

안정한 종속 BPF의 성능에 관한 연구

A Study on the Performance of the Stable Cascading BPF

김정환* · 신승식†
 (Jung-Hwan Kim · Seung-Sik Shin)

Abstract - This paper is a study on the performance of the stable cascading BPF. There are generally two methods of designing IIR filter, which are a direct method and an indirect one. The indirect design method that is transformed into the BPF by frequency transformation using the prototype analog LPF which is satisfied for designing specifications is applied to this study. As typical prototype analog LPFs, there are the Butterworth filter, the Chebyshev filter and the elliptic filter. In this study, we connect the frequency transformed BPFs (to the cascade form) which have been converted from the stable Butterworth filter and Chebyshev filter. Three classified simulations are conducted in this study, which are the cascading Butterworth BPF Only, the cascading Chebyshev BPF Only and the cascading Butterworth and Chebyshev BPFs. As a result of the simulation, this study shows that a ripple size of the cascading Chebyshev BPF Only is about 1[dB] smaller than that of the cascading Butterworth and Chebyshev BPFs and also the skirt characteristic of the cascading Chebyshev BPF in the transition band is most outstanding and has the widest bandwidth. The result of performance comparison shows the validity of specifications required in the workplace.

Key Words : Prototype analog filter, Butterworth filter, Chebyshev filter, Cascading filter

1. 서 론

디지털 신호처리 분야에서 필터 설계는 음성 및 영상 신호의 합성과 인식, 생체신호 분석, X선 단층 촬영, 지진파 해석, 천문학 해석을 비롯한 전기/전자/정보통신, 의용 공학, 자원탐사 등 거의 모든 산업전반에 걸쳐 사용되고 있다. 또한, 아날로그 신호와 디지털 신호 사이의 변환 작업 또는 디지털 펄스 신호 처리에 필요로 하는 적합한 형태로 파형을 등화하거나 변형시키는 등의 동작을 수행하게 된다. 이 때문에 필터의 중요성이 강조되어 지고 있다[1]. 아울러, 본 논문에서 다루고 있는 내용인 Butterworth 필터와 Chebyshev 필터의 장점을 가지는 필터를 구현하려는 연구가 현재 진행 중이며, 낮은 소비 전력과 전원 안정화, 조정밀 등의 사양을 만족시키기 위해서 대역통과필터의 리플제거에 관한 연구도 활발히 이루어지고 있다[2~7]. 최근의 연구는 Chebyshev LPF와 Elliptic LPF의 조합으로 통과대역은 평탄하고 천이대역의 경사도는 크게 만드는 연구가 진행 되고 있다[5][12].

이와 다르게 본 논문은 버터워스 LPF를 주파수 변환하여 얻은 ①버터워스 BPF의 종속 연결(cascading connection), ②체비세프 LPF를 주파수 변환하여 얻은 체비세프 BPF의 종속 연결, ③버터워스 BPF와 체비세프 BPF의 종속 연결한 BPF의 성능을 비교 분석하였다. 또한, BPF의 안정성을 확인하기 위하여 Z 평면에서의 단위원을 도시하였다.

일반적인 디지털 IIR 필터를 설계할 때 저역통과 필터, 대역통과필터, 고역통과필터 등을 각각 따로 설계하는 것보다

저역통과 필터를 설계한 후 주파수 변환을 하여 대역통과 필터, 고역 통과필터 등을 설계하면 설계과정이 훨씬 쉬워진다[8~9]. 그래서 디지털 필터의 원하는 스펙으로부터 프로토타입 저역통과 필터를 유도하고, 유도한 저역통과필터를 원하는 특성의 필터로 변환시킨다. 원하는 필터 특성이 대역통과 필터일 경우 하한 주파수(lower edge frequency) ω_1 과 상한 주파수 ω_2 를 결정하여 저역 필터의 전달함수 H(s)에 식 (1)을 대입하여 대역통과 필터의 전달함수를 구한다.

$$s = \frac{s^2 + \omega_c^2}{Bs} \quad (1)$$

여기서, ω_c 는 중심주파수이며 $\omega_c^2 = \omega_1 \cdot \omega_2$ 이고, B는 대역폭이며 $B = \omega_2 - \omega_1$ 이다.

식 (1)에 의해 구한 새로운 전달함수 H(s)를 쌍선형 z변환법(bilinear z transform), 식 (2)를 적용하여 디지털 IIR 필터 전달함수 H(z)을 구한다. 쌍선형 변환시 발생하는 주파수 응답의 왜곡현상을 보상하기 위해, 즉 아날로그 주파수 응답과 디지털 시스템의 응답이 원하는 주파수 범위에서 매우 비슷해지도록 하기 위해 미리 식 (3)을 대입하여 프리워핑(prewarping)시킨다[8~9].

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (2)$$

$$\omega_c' = \frac{2}{T} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_c T}{2} \right) \quad (3)$$

여기서 ω_c' 는 디지털 임계 주파수이며, ω_c 는 아날로그 임계 주파수이다.

* NEO LEDS, Inc.

† Corresponding Author : UCUBEIN, Inc.

E-mail : manmind@paran.com

Received : September 3, 2013; Accepted : November 15, 2013

그러므로 아날로그 필터 스펙의 임계주파수 ω_c 를 식 (3)에 의해 프리워핑한 후 식 (1)에 대입하여 대역통과 필터로 주파수 변환하고, 마지막으로 쌍선형 변환 식(2)에 대입함으로써 디지털 IIR 필터의 전달함수 $H(z)$ 을 구할 수 있다.

2. 주파수 변환된 BPF의 안정성과 주파수 응답

2.1 버터워스 LPF의 안정성과 주파수 특성

버터워스 필터의 특성은 통과대역에서는 리플이 평탄하고 천이대역에서는 완만한 경사를 갖는다[8~11]. N차의 아날로그 버터워스 필터의 주파수 응답은 식 (4)와 같으며, 분모 다항식의 안정한 근, 즉 필터의 극 s_k 의 위상은 식 (5)와 같다.

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_c^{2N}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2N}}} \quad (4)$$

$$\phi_k = \begin{cases} \frac{k\pi}{N}, & N : \text{odd} \\ \frac{(2k-1)\pi}{2N}, & N : \text{even} \end{cases} \quad (5)$$

여기서, $k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$ 이다.

위의 식으로부터 안정한 N차의 버터워스 특성방정식을 구하면 식(6), (7) (8), (9)와 같으며, Z-평면 상에 단위원을 그리면 그림 1이고, 주파수 응답은 그림 2에 나타내었다.

① $N=2$

$$H(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\omega_c \cos\phi_k s + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2} \quad (6)$$

② $N=3$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\omega_c \cos\phi_k s + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c)(s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2)} \quad (7)$$

③ $N=4$

$$H(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\omega_c \cos\phi_k s + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^4}{(s^2 + 2\omega_c \cos\phi_1 s + \omega_c^2)(s^2 + 2\omega_c \cos\phi_2 s + \omega_c^2)} \quad (8)$$

여기서, $\cos\phi_1 = \cos\frac{\pi}{8} \approx 0.9239$, $\cos\phi_2 = \cos\frac{3\pi}{8} \approx 0.3827$ 이다.

④ $N=5$

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\omega_c \cos\phi_k s + \omega_c^2} = \frac{\omega_c^5}{(s + \omega_c)(s^2 + 2\omega_c \cos\phi_1 s + \omega_c^2)(s^2 + 2\omega_c \cos\phi_2 s + \omega_c^2)} \quad (9)$$

여기서, $\cos\phi_1 = \cos\frac{\pi}{5} \approx 0.8090$, $\cos\phi_2 = \cos\frac{2\pi}{5} \approx 0.3090$ 이다.

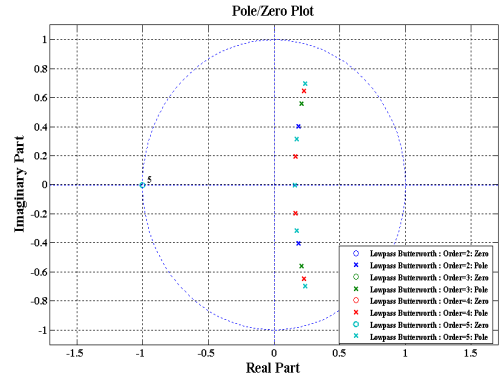


그림 1 Butterworth N차 LPF의 Pole/Zero Plot
Fig. 1 Pole/Zero Plot of Butterworth Nth LPF

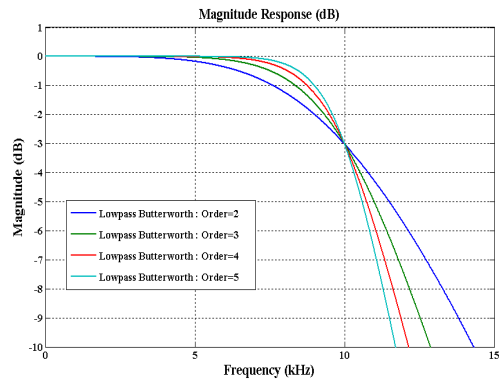


그림 2 Butterworth N차 LPF의 Magnitude Response
Fig. 2 Magnitude Response of Butterworth Nth LPF

그림 1에서 5차까지의 극점 모두가 단위원 안에 존재하여 안정함을 알 수 있으며, 그림 (2)에서처럼 Butterworth 필터는 통과대역에서 Maximal flat함을 알 수 있다. 여기서, 차단주파수 $f_c = 10[\text{kHz}]$ 로 하였다.

2.2 주파수 변환된 버터워스 BPF의 안정성과 주파수 특성

Butterworth LPF를 식 (1)에 대입하여 BPF로 주파수 변환하면 Butterworth BPF의 특성을 얻을 수 있다. 차수가 2인 프로토 타입 Butterworth LPF를 대역통과 필터로 주파수 변환한 4차 Butterworth BPF의 전달함수는 식 (10)과 같이 구할 수 있으며, Z-평면상의 안정성 판별을 위해 단위원을 그림 3에 나타냈으며, 주파수 응답을 그림 4에 나타내었다.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (10)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(s) = s^4 + 1.777 \cdot 10^4 s^3 + 7.975 \cdot 10^9 s^2 + 6.946 \cdot 10^{13} s + 1.52810^{19}$$

이고 $Y(s) = 1.579 \cdot 10^8 s^2$ 이며,
 $X(z) = 1 + 3.931z^{-1} + 5.828z^{-2} + 3.861z^{-3} + 0.9644z^{-4}$,
 $Y(z) = 0.0001611 - 2.665 \cdot 10^{-15}z^{-1} - 0.0003222z^{-2} - 8.88210^{-15}z^{-3} + 0.0001611z^{-4}$ 이다.

그림 3에서 알 수 있는 것처럼 단위원 상에 극점 4개가 모두 존재하므로 안정하며, 그림 4에서 BPF의 하한 주파수는 7.5kHz이고 상한 주파수는 15kHz이고, 통과대역에서 Maximal flat하다.

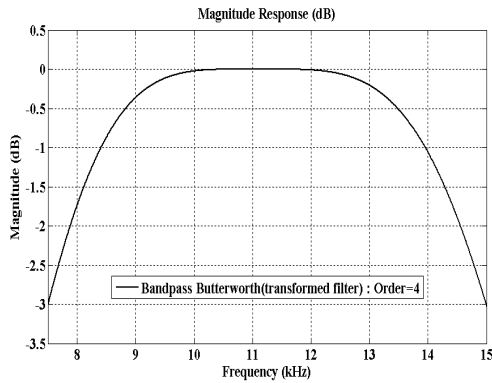


그림 3 Butterworth 4차 BPF의 Pole/Zero Plot
 Fig. 3 Pole/Zero Plot of Butterworth 4th BPF

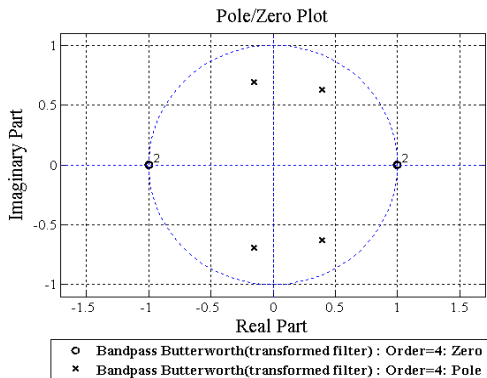


그림 4 Butterworth 4차 BPF의 Magnitude Response
 Fig. 4 Magnitude Response of Butterworth 4th BPF

2.3 Chebyshev LPF의 안정성과 주파수 특성

Chebyshev 필터는 통과대역에서는 등맥동의 리플(equiripple)을 갖으며 천이대역에서는 급격한 경사 특성을 갖는다[8~11]. 버터워스 필터는 통과대역에서 리플이 없지만 체비셰프 필터는 리플이 있으며, 체비셰프 필터의 통과대역 리플(passband ripple) A_p 를 1[dB]로 놓으면, 통과대역 리플 조절 매개변수(regulating parameter) ϵ 은 식 (11)과 같이 구해진다.

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p}{10}} - 1} \approx 0.5088 \quad (11)$$

또한, 전달함수의 근 $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ 라 할 때 σ_k 와 ω_k 는 식

(12)이므로, 이에 따른 차수 2,3,4,...N차의 특성방정식을 구할 수 있으며, N=2일 때의 안정한 특성 방정식을 구하면 식 (13)과 같다.

$$\sigma_k = \sinh\left[\frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right] \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]$$

$$\omega_k = \cosh\left[\frac{1}{N} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right] \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \quad (12)$$

여기서 $k = 1, 2, 3, \dots, 2N$ 이다.

$$H(s) = \frac{1.1025}{(s + 0.5489 + j0.8951)(s + 0.5489 - j0.8951)} \quad (13)$$

그림 5는 Chebyshev N차 LPF의 Pole/Zero Plot으로서 단위원 내에 모든 극점이 있어 안정함을 알 수 있으며, 그림 6은 주파수 응답으로 통과대역에서는 리플이 있지만 천이대역에서 가파른 경사를 갖는 것을 알 수 있다.

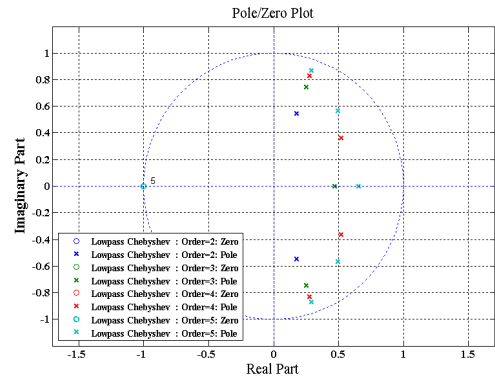


그림 5 Chebyshev N차 LPF의 Pole/Zero Plot
 Fig. 5 Pole/Zero Plot of Chebyshev Nth LPF

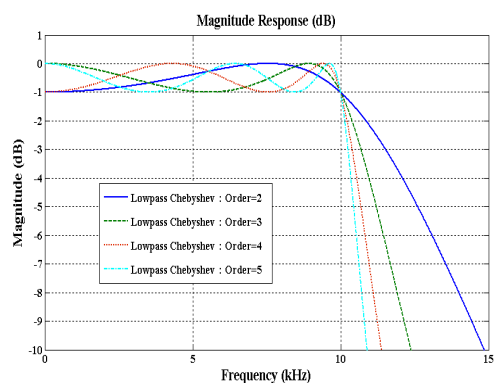


그림 6 Chebyshev N차 LPF의 Magnitude Response
 Fig. 6 Magnitude Response of Chebyshev Nth LPF

2.4 Chebyshev BPF의 안정성과 주파수 특성

Chebyshev LPF를 식 (1)에 대입하여 BPF로 주파수 변환하면 Chebyshev BPF의 특성을 얻을 수 있다. 차수가 2인 프로토타입 Chebyshev LPF를 대역통과 필터로 주파수 변환한 4차 Chebyshev BPF의 전달함수는 식 (14)와 같이 구

할 수 있으며, Z-평면상의 안정성 판별을 위해 단위원을 그림 7에 나타냈으며, 주파수 응답을 그림 8에 나타내었다.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{14}$$

여기서, $X(s) = s^4 + 8104s^3 + 7.929 \cdot 10^9s^2 + 3.167 \cdot 10^{13}s + 1.528 \cdot 10^{19}$
 이고 $Y(s) = 7.914 \cdot 10^7s^2$ 이며,
 $X(z) = 1 + 3.951z^{-1} + 5.886z^{-2} + 3.918z^{-3} + 0.9836z^{-4}$,
 $Y(z) = 8.154 \cdot 10^{-5} - 0.0001631z^{-2} + 8.882 \cdot 10^{-16}z^{-3} + 8.154 \cdot 10^{-5}z^{-4}$
 이다.

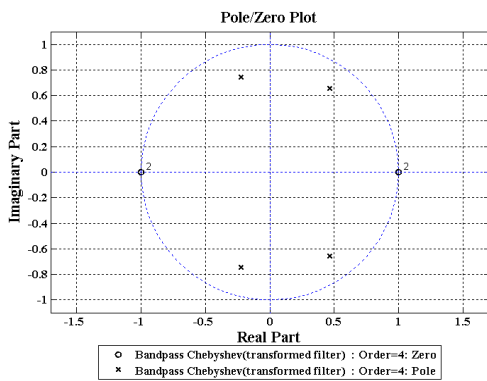


그림 7 Chebyshev 4차 BPF의 Pole/Zero Plot
 Fig. 7 Pole/Zero Plot of Chebyshev 4th BPF

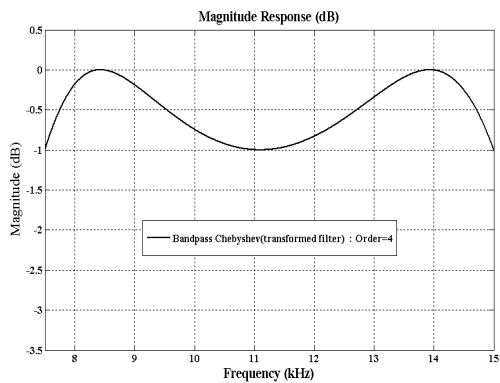


그림 8 Chebyshev 4차 BPF의 Magnitude Response
 Fig. 8 Magnitude Response of Chebyshev 4th BPF

그림 7에서 알 수 있는 것처럼 극점 4개 모두가 단위원 안에 위치하므로 안정하며, 그림 8에서 BPF의 하한 주파수와 상한 주파수는 Butterworth와 동일하게 7.5kHz와 15kHz이다. Magnitude Response를 보면 알 수 있듯이 Chebyshev BPF는 통과대역에서 리플이 있다.

3. 종속 BPF의 안정성과 주파수 응답

3.1 종속 필터의 구조

일반적으로 디지털 필터의 전달함수를 종속구조(cascade

form)로 표현하면 식 (15)와 같다[6~11].

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}{1 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^m (a_{i0} + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2})}{\prod_{i=1}^m (1 + a_{i3}z^{-1} + a_{i4}z^{-2})} \tag{15}$$

본 논문에서는 Butterworth 4차와 6차, Butterworth 4차와 Chebyshev 6차, Chebyshev 4차와 6차를 각각 종속 연결한 종속 10차 BPF를 실험하였다.

3.2 종속 BPF의 안정성과 주파수 특성

Butterworth 4차와 6차 BPF의 종속 연결과 Chebyshev 4차와 6차의 종속연결, 그리고 Butterworth 4차와 Chebyshev 6차를 종속 연결하였을 때의 주파수 응답과 안정성 판별을 위한 Pole/Zero Plot을 그림 9와 그림 10에 각각 나타내었다.

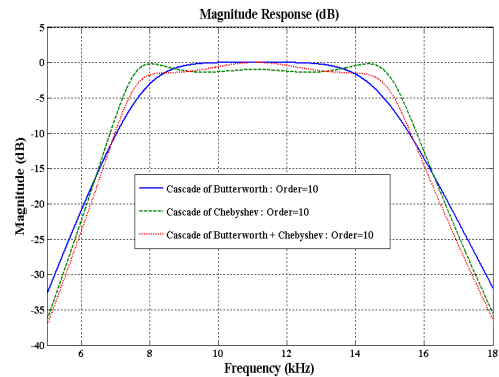


그림 9 종속 10차 BPF의 Magnitude Response
 Fig. 9 Magnitude Response of Cascading 10th BPF

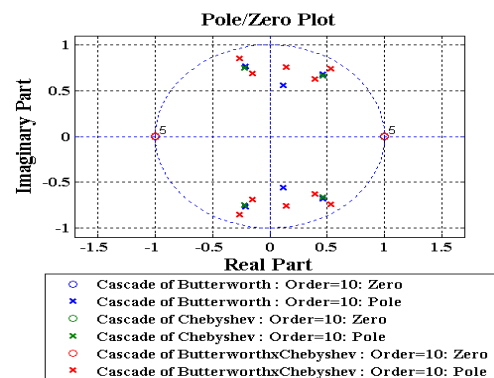


그림 10 종속 10차 BPF의 Pole/Zero Plot
 Fig. 10 Pole/Zero Plot of Cascading 10th BPF

그림 9를 보면, 실선(solid line)으로 표시한 버터워스만을 종속한 “Cascade of Butterworth : Order=10” BPF는 통과대역에서 리플 없이 천이대역에서 완만한 경사의 스킨트 특성(skirt characteristic)을 갖고 있음을 알 수 있다. 여기서, 주의 깊게 볼 것은 파선(dashed line)으로 표시한 Chebyshev

만을 중속한 “Cascade of Chebyshev : Order=10” BPF로서 가장 가파른 경사를 갖고 있고, 즉 스킨트 특성이 가장 우수하며 대역폭(Band width)이 가장 넓다는 점이다. 또한, 그림 10처럼 3가지 모든 중속 연결에서 극점이 단위원 안에 존재한다는 것을 알 수 있어 안정함을 확인할 수 있다.

4. 안정한 중속 BPF의 성능 비교 및 분석

중속 BPF의 성능 비교 및 분석을 위해 그림 9의 Magnitude Response를 확대하여 보면 그림 11과 같다.

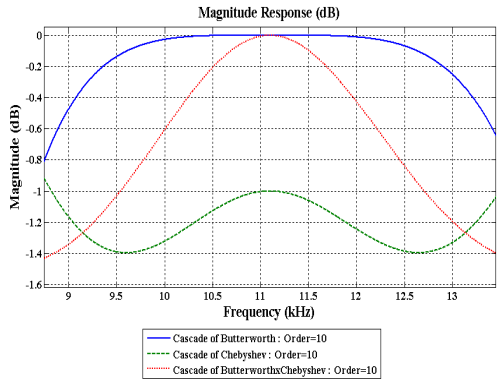


그림 11 리플 크기 비교를 위한 통과 대역 확대
Fig. 11 Close look of ripple sizes in the passband

그림 11을 보면 실선의 “Cascade of Butterworth : Order=10” BPF는 Butterworth만을 중속 연결한 BPF로서 통과 대역에서 리플이 없다. 그러나, 점선으로 표시한 “Cascade of Butterworth x Chebyshev : Order=10” BPF는 Butterworth BPF와 Chebyshev BPF를 중속 연결한 필터로서 리플의 크기가 약 1.4[dB]이며, Chebyshev BPF만을 중속 연결한 “Cascade of Chebyshev : Order=10” BPF는 리플의 크기가 약 0.4[dB]로 나타났다. 이는 Chebyshev만을 중속 연결한 BPF가 다른 두 개의 중속 필터에 비해 다음과 같은 장점이 있음을 의미한다. 이를 표 1에 요약하였다.

표 1 안정한 중속 BPF의 성능 비교

Table 1 Performance comparison of the stable cascading BPF

구분	중속 Butterworth BPF	중속 Chebyshev BPF	중속 Butterworth * Chebyshev
대역폭	좁음	넓음	보통
리플의 크기	0[dB]	약 0.4[dB]	약 1.4[dB]

표 1에 요약한 것처럼, Butterworth만을 중속 연결한 “중속 Butterworth BPF”는 다른 두 개의 중속 BPF에 비해 대역폭이 좁음을 의미하고, Chebyshev BPF만을 중속 연결한 “중속 Chebyshev BPF”는 다른 두 개의 중속 BPF보다 대

역폭도 넓으며 리플의 크기는 Butterworth와 Chebyshev를 중속 연결한 “중속 Butterworth x Chebyshev” BPF보다 약 1[dB] 작게 나타나서 성능이 우수함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 안정한 중속 BPF의 성능에 대해 다루었다. 제안하는 중속 BPF의 성능을 검증하기 위하여 먼저 프로토타입 LPF의 전달함수를 전개하였으며, 안정성 판별을 위한 Pole/Zero Plot을 나타내었고, 각각에 대한 주파수 응답을 표현하였다. 그리고 주파수 변환한 대역통과 필터의 전달함수 H(s)와 s-z변환에 의한 IIR 필터의 H(z)를 식으로 보였으며, 주파수 응답과 안정성 판별을 하였다. 또한, 제안하는 BPF의 성능 비교를 위하여 주파수 변환한 BPF를 중속 접속하였으며, 중속 연결한 BPF의 안정성 판별과 주파수 응답을 그래프로 나타내었다. 그 결과 Chebyshev만을 중속 연결한 BPF가 다른 두 종류의 중속 필터보다 대역폭이 가장 넓었으며 차단 특성이 우수한 skirt 특성을 나타내었고, 리플의 크기 또한 Butterworth BPF와 Chebyshev BPF를 중속 연결한 BPF보다 약 1[dB] 작게 나타나 버티워스 BPF의 장점인 통과대역에서의 평탄 특성에 근접하였다. 향후 연구과제로 중속 BPF의 대역폭에 대한 수치적 정밀 분석이 필요할 것으로 판단되며, 분석한 결과를 토대로 필터를 구현해야 할 것이다.

References

- [1] Joon-Seok Park et al., “Research Trends of Micro-Filter for Mobile Handsets”, KIEES, Vol. 16, No. 4, pp.24-37, 2005.
- [2] Ivan W. Selesnick and C. Sidney Burrus, “Generalized Digital Butterworth Filter Design”, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 46, NO. 6, JUNE 1998.
- [3] David Baez-Lopez and Victor Jimenez-Fernandez, “Modified Chebyshev Filter Design”, IEEE 2000 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE 2000) , pp.642-646, 2000.
- [4] Rong Ye and Qing-Xin Chu, “Extraction of Finite Transmission Zero of General Chebyshev Filter”, IEEE International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings(ICMMT 2004), pp.272-274, 2004.
- [5] In-Dae Bang et al., “Design of 4-Pole Low Noise Active Bandpass Filter Improving Amplitude Flatness of Passband”, KIEES, Vol. 15, No. 6, pp.590-589, 2004.
- [6] Doo-Byung Kang, Seung-Sik Shin, “A Study on the Cascading Chebyshev filter for Ripple cancellation”, The Transactions of KIEE, Vol. 61, No.1, pp.168-172, 2012.
- [7] Seung-Sik Shin, “A Study on the ripple cancellation using two cascading chebyshev filters”, The

Transactions of KIEE, Vol. 61, No. 11, pp.1700-1705, 2012.

- [8] John G. Proakis and Dimitris G, Manolakis, Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications, Prentice Hall Inc., 2006
- [9] Charles L. Phillips and H. Troy Nagle, Digital control system analysis and design, Prentice-Hall, 1995.
- [10] Vinay K. Ingle and John G. Proakis, Digital Signal Processing using MATLAB 2/E, Thomson, 2009.
- [11] Paul A. Lynn and Wolfgang Fuerst, Introductory Digital Signal Processing 2/E, Wiley, 2008.
- [12] Yiping Fan, "Method and system for passband ripple cancellation in cascading filters", Unite States Patent application publication, US20060267677.

저 자 소 개



김 정 환 (金正煥)

1997년 2월 숭실대학교 전기공학부 졸업 (공학사), 1999년 2월 숭실대학교 대학원 전기공학부 졸업(공학석사), 1999년~2007년 (주)프로시스 연구개발 수석연구원, 2007년~2013년 (주)네오레즈테크놀로지 연구소장



신 승 식 (申承湜)

1997년 2월 숭실대학교 대학원 전기공학부 졸업 (공학석사), 2004년 8월 숭실대학교 대학원 전기공학부 졸업(공학박사), 2000년~2004년 인덕대학 겸임전임강사, 2004년~2009년 서일대학 겸임전임강사, 2009년~2013년 동양미래대학교 전기시스템과 조교수, 2013년~2013년 현재 (주)유큐브인 연구소장