대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 4, 505~516. Nov 2013

초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구[1)]

정 은 실*

이 연구는 비례 추론의 본질이 무엇이며, 비례 추론이 어떻게 발달하는지를 알아보고 비례 추론을 개발하기 위한 요인 중 과제 요인에 초점을 맞춰 지도 방향이 초등학교 수학 교과에서 어떠해야하는지를 알아보기 위한 것이다. 비례 추론은 비례, 비, 비율, 비례식과 관계된 추론으로서, 공변과 다중 비교의 의미를 포함하는 양적 및 질적 추론이다. 2007 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 비와 비율, 비례식, 정비례와 반비례 등 비례 추론과 관련된 내용을 지도하고 있으나 닮음, 속도, 농도, 확대도와 축도 등 다른 교과와 관련된 내용들은 지도하지 않거나 약화시키고 있다. 공변과 관련된 내용은 비와 정비례, 반비례 등에 포함되어 있으나 전개 방식이 동적이라기보다는 정적인 방식이다. 특히 비례식에서는 알고리즘에 의해 결측치를 구하는 데 치중하고 동치인 비를 생각하고 양변의 구조적 유사성을 의식하도록 유도하지는 않는다. 또한 비를 비형식적으로 비교해보거나 비례 상황과 비비례 상황을 구별하는 활동을 찾아볼 수 없다. 초등학교 학생들의 비례 추론을 육성하기 위해서는 교육과정과 교과서 개발 작업에서 이를 뒷받침할 필요가 있다.

Ⅰ. 서 론

2009 개정 수학과 교육과정에서는 수학적 과정의 구성 요소 중 하나인 수학적 추론을 강조하고 있다. 수학적 추론은 '수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것'(한국과학창의재단, 2011, p.45)을 의미한다. 이러한 수학적 추론에는 내용과 무관한 연역 추론, 귀납 추론, 유비 추론 등을 생각할 수도 있으나 내용과 관련된 추론 중 하나로 비례 추론을 생각할 수 있다.

비례 추론은 수학적 추론의 한 형태로서, 초등학교에서 수와 연산의 의미에 의존하는 기초적인 추론이면서 나중에는 학생들에게 대수적 사고와 함수에 대한 감각을 개발하는 수단이 되는 추론이다. 비례 관계의 인식으로부터 시작되는 선형성의 인식은 수학 전체의 바탕이 되는 기본적인 개념이라고 할 수 있다. 또한 비례 추론은 심리적으로 양적 관계를 파악하게 하며, 그 양을 비교하게 하는 사고 방법이다. 비례 추론은 초등학교 산술의 절정인 반면, 뒤따르는 모든 과정의 기초(Lesh, Post, Behr, 1988)라고 할 정도로 초등학교에서의 비례 추론은 가장 높은 수준의 초보적 이해의 하나이고 가장 기본적인 고차원적 이해의 하나이다.

이 연구에서는 이러한 비례 추론 지도의 방향이 초등학교 수학 교과에서 어떠해야하는지를 알아보려고 한다. 먼저 비례 추론의 의미와 본

---

* 진주교육대학교, esjeong@cue.ac.kr

1) 이 논문은 2012학년도 진주교육대학교 교내연구비 지원을 받아 작성된 것임.

질, 그리고 비례 추론이 학생들에게 어떻게 발달되어 가는지를 살펴본다. 비례 추론은 과제를 해결하는 학생의 머리 속에서 일어나는 사고 과정이므로 비례 추론을 유발하는 과제는 어떠한 것이 있는지를 알아보고 우리나라 초등학교 수학교과에는 이러한 비례 추론을 개발하기 위한 적절한 과제를 제시하고 있는지를 비판적으로 살펴보기로 한다.

II. 비례 추론의 의미

자주 사용하는 말이면서도 비례 추론이 무엇인가를 설명하기는 쉽지 않다. 비례 추론은 proportional reasoning을 번역한 것으로, propotion과 관계된 추론이라고 할 수 있다. proportion을 우리나라에서는 비율, 비례 또는 비례식으로 번역하니, proportional reasoning은 비례 추론 또는 비율적 추론이라고 할 수 있다. 비례 추론은 비례와 관련된 추론, 비례 관계를 사용하는 추론으로 보아 비례식이나 정비례 상황과 관련된 추론으로만 생각하기 쉽다.[2]. 실제로 Karplus, Pulos, Sage(1983)는 비례 추론을 "1차함수 관계가 존재하는 두 변수 체계에서의 추론"이라고 범위를 좁혀 해석하였다. 하지만 그렇게 해석하는 것은 비례 추론을 너무 좁게 해석하는 것이다. 미국에서는 proportion을 ratio와 rate와 같은 의미로 사용하기도 한다. 기호 $a:b$로 표현하는 아이디어를 나타내기 위하여 중세 라틴 저자들은 ratio 대신에 proportio라는 단어를 사용했고, $a:b$ = $c:d$로 표현되는 비례식은 proportionalitas라는 단어를 사용했다. 중세와 르네상스 시대에 비를 뜻하는 용어로 proportion이란 단어를 보편적으로 사용했다는 것은 그 당시 대부분의 수학 저서에서 확인할 수 있다. 그래서 미국에서는 아직까지도 이 두 단어를 혼용하는 경우가 많다(Bassarear, 2001, p.307). proportion은 문맥에 따라 비, 비율, 비례, 비례식 등 여러 가지로 해석해야 하는 이유이다. 그러므로 비례 추론은 단지 비례와 관계된 추론일 뿐 아니라 비, 비율, 비례식과 관계된 추론이라고 할 수 있다.

좀 더 본질적인 비례 추론의 의미로 Post, Behr, Lesh(1988)는 비례 추론은 공변(covariance; 共變)과 다중비교의 의미를 포함한다고 주장한다. 공변은 어떤 관계가 있는 두 변수 사이에 동시에 일어나는 변화를 지칭하는 말로서 정비례, 반비례 관계에서와 같이 두 양 중 한 양이 변할 때 다른 양이 첫 번째 양과 함께 정확한 방식으로 변하는 방식으로 서로 연결되어 있는 것이다. 비례 추론은 또한 두 개의 주어진 쌍의 비 또는 비율을 비교하도록 요구한다. 피아제의 표현을 빌면 '제2차 관계(즉, 두 관계에 대한 관계)'(English, Halford, 1995, p. 245)이다. 비 또는 비율 자체가 어떤 두 양을 비교하는 것인데 그 비 또는 비율을 비교하고 있다는 점에서 다중비교이다.

Lamon(2006)이 지적하는 것처럼 비례 추론의 추론에 초점을 맞춰 생각해보면 추론은 맹목적으로 규칙이나 공식에 수를 대입하여 계산하는 것이 아니다. 추론은 규칙 지향적이거나 기계화된 절차와 결합된 것이 아니라 자유롭게 흐르는 정신 과정과 결합된 것으로서 이는 양 사이의 관계에 대해 의식적인 분석을 요구한다. 이는 비례 추론에서 질적 사고의 필요성을 말해주고 있다. Van de Walle(2008)도 비례 추론은 양적 사고는 물론 기계적 또는 알고리즘을 지닌 기능에

2) 2009 개정 초등학교 수학과 교육과정에는 비례식, 비례배분, 정비례, 반비례, 비례상수라는 용어가 나오지만 '비례'라는 용어는 나오지 않는다. 이전 교육과정에도 '비례'라는 용어를 소개하지 않고 교과서(교육부, 1998, p.118)에서 'y는 x에 비례한다'를 'y는 x에 정비례한다'와 같은 의미로 소개하고 있다.

의존하지 않는 질적 사고를 포함한다고 하고 있으며, Post, Behr, Lesh(1988)도 비례 추론에 포함된 질적 사고에 대해 논의하고 있다. 예를 들어 'A가 어제 보다 더 많은 시간에 더 적은 거리를 달렸다면, A의 달리기 속도는 더 빠른가, 늦은가, 같은가 아니면 말할 수 없는가?', '더 적은 시간에 더 적은 거리를 달렸다면 어떤가?' 와 같은 상황에서 질적 추론은 두 비의 의미를 해석하고, 정보를 저장하며 이미 정해진 준거에 따라 이런 해석을 비교하는 능력을 요구한다. 이런 과정은 알고리즘에 의한 접근과는 사뭇 다른 여러 수준에서 비교하는 사고를 요구한다.

이를 정리하면 비례 추론은 비례, 비, 비율, 비례식과 관계된 추론으로서, 공변과 다중비교의 의미를 포함하는 양적 및 질적 추론이라고 말할 수 있다.

III. 비례 추론의 발달

비례 추론의 학습은 오랜 시간에 걸쳐 천천히 일어난다. Freudenthal(1983)은 개념으로서의 비나 지적 대상으로서의 비는 꽤 높은 발달 수준을 요구하지만, 비에 대한 느낌을 가지는 것이나 비에 대한 시각을 갖게 되는 것은 발달 초기에 이뤄진다고 말하고 있다. Resnick과 Singer(1993)도 수를 사용하지 않고 비와 같은 관계에 대하여 추론하게 하는 원시 양 개념 도식(protoquantitative schema)을 아동들이 가지고 있다고 주장하고 있다. 그 중에서 맞추기(fittingness) 도식과 공변 도식이 원시 양 개념 지식의 기초를 형성하고 있다고 본다. 피아제는 학생들의 비례 추론은 가법적 추론에서 일반적 형태의 승법적 비례 추론으로 발달한다고 하고 있다(Tourniaire, F., Pulos, S., 1985).

피아제에 의하면 일반적으로 학생의 비례 추론은 전체적인 보정 전략(원래 가법적이다)에서 모든 경우로 일반화하지 않는 승법적 전략으로 또 최종적인 비례 법칙의 형식화로 발달한다. Lesh, Post, Behr(1988)는 피아제의 과정을 좀 더 구체적으로 다음과 같이 더 세분하여 설명하고 있다.

비례 추론 과제에 대한 첫 반응으로 학생들은 자료의 일부를 무시하여, 예를 들면 등식 A/B=C/D에서 단지 분자만을 비교하는 경우가 있다.

다음 수준으로 비례식 A/B=C/D의 네 성분 사이의 관계를 주목하지만 질적 방식으로만 그것들을 관련짓는다. 양화를 처음 시도하는 수준은 승법적 관계라기보다는 일정한 가법적 차(A-B = C-D)를 포함한다. 가장 초기에 사용하는 승법적 추론은 '패턴 인식과 반복' 전략(build-up 전략이라고도 한다)에 기초하고 있다. 예를 들어 2개에 80원하는 사탕이 있을 때, 6개의 값을 구하기 위해 2개에 80원, 4개에 160원, 6개에 240원과 같이 생각하는 전략이다. 학생은 패턴을 주목하고 미지의 값을 구하기 위해 그 패턴을 적용하지만 이 전략을 성공적으로 사용했다고 해서 비례 추론을 했다는 것을 보장하는 것은 아니다. 피아제는 이 단계를 '비례 이전' 단계라고 말했다. 차(差)는 수의 크기와 함께 변한다는 직관과 그 변화는 본래 승법적일 것이라는 직관을 학생들은 가지고 있지만, 각 비의 관련 항 사이에 일정하게 증가하는 차를 고려할 필요가 있음을 알지는 못하기 때문이다. 피아제에 의하면 비례 이전 단계는 함수를 조정함으로 생겨나는 반면, 비례성은 가역적인 연산에 기초한다고 말한다. 함수 관련 사고와 연산 관련 사고 사이의 주요한 차이는 함수 관련 사고는 본질적으로 비가역적이라는 것이다. 즉 학생은 비례식에서 네 변수 중 하나가 변할 때 나머지 변수 중의 하나를 변화시킴으로 보정할 수 없다. 마지막 피아제의 '논리적 비례' 수준은 두 항 사이에 승법적 관계를 주목하게 되는 사고 수준이다. 이 관계는 다른 두

항에도 적용된다.

Lesh, Post, Behr(1988)는 문제를 해결하는 과정에서 학생이 사용하는 전략에 초점을 맞추어 비례 추론의 발달 단계를 '개념화'라는 용어를 사용하여 피아제가 제시한 과정과 비슷한 단계를 제시하고 있다.

개념화 1단계는 문제에 주어진 정보 중 편향된 일부에 기초하여 가법적 추론을 사용하는 단계이다. 개념화 2단계도 편향된 정보를 포함하고 상당히 초보적인 관계에 기초하지만 승법적 관계를 이용한다. 개념화 3단계는 패턴을 인식하고 비례 이전 추론의 반복 형태를 사용했다. 개념화 4단계는 진정한 승법적 비례 관계를 사용하지만, 아직도 여전히 편향된 일부 정보에 기초한다. 마지막 개념화 5단계는 분명하고 명시적인 표본 절차에 기초하여 승법적 비례 관계를 사용하는 단계이다. 여기에서 학생들은 처음으로 'A : B = C : D'와 같은 형태의 수학적 문장을 사용했다.

NCTM(2010)은 학생들이 비와 비율을 이해하고, 비례 추론이 발달되는 과정에서 몇 번의 사고 전환이 일어난다고 보고 있다. 첫째는 하나의 양에서 두 개의 양으로 전환하는 것이고, 둘째는 덧셈 비교에서 곱셈 비교로의 전환이다. 그리고 합성 단위 전략에서 곱셈 비교 전략으로, 한 합성 단위를 반복하는데서부터 여러 개의 동치인 비를 만드는데로의 전환이다.

이러한 비례 추론 발달 단계가 순차적으로 일어나는가에 대해서는 부정적인 의견이 많다. 박정숙(2009)은 여러 연구를 검토한 결과를 바탕으로 비례 추론의 발달 단계가 순차적이라는 가정에 의문을 제기하고 있다.

Ⅳ. 비례 추론을 개발하기 위한 과제

앞에서 살펴보았듯이 비례 추론은 여러 가지 의미를 포함하고 있으며 그 발달 단계 또한 복잡한 과정을 거친다. Van de Walle(2008)은 비례적 사고를 하는 학생들의 특징을 열거하고 있는데, 첫째는 공변 감각을 가지고 있어서 하나가 변하면 다른 하나가 어떻게 따라 변할 것인지를 찾아낼 수 있고, 둘째는 실생활 상황에서 비례 관계와 비비례 관계를 구별할 수 있다는 점이다. 셋째는 비례식을 풀거나 비를 비교할 때 다양한 전략을 사용하는 정신적 유연성을 지니고 있으며, 이러한 전략은 이미 규정되어 있는 알고리즘이 아니라, 대부분 비형식적 전략을 바탕으로 한다고 말하고 있다. 마지막으로 표면적으로 보이는 두 양을 비교하지 않고, 두 양사이의 관계를 나타내는 비를 이해할 줄 안다고 말하고 있다. 이를 통해 비례 추론의 구성 요소를 추출해볼 수 있다. 비례 추론은 공변에 대한 생각, 비례 상황과 비비례 상황의 구별, 다양한 비형식적 문제해결 전략, 비의 비교 등으로 구성되어 있음을 생각할 수 있다. 학생들로 하여금 이러한 구성 요소로 된 비례 추론을 개발하기 위해서 어떻게 해야할 것인지에 대해서도 여러 가지로 논의할 수 있다.

Tourniaire, Pulos(1985)는 비례 추론에 영향을 주는 변인을 과제 중심 변인, 학생 중심 변인으로 나누고 있다. 같은 과제라도 어떻게 지도하느냐에 따라 비례 추론의 개발은 달라질 수 있으나, 다루는 과제를 어떤 것으로 하느냐 하는 것 또한 중요한 변인이다. 본 연구에서는 학생 중심 변인이나 교사 변인 등은 고려하지 않고 초등학교 수학과 교과서에 나오는 과제들을 중심으로 하여 비례 추론의 육성에 적절한 것인지를 논의해보기로 한다.

우선 비례 추론을 유발할 수 있는 내용으로서 NCTM(2000)은 여러 영역의 교육과정 활동 즉 비와 비율, 백분율, 닮음, 축척, 일차방정식, 기울기, 상대돗수, 히스토그램, 확률 등을 포함하는

활동을 들고 있다. 더 나아가 많은 수학적 주제를 연결하여 통합하고, 수학과 다른 과목-과학과 미술-을 연결시키는 것이 중요함을 지적하고 있다. 여기서는 초등학교에만 제한하지 않고 중학교, 고등학교까지 포함된 과제를 생각하고 있는데 우리나라 초등학교 교육과정으로 제한한다면 비와 비율, 비례식, 연비와 비례배분, 정비례와 반비례를 생각할 수 있다. 하지만 NCTM(1989)이 제시한 '모든 교실의 유리창이 16개씩 있다면 20개의 교실에는 몇 개의 창이 있겠는가?'[3]와 같은 간단한 곱셈 문제 상황까지 포함한다면 그 범위는 더 넓어진다. NCTM(1989)은 학생들로 하여금 비례 추론을 통해 해결할 수 있고 또 모델화 할 수 있는 다양한 문제 상황을 경험케 하는 것이 중요함을 말하면서 위와 같은 간단한 문제 상황부터 '8명이 3일간 캠핑을 가려고 한다. 안내 책자에는 하루에 5명이 12.5L의 물이 필요하다고 한다. 얼마만큼의 물을 가져가야 하는가?'와 같은 복잡한 상황을 경험해야한다고 하고 있다. 또한 수로 주어진 상황 뿐 아니라 도형의 닮음과 축척과 같은 기하학적 상황도 제공되어야 한다고 하고 있다. Freudenthal (1976)도 수치적 자료가 도입되지 않은 시각적 문맥에서 상대적인 관점과 비를 파악하도록 할 수 있다는 점에서 닮음, 그림자의 그림과 같은 과제가 교수학적으로 유효하다고 하고 있다.

NCTM(2010)은 더 구체적으로 과제를 세분하여 비례 추론 문제를 다섯 형태로 나누고 있다.

첫째는 비를 비교하는 문제이다. 예를 들어 2시간, 5시간, 7시간, 8시간의 운전을 한 후의 거리가 각각 130마일, 325마일, 445마일, 510마일이라고 할 때, 이 운전자는 계속 같은 속도로 운전했는가, 속도가 더 빨라졌는가 아니면 더 느려졌는가하는 문제이다.

둘째는 '오전 시간에 A, B는 같은 속도로 걸었다. 하지만 A는 더 많은 시간을 걸어서 더 많이 걸었다. 오후에 A는 오전에 간 거리보다 두 배를 갔지만 시간은 오전과 같다. B는 오전과 같은 거리를 갔지만 시간은 오전 시간의 절반이다. 오후에 A는 B보다 더 빨리 걸었는가, 더 늦게 걸었는가 아니면 같은 속도로 걸었는가?'와 같은 변환 문제이다. A/B = C/D에서 A, B, C, D 중 어느 하나 또는 둘이 증감에 따라 양변의 값이 어떻게 변하게 되는지를 판단하는 변화 방향의 판단 문제이다.

셋째의 평균값 문제는 $A/x = x/B$에서 x를 구하는 형태의 문제로서 'A의 톱니의 수는 48개, C의 톱니의 수는 12개일 때, A와 B의 회전비와 B와 C의 회전비가 같게 되려면 B의 톱니 수는 얼마라야 하는가?'하는 문제이다. 넷째 '부분-부분-전체와 포함 문제'는 '8컵의 물과 4컵의 레몬 농축액으로 만든 레몬 쥬스와 10컵의 물과 6컵의 농축액으로 만든 레몬 쥬스 중 어느 것이 더 진한가?'와 같은 문제인데 소재는 다르지만 문제의 구조는 첫째 비교 문제와 같다. 다섯째의 '닮음과 축척 문제'는 '닮음인 두 직사각형이 있다. 하나는 가로, 세로가 각각 15cm, 9cm이고, 다른 하나의 세로가 24cm라면 가로의 길이는 얼마인가?' 와 같은 형태이다. 이상의 문제에서도 초등학교에서 다룰 수 있는 내용은 제한적이다.

Lesh, Post, Behr(1988)는 비례 관련 문제를 7가지 형태로 나눈다. 결측치(misssing value) 문제, 'A/B와 C/D 중 어느 것이 더 큰가?'와 같은 비교 문제, A/B = C/D에서 A, B, C, D 중 어느 하나 또는 둘이 증감에 따라 양변의 값이 어떻게 변하게 되는지를 판단하는 변화 방향의 판단 문제, A/B < C/D에서 네 값 중 어느 하나 예를 들면, $(A+x)/B = C/D$가 되도록하는 x값 구하기와 같은 등식을 만들기 위한 변환 문제이다. 그리고 기하 평균($A/x = x/B$)이나 조화평균(A/B = (A-

3) 이 곱셈 상황을 $1 : 16 = 20 : x$ 과 같은 비례식으로 보아 $x = 16 \times 20$ 으로 계산한다는 것이다.

x)/(x-B))을 구하는 평균값 문제, 비에서 비율, 분수로의 변환을 포함하는 비례 문제(예: 어느 반의 남자와 여자의 비는 15:12이다. 이 반의 남자는 전체의 몇 분의 몇인가?), 수는 물론 단위명을 포함하는 비례 문제(3피트/2초 = x마일/hr), 마지막으로 양식 간(Between-Mode) 번역 문제로 한 표현 체계(말, 그림, 식 등을 말함)에서 비(또는 분수 또는 비율 또는 몫)가 주어졌을 때, 다른 표현 체계를 사용하여 같은 관계를 묘사하는 문제 등이다.

Van de Walle(2008)도 비례적 사고 과정을 발달시키기 위해 앞의 연구자와 같이 비와 비례식에 관한 과제를 다양한 상황 속에서 제시하라는 것과 비를 예측하고 비교하는 과제 외에 학생들에게 비례 상황과 비비례 상황을 제공하고 그 차이점을 토론하도록 함으로써 두 상황을 구별할 수 있도록 도와야 한다고 하고 있다. 예를 들어 다음과 같은 과제를 비례식으로 푼다면 이 학생은 비례 상황과 비비례 상황을 구별 못하는 것이고 비례 추론을 제대로 하는 것이라고 하기 어렵다.

A와 B는 같은 빠르기로 운동장을 달리고 있다. A가 먼저 출발하여 9바퀴를 도는 동안에, B는 3바퀴를 돌았다. 두 사람이 계속 일정한 빠르기로 달린다고 하고 B가 15바퀴를 돌았을 때, A는 몇 바퀴를 돌았겠는가?

그 뿐 아니라 대각선으로 곱하는 알고리즘과 같이 기호에 의한 또는 기계적인 방법을 사용하여 비례식을 푸는 것은 비례 추론을 발달시키지 못한다는 것을 인지하고, 객관적이고 개념적인 방법으로 많은 경험을 할 때까지 기계적인 방법을 소개해서는 안된다고 경고하고 있다. 앞에서 살펴보았듯이 비례 추론은 맹목적으로 규칙이나 공식에 수를 대입하여 계산하는 것이 아니라 양 사이의 관계에 대해 의식적인 분석을 요구하기 때문이다.

Ⅴ. 초등학교 수학과 교과서에서의 비례 추론 과제

이상의 논의를 바탕으로 비례 추론에 초점을 맞추어 우리나라 교과서에 나오는 과제들을 살펴보자. 우리나라 2007 개정 초등학교 수학 교과서에서 비례 추론과 관련되는 단원은 5-2 7단원 ‘비와 비율’, 6-1 7단원 ‘비례식’, 8단원 ‘연비와 비례배분’, 6-2 7단원 ‘정비례와 반비례’이다.

정은실(2003)은 7차 교육과정까지의 교과서를 분석하여 비 개념이 어떻게 지도되었는지를 알아본 결과, 어느 시기의 교육과정에서나 비의 표현 방법에 비추어 비를 도입하고 있는 점이 특징임을 밝히고 있다. 교과서에서 다루고 있는 비는 Thomson(1994)이 구분한 여러 수준의 비 가운데 특별한 고정된 두 양 사이에 존재하는 곱셈 관계를 인지하는 비의 초보적 수준이다. 이런 수준에서의 비는 두 고정된 양을 곱셈 관계로 보는 것이며 그것이 어떤 조직의 의미로 이 상황을 조직하는지에 대한 비례적 관점, 안목을 갖게 하지는 못한다. 하지만 2007 개정 교육과정의 ‘비와 비율’ 단원의 생각 열기에서는 비례 추론의 공변에 대한 생각을 담으려고 하고 있음을 알 수 있다.

지상이네 반 학생들은 수업 시간에 한 사람 당 4권의 공책이 필요합니다. 지상이네 반 학생 수와 공책 수의 크기를 비교하는 방법을 알아봅시다.

* 지상이네 반 학생 수와 공책 수의 크기를 비교하려면 어떻게 해야 합니까?
* 표의 빈칸을 채우시오.

학생수(명)	1	2	3	4	5	6
공책수(권)	4	8				

* 위의 표에서 찾을 수 있는 규칙을 말해 보시오
* 학생 수와 공책 수 사이의 관계를 여러 가지 방법으로 설명해 보시오.(교육과학기술부, 2011a, p.106)

비를 도입하기 위하여 두 양을 비교하고 표의 빈칸을 채우는 상황에서 어떤 관계가 있는 두 변수 즉 학생 수와 공책 수 사이에 동시에 일어나는 변화인 공변에 대한 생각을 하도록 하고 있으며, 두 양 중 한 양이 변할 때 다른 양이 첫 번째 양과 함께 정확한 방식으로 변하는 방식으로 서로 연결되어 있음을 보게 한다, 또한 표에서의 규칙과 학생 수와 공책 수 사이의 관계를 생각하는 과정에서 두 개의 주어진 쌍 즉 비를 비교하도록 요구하고 있다. 문제는 그 다음부터이다. 비의 도입은 비례 추론을 하도록 되어 있지만 그 다음부터는 이러한 생각은 자취를 감추고 예전 방식 그대로 비 개념을 알고리즘에 의한 방식으로 전개하고 있다. 이어서 비, 비율, 백분율 등을 정의하고 새로운 상황에서 비, 비율, 백분율을 구해보는 활동을 하고 있다. 그 소재도 비례 상황과 관련이 없는 남학생 수와 여학생 수 사이의 비와 같은 것이어서 비례 추론을 유도하는 내용은 아니다. 다시 비례 추론의 공변을 생각게 하는 활동은 단원 끝의 '문제를 풀어 보시오'의 7번 문제로서 다음과 같다.

> 현영이는 탐구 과제로 물체와 물체 그림자 길이의 비를 조사하였습니다. 운동장에서 같은 시각에 여러 가지 물체와 그 그림자 길이를 재어 보았더니 각 물체와 물체 그림자 길이의 비가 같았다고 합니다. 철봉과 늑목의 그림자의 길이는 몇 cm입니까?(교육과학기술부, 2011a, p.115)

물체와 그 그림자의 길이 사이의 비에 대한 문제는 비례 추론에서 많이 사용되는 소재이다. 비례 추론을 의식하는 교사는 이 소재를 문제 하나로 간단히 처리할 것이 아니라 여러 가지 물체와 그 그림자의 길이를 재어보는 활동을 통하여 동치인 비 개념 등 비 개념을 더 확장하는 활동을 할 수 있을 것이다.

비례식을 도입하는 활동에서는 비례 추론을 하도록 한다기보다는 비례식의 무엇인지를 먼저 약속해놓고 그 비례식에서 결측치를 구하는 형식적인 알고리즘을 익히는데 할애하고 있다. 우리나라 교과서에서 비례식은 비의 값이 같은 두 생활 장면으로부터 두 비를 제시하여 이 두 비의 값이 같음을 확인해보고, 이 두 비를 등식으로 나타내어 비례식의 개념을 이해하게 하고 있다. 2007 개정 교과서에서 비례식을 도입하는 부분을 살펴보자.

> 태극기의 가로와 세로의 비는 3 : 2입니다. 축구 경기 응원을 위해 가로가 60m, 세로가 40m인 대형 태극기를 만들었습니다. 대형 태극기의 가로와 세로의 비가 맞게 만들어졌는지 알아봅시다.(교육과학기술부, 2011b, p.100)

태극기의 가로와 세로의 비는 3 : 2임을 먼저 제시해놓고 대형 태극기를 만드는 상황이다. 그 비에 맞게 태극기를 만드니 그 비가 같음은 당연하다. 그리고 동치인 비를 하나 만드는 것으로 끝난다. 이런 방법 보다는 Kheong 외(2008)의 방법 즉, 4개의 빨간 사과와 8개의 파란 사과의 비를 생각하고(4 : 8), 다음에는 각각의 사과를 한 접시에 2개씩 넣어서 2접시와 4접시의 비를 구하면(2 : 4), 또 각각의 사과를 한 접시에 4개씩 넣어서 1접시와 2접시의 비(1 : 2)를 구하는 과정을 통해 세 비 4 : 8, 2 : 4, 1 : 2가 모두 같은 빨간 사과와 파란 사과의 비임을 보여주고 그 세 비가 모두 같음(4 : 8 = 2 : 4 = 1 : 2)을 보여주는 방식으로 비례식을 도입한다면 동치의 비의 의미를 보다 확실하게 알 수 있을 것이다. 그리고 그 과정에서 비의 양변을 같은 수로 나누거나 곱하여도 그 비율이 같다는 성질을 자연스럽게 알게 할 수 있을 것이다.

NCTM(2010)도 비례 추론에서 합성 단위를 되풀이하거나 등분할함으로써 동치인 비를 만드는 것을 중시하고 있다. 합성 단위는 비를 형성하는

방법으로 두 양을 합성하여 새로운 단위를 만드는 것이다. 예를 들어 4초에 10cm의 속도는 10 : 4단위라는 합성 단위가 된다. 학생이 합성 단위를 형성했다는 증거는 한 합성 단위를 되풀이하거나 등분할하는데서 나타난다. 예를 들면 10 : 4단위, 20 : 8단위, 30 : 12단위,....와 같이 되풀이 하거나 10 : 4단위, 5 : 2단위, 2.5 : 1 단위...와 같이 등분할하는 것이다. 이런 생각은 유현주(1995)가 비 개념의 본질이라고 한 Thomson (1994)의 '내면화 된 비'라고 할 수 있다. '내면화된 비'는 정적인 이미지로서의 비교의 의미만이 아니라 그것을 통하여 외적인 상황과 두 양의 값은 계속 변하지만 본질적으로는 동일한 관계가 그 안에 있음을 인식하는 것이다. 그리고 비례식에서의 비의 의미는 이러한 구조의 불변성을 인식하는 과정이어야 한다. 어떤 학생이 합성 단위로 비를 형성했다고 해서 그 학생이 복잡한 비례성을 이해했음을 의미하는 것은 아니지만, 합성 단위를 형성하는 것은 초보적이지만 비례 추론을 이해하는데 기초가 되는 개념임에는 틀림없다. 비례 추론의 시작 수준에서 학생들은 동치인 비를 만들기 위해 합성 단위를 되풀이하거나 등분할한다. 그런데 우리나라 교과서에서는 합성 단위를 되풀이하거나 등분할 함으로써 동치인 비를 만들어보는 활동을 찾아보기 힘들다. 단지 '두 비 3 : 2와 6 : 4에서 여러 가지를 알아봅시다.'(교육과학기술부, 2011b, p. 101) 처럼 동치인 두 비를 먼저 제시해놓고 그 비의 값[4]이 같은 지를 알아보게 할 뿐이다. 비교하는 양을 독립적이고 고정된 상태에서 비교하고 있을 뿐이다. 비의 성질 즉 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나, 나누어도 비의 값은 같다는 성질을 보여주는 과정에도 동치인 비를 먼저 제시해놓고 비의 값을 구하여 비의 성질을 유도한다.

우리나라 교과서는 비례식의 성질 '비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱은 같다'를 익히고 활용하는 형식적인 활동은 많이 하게 되어 있지만, 비형식인 활동으로 이를 익히지는 않는다. 비례식의 성질을 익힌 다음 활동은 '비례식 2 : 3 = 8 : □에서 □를 구해 봅시다'(교육과학기술부, 2011b, p. 107)이다. English, Halford(1995)는 여러 연구자의 문헌을 검토하고 교차곱 알고리즘에 의해 비례식을 푸는 것은 효과적인 절차이긴 하지만 기계적이고 의미가 없을 뿐 아니라 아동들이 제대로 이해하지 못하며, 자연적으로 생성되는 경우가 드물고, 비례 추론을 강화시키기보다 회피하는 수단으로 사용되고 있다고 비판하고 있다. 실제로 이 방법은 비례 추론 자체를 포함하지 않는다는 것이다. NCTM(2000)도 교차곱 방법이 학생 활동가운데 자연스럽게 일어난다면 의미 있게 발전시킬 수 있다고 하면서도 비례 문제를 해결하는 수업에서는 강력한 직관적 기초에 기반을 둔 방법을 포함시켜야 한다고 주장한다. 예를 들어 12장에 15000원 하는 표와 20장에 23000원하는 표 중 어느 것을 사는 것이 나은가라는 문제를 풀 때, 학생들은 일정한 비율로 정하는 전략(scaling strategy: 공통된 수, 여기서는 60장의 값을 구하는 전략) 또는 단위 비율 전략(표 한 장의 값을 구하는 전략)으로 해결할 것이다. 우리나라의 교과서에서는 이렇게 비를 비교하게 하는 과제가 제시되어 있지 않다.

비례 추론을 직접적으로 지도하는 내용은 우리나라의 경우 6학년 2학기의 '정비례와 반비례'이다. 비례 추론이라는 관점에서 봤을 때 이 내용은 비와 비율, 비례식과 관련된 부분이라고 할 수 있다. 그러나 지도서(교육과학기술부, 2011d, p. 284)의 이 단원에 대한 '학습의 흐름'에 보면,

4) 2007 개정 교육과정에서는 '비의 값'이라는 용어가 삭제되고 '비율'만을 사용하고 있음에도 6학년 교과서에는 여전히 '비의 값'이라는 용어를 사용하고 있다.

이미 학습한 내용에는 규칙 찾기, 무늬 만들기, 규칙과 대응만 나오고 비와 관련된 것은 나와 있지 않다. 교과서 저자는 정비례와 반비례에 대한 내용이 비와 관련 없는 것으로 여기거나 아니면 비와 비율의 내용이 비례와 관련 없는 것으로 여기고 있음을 볼 수 있다. 그리고 Van de Walle(2008)이 지적한 실생활 상황에서 비례 관계와 비비례 관계를 구별하는 문제 상황을 교과서에 찾아 보기 힘들다. 단지 '우리 생활 주변에서 정비례 관계가 있는 것과 반비례 관계가 있는 것을 찾아보'(교육과학기술부, 2011c, p. 115)는 문제가 있을 뿐이다.

하지만 정비례와 반비례의 내용은 비례 추론의 공변에 대한 생각을 잘 반영하고 있으며, 대응이라는 정적인 측면에서와 변수라는 동적인 측면을 잘 반영하고 있다. 예를 들어 1분에 2L씩 나오는 수돗물을 물통에 받는 상황에서 물을 받는 시간을 x분, 받는 물의 양을 y L라 하고, x의 각각에 대응하는 y의 값을 표에 써넣는 활동과 x가 2배, 3배, 4배,...로 변함에 따라 y는 각각 어떻게 변한다고 생각하는지를 묻는 활동(교육과학기술부, 2011c, p. 106)이 이에 해당한다. 이러한 정비례는 함수의 간단하지만 강력한 예이며, 1차식으로 나타낼 수 있다. 그 자체로 비례는 보통의 수 경험, 규칙과 그리고 대수 형태로 표현될 좀 더 추상적인 관계 사이에 편리하면서도 또 꼭 필요한 다리가 된다. 많은 물리적 사건을 비례의 대수적 표현($y=mx$)으로 나타낼 수 있다.

비례 추론의 내용으로 많이 활용되는, 기하학적 맥락에서의 구조적 동치관계인 '닮음'에 대한 내용이 7차 교육과정부터는 중학교로 이동되었으며, 속도에 대한 내용은 초등학교에서 문제(교육과학기술부, 2011c, p. 107, 111, 116)로는 제시하면서도 명시적으로는 지도하지 않고 있다. 닮음은 다른 맥락에서와는 달리 시각화할 수 있다는 장점을 가지며, Freudenthal(1998)은 교수학적으로 중요한 것은 시각적 추론을 점진적으로 언어화하는 것이라고 하면서 이런 장점을 학습·지도에 적극적으로 이용할 것을 권고하고 있다. 닮음과 관련된 확대도와 축도 그리고 농도에 대한 내용도 수학 교과서에서는 지도되지 않는다. NCTM(1989)이 학생들로 하여금 비례 추론을 통해 해결할 수 있고 또 모델화 할 수 있는 다양한 문제 상황을 경험케 하는 것이 중요함을 지적한 것과는 거리가 멀다. 또 NCTM(2000)이 많은 수학적 주제를 연결하여 통합하고, 수학과 다른 과목-과학과 미술-을 연결시키는 것이 중요함을 지적하고 있는데, 우리나라에서는 오히려 이전에 다루던 주제들도 다루지 않거나 약화시키고 있다.

NCTM(2010), Lesh, Post, Behr(1988) 등이 비례 추론에 적절한 문제로 제시한 비의 비교 문제나 변환 문제 등 비형식적인 방법을 사용하는 문제도 교과서에서는 찾아볼 수 없다.

이상의 내용을 정리해볼 때 우리나라 교과서에서는 비와 비율, 비례식, 정비례와 반비례를 지도하지만, Van de Walle(2008)이 이야기한 기계적 또는 알고리즘을 지닌 기능에 의존하지 않는 질적 사고를 요구하고 있지 않음을 알 수 있다.

VI. 결론 및 제언

비례 추론은 비례, 비, 비율, 비례식과 관계된 추론으로서, 공변과 다중비교의 의미를 포함하는 양적 및 질적 추론이다. 이러한 비례 추론은 오랜 시간에 걸쳐 천천히 발달하는 것으로 학생의 인지 발달의 이정표이다. 성숙만으로는 비례 추론의 발달을 보장하지 못한다. 비례 추론을 발달시키기 위해서는 학생들에게 적절한 과제를 제시해야 한다.

2007 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 비와 비율, 비례식, 정비례와 반비례 등 비례 추론과 관련된 내용을 지도하고 있으나 닮음, 속도, 농도, 밀도, 확대도와 축도 등 다른 교과와 관련된 내용들을 지도하지 않거나 약화시키고 있다. 이것은 교과서 저자의 문제라기보다는 교육과정의 문제라고 할 수 있다. 공변과 관련된 내용은 비와 정비례, 반비례 등에 포함되어 있으나 전개방식이 동적이라기보다는 정적인 방식이다. 특히 비례식에서는 비례식의 성질을 적용하여 알고리즘에 의해 결측치를 구하는 데 치중하고 동치인 비를 생각하고 양변의 구조적 유사성을 의식하도록 유도하지는 않는다. 또한 비를 비형식적으로 비교해보거나 비비례 상황을 제시하여 비례 상황과 구별하도록 하고 있지도 않다. 물론 어떤 경우이든 교사가 비례 추론에 대해 관심을 가지고 있다면 수업 중에 비례 추론을 유발하도록 할 수 있다. 그러나 현재 교사용 지도서에서도 이와 관련하여 설명하고 있지는 않으며, 교육과정에서도 수학적 추론을 강조하기는 하지만 비례 추론을 따로 언급하고 있지는 않다.

비례 추론은 초등학교 산술의 절정인 반면, 뒤따르는 모든 과정의 기초라고 하였다. 비례 추론은 초등학교 수학에서 끝나는 것이 아니라 뒤따르는 모든 수학 학습의 초석의 역할을 하는 것이다. 학생들의 비례 추론을 육성하기 위해서는 교육과정 개발이나 교과서 및 교사용 지도서 집필 작업에서 이를 뒷받침할 수 있어야 한다. 무엇보다 교사들에게 비례 추론의 중요성을 인식시키고 비와 비례에 관련된 내용 뿐 아니라 초등학교에서 지도되는 여러 내용에서도 비례 추론 지도를 할 수 있도록 해야 한다. 예를 들어 사칙 연산 지도를 할 때, 문제의 요소들이 주어진 답을 구하는 정적인 상황(두 수를 주고 곱을 구하는)이 아니라, 문제 요소가 변할 때 주어진 곱 또는 몫(합 또는 차)이 변하는지 또는 불변인지를 알아보는 역동적인 상황을 생각할 수 있다. 또 변화의 방향, 변화의 정도, 불변성이 유지되기 위해서 변화를 상쇄시키는 데 필요한 것이 무엇인지를 결정하는 경험을 하도록 할 수도 있다. 유리수에 대한 이해는 비와 비례 추론을 개발하는데 기초가 되므로 분수의 동치성과 같은 개념을 관련지어 가르치도록 한다. 자연수와 유리수에 대한 경험을 자연스럽게 확장시켜 비와 비례에 대한 생각을 탐구하고 이해하도록 할 수 있는 것이다.

참고문헌

교육과학기술부(2011a). **수학 5-2**. 두산동아.

교육과학기술부(2011b). **수학 6-1**. 두산동아.

교육과학기술부(2011c). **수학 6-2**. 두산동아.

교육과학기술부(2011d). **수학 지도서 6-1**. 두산동아.

교육부(1998). **수학 6-1**. 국정교과서주식회사.

박정숙(2009). **학생의 비례추론의 분석 모형과 특성 분석**. 서울대학교대학원 박사학위논문.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석에 의한 학습지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교대학원 박사학위논문.

정은실(2003). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구. 13**(3), 247-265.

한국과학창의재단(2011). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구**. 정책연구 2011-11. 한국과학창의재단.

Bassarear, T.(2001). *Mathematics for elementary school teachers*, Houghton Mifflin Company.

English, L. D. & Halford, G. S.(1995). *Mathematics education : models and processes*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers

Freudenthal H.(eds.)(1976). Five years IOWO - On H. Freudenthal's retirement from the directorship of IOWO. *Educational Studies in Mathematics, 7*(3).

Freudenthal H.(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D.Reidel Publishing Company.

Karplus, R., Pulos, S., Stage, E.(1983). Early adolesents' proportional reasoning on 'rate' problems, *ESM 14*, pp. 219-213.

Kheong et al(2008). My pals are here! m*aths 5A*. Marshall Cavendish Education.

Lamon, S. J.(2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Post, T., Behr, M.(1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert, M. Behr(Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.93-118). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc. : NCTM

NCTM(1989). C*urriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : NCTM.

NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : NCTM.

NCTM(2010). *Developng essential understanding of ratios, proportions & proportional reasoning. grades 6-8*. Reston, VA : NCTM.

Post, T., Behr, M., Lesh, R.(1988). Proportionality and the development of prealgebra understanding, In A. Coxford & A. Schute(Eds.) *The ideas of algebra, K-12*. (pp.78-90). Reston, VA : NCTM.

Resnick, L. B., Singer, J. B.(1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In Carpenter, T. P., Fennema, E., Romberg, T. A.(Ed.), *Rational numbers* (pp.107-130). New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Thomson, P.(1994). The Development of the concept of speed and its relation to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey(Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp.179-234), Albany, NY : Sunny Press.

Tourniaire, F., Pulos, S.(1985). Proportional reasoning : A review of the literature, *ESM 16*. 181-204.

Van de Walle. J. A.(2008). **수학을 어떻게 가르칠 것인가?**. (남승인 외 역) 서울 : 경문사.(영어 원작은 2004년 출판)

Study on Proportional Reasoning in Elementary School Mathematics

Jeong, Eun Sil (Chinju National University of Education)

The purpose of this paper is to analyse the essence of proportional reasoning and to analyse the contents of the textbooks according to the mathematics curriculum revised in 2007, and to seek the direction for developing the proportional reasoning in the elementary school mathematics focused the task variables.

As a result of analysis, it is found out that proportional reasoning is one form of qualitative and quantitative reasoning which is related to ratio, rate, proportion and involves a sense of covariation, multiple comparison.

Mathematics textbooks according to the mathematics curriculum revised in 2007 are mainly examined by the characteristics of the proportional reasoning. It is found out that some tasks related the proportional reasoning were decreased and deleted and were numerically and algorithmically approached. It should be recognized that mechanical methods, such as the cross-product algorithm, for solving proportions do not develop proportional reasoning and should be required to provide tasks in a wide range of context including visual models.

* Key Words : proportional reasoning(비례 추론), ratio(비), proportion(비례식), covariation(공변), multiple comparison(다중 비교), the mathematics curriculum revised in 2007(2007 개정 수학과 교육과정)

논문접수 : 2013. 9. 25
논문수정 : 2013. 11. 7
심사완료 : 2013. 11. 14