들은 이번 수업을 통해 하나의 정리를 배운 것이 아니라 수학을 새롭게 볼 수 있는 안목을 형성한 것이었다. 다음 학생의 수업일기 내용은 수학에 대한 관점이 극적으로 변화했음을 잘 보여주고 있다.

중,고등학생 때 수학공부를 하다가 너무 어려워서 짜증을 낼 때면 늘 입버릇처럼 나오던 말이 바로 '수학 배워서 뭐해?'였다. 솔직히 로그나 함수를 배운다고 해서 우리가 평소에 물건을 사거나 친구와 대화를 할 때 사용 되는 것도 아닌데 일상생활에 사용되지도 않고 몰라서 지장이 없으면 굳이 어려운 것을 배워야 할 필요가 있냐고 생각했다. 그런데 오늘 수업을 듣고 나서 이러했던 내 생각이 틀렸다는 것을 깨닫게 되었다. 우리는 수학을 통해서 오로지 수학적 문제를 해결하는 것을 넘어서 수학적사고 방법을 발견하게 되고 이를 통해 수학적 태도를 기르며 이러한 태도와 사고능력은 일상생활에서 문제를 해결하는데 있어서 도움을 준다. 그러므로 수학은 꼭 수학적으로 연관되어있고 수가 포함되어있는 문제에만 영향을 주는 것이 아니라 우리의 전반적인 삶과 관련 맺고 있는 중요한 학문이다. 특히 오늘 수업에서는 우리가 왜 수학을 배우는가, 과연 수학자들은 어떠한 문제를 해결하기 위해서 노력하고 있는 가에 대해서 유치원 다닐 때 흔히 볼 수 있었던 기하판을 이용하여 한 번 경험해볼 수 있었다(S11).

위 수업일기 내용은 수학교육의 필요성과 목적에 대한 예비교사의 관점이 변화된 계기를 잘 보여주고 있다. 이처럼 수학에 대한 관점의 변화는 직접 수학을 발견하는 '한 번'의 경험을 통해 실질적으로 일어날 수 있는 것이다.

나. 수학을 가르치는 입장에서의 변화

예비교사들은 자신들이 직접 수학공식을 추측하고 반례를 찾고 다시 추측을 개선하는 과정을 경험하면서 이러한 수업이 기존의 수학수업과 다르다는 점을 인식하였다. 수업 형식의 측면에서는 수학수업에서도 교사와 학생 그리고 학생들 사이의 상호작용이 활발하게 일어날 수 있고, 수학적 내용에 대한 토의가 가능하다는 점을 기존 수학수업과의 차이점으로 지적하였다.

> 이번 주 수업은 새로운 개념을 도입해서 수업의 핵심 내용을 이해(픽의 정리->수학적 사고방법)하는 방식으로 진행되었습니다. 그리고 수업의 내용을 이해하는 과정에 '토의'라는 수업 형태를 접목시킴으로써, 수학이란 과목의 가장 큰 한계점인 '교수자 중심의 일방적인 수업'을 줄일 수 있었던 것 같습니다. 앞으로도 '교수자와 학습자의 원활한 상호작용이 이루어 질 수 있는 수업'이 이루어졌으면 좋겠습니다(S12).

예비교사들은 본 수업을 통해 '교사 중심의 일방적인 수업'을 극복할 수 있다는 가능성을 확인하였다. 자신들이 스스로 규칙을 발견하고 일반화 해 본 경험이 나중에 학교현장에서 그러한 수학수업으로 나타날 수 있는 중요한 계기가 되는 것이다.

> 학생들 또한 귀납적 사고 방법을 통해 스스로 규칙성을 발견해내고 일반화 하여, 실생활에 응용하는 일련의 과정으로 확장시킬 수 있게 하는 활동을 통해 능동적인 수학적 태도와 사고를 양성해야 할 것입니다. 이것이 수업에서 가장 중요하다고 느꼈으며, 후에 제가 선생님이 되면 이것과 이와 유사한 활동들을 연구하여 실천할 생각입니다(S13).

예비교사들은 새로운 형태의 수학수업을 경험했을 뿐이지만 이러한 경험은 그들에게 수학에 대한 새로운 관점을 제공하고 수학수업의 대안적인 모습을 상상할 수 있는 기회로 작용했던 것이다.

Ⅴ. 결 론

추측과 반박을 통해 수학적 지식이 성장한다는 Lakatos의 철학에 따라 예비교사교육을 설계하고 그 교육적 효과를 살펴보았다. Lakatos 방법론에 따라 설계된 수업에서 예비교사들은 수학적 추측을 제기하고, 추측에 대한 반례를 발견하고, 반례에 대처하고 추측을 수정하면서 보조정리합체법, 괴물배제법, 괴물조정법, 예외배제법 등을 보여주었고, 이러한 과정에서 다양한 수학적 사고와 전략을 경험할 수 있었다. 예를 들어, 예비교사들은 귀납과 유추를 통해 수학적 추측을 제기하고 수학적 관계를 발견할 수 있었다. 내부점이 없는 다각형에 한정하여 외부점의 개수를 증가시키면서 귀납적으로 격자점과 넓이의 관계를 발견하였다. 이러한 사고방식은 내부점이 존재하는 다각형이 반례로 제시된 이후에도 유용하게 사용되었다. 반례에 적용할 수 있도록 기존의 추측을 수정하기 위해 예비교사들은 외부점의 개수는 유지하고 내부점의 개수를 증가시키면서 새로운 발견을 할 수 있었다. 즉, 예비교사들은 단순히 여러 가지 다각형을 관찰하여 규칙을 찾는 것이 아니라 격자점을 내부점과 외부점으로 구분하고 각각을 체계적으로 변화시키면서 수학적 관계를 찾아내었다. 예비교사들 스스로 내부점과 외부점을 정의했던 것이다. 주어진 정의가 아니라 귀납과 유추를 통해 발견한 수학적 관계를 기술하기 위해서 새로운 수학적 대상을 정의했던 것이다. 예비교사들은 수학적 대상에서 모종의 관계나 법칙을 발견하고 그러한 관계나 법칙에 영향을 주는 요소를 정확하게 찾아내어 수학적 대상으로 만드는 능력을 보여주었다. 예를 들어, 구멍이 있는 다각형, 겹치는 점이 존재하는 다각형 등이 반례로 제시되었을 때, 예비교사들은 각각의 반례에서 구멍의 개수와 겹치는 점의 개수가 본질적인 차이임을 발견하고 그러한 요소를 반영하여 기존의 추측을 개선하였다. 예비교사들은 또한 수학적 의사결정을 경험할 수 있었다. 반례①에 대해서는 정리①을 수정하였으나 반례②③④⑤에 대해서는 각각의 반례에 따라 정리②를 수정하는 것과 반례를 재해석하는 것이라는 선택지를 놓고 고민하였으며,

결국은 반례의 재해석으로 결론지었다. 이러한 결론에 도달하기 위해 예비교사들은 여러 가지 수학적 근거를 검토하였다. 즉, 다각형의 직관적인 개념과 기존 공식의 활용 가능성을 고려하여 반례를 재해석했던 것이다. 이러한 과정에서 다각형에 대한 엄밀한 정의의 필요성이 제기되었다.

예비교사들은 수학을 학습하는 과정에서 귀납과 유추에 의한 수학적 추측과 발견, 수학에서 정의의 필요성과 정의하는 능력, 수학적 근거에 의한 수학적 의사결정 등을 경험할 수 있었다. 이러한 수학적 경험은 예비교사들이 기존의 수학수업에서 경험하기 힘든 것이었고 따라서 수학에 대한 새로운 관점을 형성시키는 중요한 기회가 될 수 있었다. 특히, 수업일기의 내용 분석 결과 예비교사들은 스스로 발견한 Pick의 정리 내용 보다는 그 발견에 이르는 과정 자체에서 깊은 인상을 받은 것으로 나타났다. 이는 초등예비교사교육이 예비교사에게 수학적 활동을 제공하는 기회가 매우 제한적이라는 상황을 고려했을 때, 초등 예비교사교육에서 의미 있는 시사점을 주고 있다. 예비교사들은 '일방적인 전달식 수업' 이라는 수학에 대한 어느 정도의 고정관념을 형성하고 있는데, Lakatos 방법론과 같은 대안적인 수업을 통해 그러한 고정관념을 무너뜨릴 수 있는 가능성을 확인할 수 있었던 것이다. 예비교사들은 본 수업을 통해 수학이 어떻게 발견되고 어떻게 성장하는가를 경험하였으며, 그러한 과정에 자신들도 충분히 참여하고 기여할 수 있다는 자신감을 획득하였다. 이러한 자신감은 수학이 수학자의 전유물이 아니라는 사실을 예비교사들에게 일깨워 주었고, 수학 역시 인간의 활동에 의해 발견되고 점진적으로 개선되면서 성장한다는 관점을 형성하게 만들었다. 따라서 이러한 수학에 대한 관점의 변화는 자연스럽게 수학을 가르치는 방식의 변화와 연결될 수 있다. 수업일기의 분석 결과가 이를 뒷받침하고 있다. 예비교사들은 새로운 수학수업의 가능성을 직접 확인함으로서 새로운 수업에 대한 강력한 동기부여가 되었고, 수학수업에서 상호작용과 토의의 중요성과 가능성을 실감할 수 있었다.

참고문헌

강문봉(1993). **Lakatos의 수리철학의 교육적 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

강문봉(2004). Lakatos 방법론을 초등수학에 적용하기 위한 연구. **수학교육학연구, 14**(2). 143-156.

박경미(2009). Lakatos의 증명과 반박 방법에 따른 기하 교수·학습 상황 분석 연구. **학교수학, 11**(1). 55-70.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습·지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로-**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Larson, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216.

Papadopoulos, I., & Iatridou, M. (2010). Systematic Approaches to Experimentation: The Case of Pick's Theorem. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(4), 207-217.

Wu, H. (2011). The Mis-Education of Mathematics Teachers. *Notices of the AMS, 58*(3), 372-384.

Applying Lakatos Methods to the Elementary Preservice Teacher Education

Lee, Dong-Hwan (Busan National University of Education)

The purpose of this study was to examine how the Lakatos method works in the elementary teacher education program. Elementary preservice teachers were given a task in which they examined the Pick's theorem. The finding revealed that Lakatos method was usable in the elementary teacher education. They produced initial conjecture and found counterexamples, and finally made improved conjectures. These experience encourage them to change their belief of teaching and learning mathematics and to find alternative ways of teaching mathematics.

* Key Words : Lakatos(라카토스), elementary preservice teacher education(초등예비교사교육), Pick's theorem(픽의 정리)

논문접수 : 2013. 10. 8
논문수정 : 2013. 11. 7
심사완료 : 2013. 11. 14