

ORIGINAL ARTICLE

변형된 샤논 엔트로피식을 이용한 온실가스 농도변화량 예측

김상목¹⁾ · 이도행¹⁾ · 최 얼¹⁾ · 고미솔¹⁾ · 양재규^{2)*}

광운대학교 수학과, ¹⁾광운대학교 컴퓨터공학과, ²⁾광운대학교 교양학부(환경)

Estimation for the Variation of the Concentration of Greenhouse Gases with Modified Shannon Entropy

Sang-Mok Kim, Do-Haeng Lee¹⁾, Eol Choi¹⁾, Mi-Sol Koh¹⁾, Jae-Kyu Yang^{2)*}

Department of Mathematics, Kwangwoon University, Seoul, 139-701, Korea

¹⁾*Department of Computer Engineering, Kwangwoon University, Seoul 139-701, Korea*

²⁾*Division of General Education(Environment), Kwangwoon University, Seoul, 139-701, Korea*

Abstract

Entropy is a measure of disorder or uncertainty. This terminology is qualitatively used in the understanding of its correlation to pollution in the environmental area. In this research, three different entropies were defined and characterized in order to quantify the qualitative entropy previously used in the environmental science. We are dealing with newly defined distinct entropies E_1 , E_2 , and E_3 originated from Shannon entropy in the information theory, reflecting concentration of three major green house gases CO_2 , N_2O and CH_4 represented as the probability variables. First, E_1 is to evaluate the total amount of entropy from concentration difference of each green house gas with respect to three periods, due to industrial revolution, post-industrial revolution, and information revolution, respectively. Next, E_2 is to evaluate the entropy reflecting the increasing of the logarithm base along with the accumulated time unit. Lastly, E_3 is to evaluate the entropy with a fixed logarithm base by 2 depending on the time. Analytical results are as follows. E_1 shows the degree of prediction reliability with respect to variation of green house gases. As E_1 increased, the concentration variation becomes stabilized, so that it follows from linear correlation. E_2 is a valid indicator for the mutual comparison of those green house gases. Although E_3 locally varies within specific periods, it eventually follows a logarithmic curve like a similar pattern observed in thermodynamic entropy.

Key words : Shannon entropy, Greenhouse gases, Uncertainty, Degree of freedom

1. 서론

베이컨, 데카르트, 뉴턴에 의해 시작된 기계론적 세계관에 의하면, 모든 자연현상은 예측 가능하며 자연의 모든 자원은 이용 가능한 것으로 해석된다. 이러한 기계론적 세계관에 의하여 17세기 이후 인류 문명은

급속도로 발전하였으나 그에 비해 자연환경은 지나치게 훼손되었으며, 병들어 갔다. 19세기 무렵에는 극지방의 오존층 파괴가 발생하는 등, 여러 가지 환경문제가 심각한 수준으로 제기되었으며, 최근에는 지구 온난화 및 이로 인한 기후변화가 화두가 되고 있다.

제레미 리프킨은 그의 저서 'Entropy'에서 미래 인

Received 15 July, 2013; Revised 8 October, 2013;

Accepted 15 October, 2013

*Corresponding author: Jae-Kyu Yang, Division of General Education (Environment), Kwangwoon University, Seoul, 139-701, Korea
Phone: +82-2-940-5769
E-mail: jkyang@kw.ac.kr

© The Korean Environmental Sciences Society. All rights reserved.
© This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

류를 위해서는 기계론적 세계관을 탈피하여 엔트로피적 세계관을 갖추어야 한다고 주장하였다 (Rifkin, 2009). 제레미 리프킨의 이 저서가 베스트 셀러가 되고 주목을 받게 됨에 따라 엔트로피라는 용어가 대중들에게 널리 퍼지게 되었으며 다(多)학문에서 사용되고 있던 엔트로피의 개념 또한 재조명을 받게 되었다.

엔트로피란 열역학 법칙에서 파생된 개념이다 (Feynman 등, 2006). 열역학 제 1법칙은 에너지 보존의 법칙으로서, 에너지는 결코 창조되거나 소멸될 수 없으며 다만 한 가지 형태에서 다른 형태로 변화할 뿐이라는 것을 의미한다. 여기에서 에너지의 형태가 변화할 때, 즉 한 상태에서 다른 상태로 옮겨갈 때 ‘일을 할 수 있는 유용한 에너지’는 손실되어 결국 더 이상 ‘일을 할 수 없는 무용한 에너지’로 전환되는데, 이 때 더 이상 일로 전환될 수 없는 에너지의 양을 엔트로피라 한다. 그리고 엔트로피는 결코 감소하지 않으며 지속적으로 증가한다는 것이 제 2 법칙이다.

최근 엔트로피의 개념을 새롭게 정의하여 지구온난화와 엔트로피의 상관관계에 대해 분석한 연구에서는, 날씨의 예측이 어려워지는 것은 지구온난화에 따른 엔트로피의 증가와 관련이 있으며, 엔트로피가 증가하는 것이 기상 예측의 불확실성을 높인다는 결론을 내리고 있다 (Williams, 2008). 이렇듯, 엔트로피의 개념을 재 정의하여, 엔트로피의 새로운 해석을 시도하는 연구가 존재하는 것에 반해, 다(多)학문에서 무질서도가 증가하는 상황을 표현하기 위해 혹은 불확실성의 정도를 나타내기 위해 정성적으로만 사용되고 있는 엔트로피의 정량적인 해석을 시도한 연구는 매우 미미하며, 측정방법론으로서의 그 기반 역시 매우 부족한 실정이다.

한편 20세기 정보이론 분야에서 샤논(Shannon)에 의하여 주창된 엔트로피 개념은 현재 정보이론뿐만 아니라 신호처리, 영상처리 등의 분야에서 활발히 사용되고 있으며, 엔트로피의 개념을 정량적으로 나타내고 있는 몇 안 되는 수식 중 하나이다.

이에 따라 본 연구에서는 환경분야에서 이슈가 되고 있는 지구온난화에, 정보이론에서의 샤논 엔트로피를 도입하여 정성적으로 사용되는 엔트로피 개념의 정량화를 시도하였다 (Shannon, 1948, 1953). 샤논 엔트로피의 인자에 확률변수가 사용된다는 것에 착안하

여 널리 알려진 온실가스인 CO₂, N₂O, CH₄의 농도를 대입하였다. 그리고 확률변수의 설정에 따른 세 종류의 엔트로피 E_1 , E_2 , E_3 를 정의하고, 각각의 엔트로피에 관한 해석으로부터 다음과 같은 엔트로피 별 고유의 특성을 도출하게 되었다.

E_1 은 구간별 변화량을 중심으로 예측 가능성의 정도를 나타내는 것으로 해석된다. 이는 샤논 엔트로피 및 열역학 엔트로피의 정성적 개념과는 상이하지만 변화량의 예측 모델로 유효함이 밝혀졌다. E_2 는 초깃값부터 누적되게 구한 엔트로피를 나타낸다. 비록 열역학적인 엔트로피와 샤논 엔트로피의 정성적 특성과의 상관성은 미약하지만, 상대 비교의 지표로서 유용함을 알 수 있었다. E_3 는 엔트로피 E_2 의 로그 밑을 고정시킴으로써 부분 구간에서 보완적 증감을 반복하여 평균적으로 로그함수를 따라 일정하게 증가하려는 성질을 가지고 있음을 보였다. 더불어 E_3 는 열역학의 엔트로피함수와 가장 유사한 해석이 가능함을 보여준다.

2. 자료 및 방법

2.1. 온실가스 선정 및 선정 이유

국제적 화두로 등장한 지구 온난화의 유발 기체로 알려진 온실가스의 농도가 증가하고 있다는 것이 엔트로피의 정성적 특성과 유사하다는 것에 착안하여, 온실가스를 엔트로피의 데이터로 선정하였다. 또한 오차를 줄이기 위해 온실가스의 실측구간만을 데이터로 사용하였다. 온실가스의 선정은 IPCC에서 정한 GWP(Global Warming Potential)값에 의하여 지구온난화에 큰 영향을 주는 것으로 알려진 세 종류의 가스를 택하였다. (이산화탄소(GWP : 1), 아산화 질소(GWP : 310), 메탄(GWP : 21) (Elrod, 1999; IPCC, 1990, 2001).

2.2. 엔트로피 함수의 설정 및 분석

샤논 엔트로피는 다음과 같이 정의된다(Shannon, 1948, 1953).

$$E = - \sum_{i=0}^n p_i \log_2 p_i \quad (1)$$

p_i 는 소스 symbol 의 발생확률을 의미하며 n 은 전체 symbol 의 개수를 나타낸다. 확률의 개념으로 수식

1은 평균의 의미가 되므로 샤논 엔트로피는 평균정보량이 된다.

자료를 샤논 엔트로피의 확률 변수인 p_i 에 적용하기 위하여, 확률변수를 재 정의하였다. 또한 이 확률 변수 p_i 를 다르게 설정함으로써 다른 분석결과를 이끌어 내었다.

확률의 의미는 $\frac{\text{특정 사건의 경우}}{\text{전체 사건의 경우}}$ 이므로, 사건의 경우에 대해 온실가스의 농도를 대입하여, $\frac{\text{특정 기간의 농도}}{\text{전체 기간의 농도}}$ 과 같이 p_i 를 정하였다. 하지만 해당 식의 분모는 연속적으로 변하는 농도를 이산적으로 합한 것이 된다. 이는 확률적 의미와 부합하지 않으므로, 이를 수정하여 샤논 엔트로피의 확률 변수 p_i 를 온실가스 농도의 변화량으로 계산한다. 즉, $\frac{\text{특정 기간의 변화량}}{\text{전체 변화량}}$ 으로 재 정의 하고, 샤논 엔트로피의 값을 해석하였다.

첫 번째로, 확률변수 p_i 를 다음과 같이 설정 해 볼 수 있다.

$$p_i = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_1} \right|, (1 \leq m < i \leq k \leq n) \quad (2)$$

식 (2)에서 x_i 는 i 번째 연도에 주어진 온실가스의 양을 의미하며, 식 (2)를 이용한 엔트로피는 아래와 같다.

$$E_1 = - \sum_{i=1}^{k-m} p_i \log_b p_i \quad (3)$$

식 (3)에서 b 는 상수를 의미한다. 식 (3)은 엔트로피의 적용을 산업혁명(1775~1850), 산업혁명 후(1850~1925), 그리고 정보혁명 과정(1925~2000)으로 나누어 확인해 봄으로서, 정의한 엔트로피의 의미가 산업의 발전에 의해 어떠한 영향을 받았는지 확인해 보고자 하였다.

두 번째로, 확률변수 p_i 를 다음과 같이 설정 해 볼 수 있다.

$$p_i = \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_m - x_1} \right|, (1 < i \leq m \leq n) \quad (4)$$

식 (4)는 자료의 범위에 따라 분모를 초깃값과 최근의 값의 차로 정하였고, 식 (4)를 이용한 엔트로피는 아래와 같다.

$$E_2 = - \sum_{i=1}^m p_i \log_m p_i \quad (5)$$

식 (5)는 m 이 1부터 n 까지 증가함에 따라, 연속된 엔트로피를 구하는 것으로 엔트로피의 최댓값을 1로 맞추기 위해 엔트로피 식에서 로그의 밑을 누적된 자료의 개수인 m 으로 설정하였고, 연도가 증가함에 따라 온실가스의 변화가 정의한 엔트로피에 어떠한 영향을 주는지 확인해 보고자 하였다.

세 번째는 식 (5)에서 설정한 엔트로피에서 로그의 밑을 고정하여 설정 하였다.

$$E_3 = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i \quad (6)$$

식 (6)은 초기 엔트로피와 같이 로그의 밑을 2로 고정하여, 구한 것으로 최댓값을 1로 고정하지 않을 경우 엔트로피가 온실가스의 농도에 따라 어떠한 변화를 갖는지 확인해 보고자 하였다.

3. 결과 및 고찰

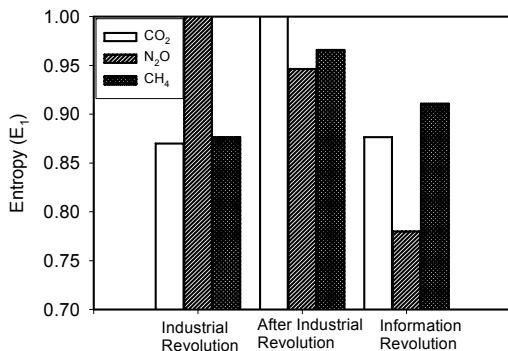
3.1. 자료분석 및 고찰

다음 결과는 Table 1을 이용하여 새롭게 정의한 엔트로피에 대한 결과 및 분석이다.

Fig. 1 에서 온실가스별로 각 세기의 엔트로피 값은 Table 1의 각 온실가스의 증가와 연관이 있다. 우선 산업혁명 과정에 있는 18~19세기(1775~1850)에는 아산화질소(N_2O)의 변화량이 일정함을 볼 수 있다. 이를 식 (3)의 엔트로피인 E_1 에 대입하면, 엔트로피는 최댓값인 1을 갖게 된다. 반면에 이산화탄소(CO_2)와 메탄(CH_4)은 산업혁명 과정에서 석탄의 무분별한 사용과 생분해성 매립 쓰레기의 증가로 인해 큰 폭으로 증가하면서 변화량 또한 지속적인 증가를 보인다. 이로 인해 산업혁명 과정에선 E_1 이 낮은 값을 갖게 되는데, 이러한 E_1 의 의미는 어떠한 변화율을 보일 것 인지를 예측하기가 어렵다는 것을 제시한다.

Table 1. Data of green house gas

Years	Industrial revolution			After industrial revolution				Information revolution		
	1775	1800	1825	1850	1875	1900	1925	1950	1975	2000
CO ₂ (ppm)	279	280	282	286	290	295	302	311	332	370.7
N ₂ O (ppb)	286	287	288	289	291	292	293	295	300	313
CH ₄ (ppb)	801	810	847	883	920	978	1,052	1,169	1,555	1,859

Fig. 1. Entropy E_1 .

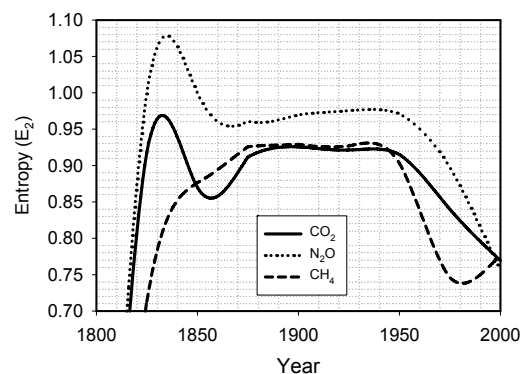
두 번째로, 산업혁명 후인 19~20세기(1850~1925)에는 질소 비료나 자동차가 점점 보급되어 아산화질소(N₂O)와 같은 질소 함유 기체가 빈번히 발생하였고, 이로 인해 변화율이 증가하였다. 그로인해, Fig. 1에선 엔트로피가 조금 감소하였다. 반면에 산업혁명 과정 때와는 다르게 이산화탄소(CO₂)와 메탄(CH₄)의 변화량은 일정 수준을 유지 하였다. 이는 농도는 지속적으로 증가하였지만, 그 증가율이 일정하다는 것을 의미하고, 변화량이 일정해짐에 따라 E_1 의 값이 증가하였다.

마지막으로, 정보혁명 과정인 19~20세기(1925~2000)에는 석탄 보다 효율이 좋은 석유의 보급이 활발해지고, 인구 증가로 인한 전기 사용이 증가함에 따라 모든 온실가스가 폭발적인 증가를 하게 된다. 이로 인해 변화율 또한 불규칙하게 변화하면서, 대부분의 온실가스 엔트로피가 감소하였고, 특히 아산화질소가 많이 변화하면서 Fig. 1에서 엔트로피 값이 작아졌음을 확인할 수 있다.

그 결과 E_1 의 값은, 농도의 변화량이 일정하게 증감하는 구간에서 높게 나오고, 농도의 변화량이 불규칙적으로 증감하는 구간은 낮게 나오는 것을 확인할

수 있었다. 이를 통해 E_1 의 개념은, 샤논 엔트로피 및 열역학 엔트로피의 정성적 개념과는 상이하지만, 변화량의 예측정도에 대한 모델링은 가능하다는 것을 확인할 수 있었다.

Fig. 2는 식 (5)를 이용하여 구한 엔트로피이다. 그래프를 보면, 우선 이산화탄소(CO₂)의 엔트로피와 아산화질소(N₂O)의 엔트로피는 비슷한 유형을 보이지만, 메탄(CH₄)의 엔트로피는 조금 상이한 유형을 보이는 것을 확인할 수 있다. Fig. 2에서 메탄(CH₄)이 다르게 변화하는 부분인 (1825~1850, 1950~1975)이 Fig. 1에서 나누었던 산업혁명, 산업혁명 후, 정보혁명의 경계임을 알 수 있고, Table 1에서는 메탄(CH₄)의 변화가 큰 부분임을 볼 수 있다. 1825~1850년도에서는 누적된 자료가 많지 않는 상태에서 증가가 일어난 것이기 때문에 엔트로피의 해석이 난해하지만, 1950~1975년도 같은 경우는 이전에 없던 증가가 발생한 시기임을 알 수 있다. 실제로, 1775~1950년에 걸쳐 약 368 ppb만큼 증가한 메탄이 1950~1975년 사이에 약 386 ppb만큼의 큰 변화를 보이는 이상 현상을 확인할 수 있다.

Fig. 2. Entropy E_2 .

따라서 엔트로피 E_2 의 의미는 큰 변화에 대하여 현재까지 누적되어온 자료에 대한 영향력을 표시하는 지수로써 쓰일 수 있지만, 하나의 변수에 대한 단일적인 해석보다는 비교대상이 존재하는 경우에 그 차이를 확인 할 수 있는 유용한 도구로서 활용 될 수 있을 것이다. 위의 해석으로 보아, 엔트로피 E_2 역시 열역학적인 엔트로피와 샤논 엔트로피의 정성적 특성과의 상관성은 미약하지만, 상대 비교의 지표로서는 유용하다고 판단된다.

식 (6)를 이용하여 구한 E_3 는 E_2 에서 로그의 밑을 2로 고정하였을 경우에 대한 값으로 정의하였다. 그 결과 실제 열역학적 엔트로피 및 정보이론의 샤논 엔트로피에서 로그의 특성과 유사한 개형의 그래프 결과가 나왔고, 자료가 누적됨에 따라 엔트로피 값은 로그함수를 따라 증가하는 추세를 보였다. 메탄(CH_4)의 경우 1950~1975년 사이에 엔트로피가 감소하였다가, 1975~2000년 사이에 다시 증가하는 것을 볼 수 있는데, 이는 Table 1을 통하여, 변화가 크게 일어난 구간임을 알 수 있다. 즉, 1950~1975년 사이에 나타난 변화량의 급격한 증가가 E_3 의 감소를 불러 왔고, 다시금 1975~2000년 사이에 변화량이 감소함으로써 엔트로피는 증가하였다.

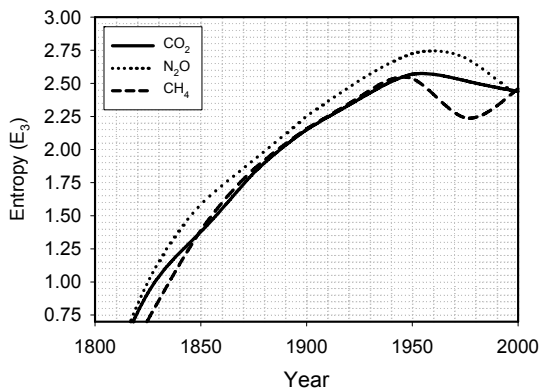


Fig. 3. Entropy E_3 .

이는 E_3 가 평균 변화량과의 편차가 큰 변화에 민감하다는 것을 의미한다. 즉, 큰 변화량이 전체 변화량에도 영향을 주어 기존의 평균 변화량이 변하고, 평균

변화량이 변하여 E_3 가 변하게 됨을 의미한다.

여기서 주목할 점은 메탄(CH_4)의 E_3 가 감소하는 구간에 있던 1950~1975년의 경우, 그 후인 1975~2000년에서 다시 로그함수를 따라 가는 것을 볼 수 있는데, 이는 로그 함수를 벗어나는 변화가 일어나도 점차적으로 로그함수로 수렴하려는 경향을 보이는데, 이는 E_3 의 값이 부분 구간에서는 증감을 반복할지라도, 평균적 의미에서는 로그함수를 따라 지속적으로 증가함을 예측할 수 있다. 그러므로 E_3 는 고전적 열역학 엔트로피의 함수적 특성을 갖고 있다고 할 수 있다.

3.2. 타당성 검토

위의 연구에서 온실가스에 대한 엔트로피를 3가지의 경우에 대해 그래프를 이용하여 분석 및 해석하였다. 따라서 세 경우의 엔트로피가 샤논 엔트로피와 열역학적 엔트로피의 정량적, 정성적 성질의 부합 여부에 대한 타당성 검토를 하면 다음과 같다.

3.2.1. E_1

E_1 은 일정한 시기에 대한 하나의 값으로 표시되며, 그 값은 온실가스의 변화가 얼마나 무질서하게 변하는가에 대한 값, 즉 온실가스의 변화가 예측 가능한지에 대한 값으로 표시된다. 만약에 엔트로피 값이 낮으면 온실가스의 변화는 무질서하고 예측하기 어려운 상태로 변화하고 있음을 의미하며, 엔트로피 값이 높다면 온실가스의 변화는 질서 있고 예측하기 쉬운 상태로 변화하고 있음을 의미하게 된다.

이는 열역학적 엔트로피의 정성적 특성인 무질서도와 일맥상통하는 부분이 있지만, 지속적으로 증가한다는 엔트로피의 법칙에 대해서는 적용하기 어렵다는 것을 알 수 있었다. 또한 샤논 엔트로피의 특성인 로그 함수적 특성 또한 갖고 있다고 보기 어렵기에, 엔트로피로서의 타당성은 결여된다.

3.2.2. E_2

E_2 는 초깃값부터 누적되어 온 온실가스 농도의 변화량으로 구해지며, 주어진 온실가스의 농도가 누적되어 온 온실가스 농도의 변화량에 대해 정량적으로 얼마나 영향을 주는가에 대한 척도로 사용되어 질 수 있다. 즉 엔트로피의 값이 높으면 주어진 온실가스의

농도가 누적되어온 온실가스의 농도의 변화량과 비슷한 변화량을 갖고 있음을 의미하며, 엔트로피의 값이 낮으면 주어진 온실가스의 농도가 누적되어 온 온실가스의 농도의 변화량 보다 큰 변화량이 발생함을 의미한다. 하지만 E_2 는 열역학적 그리고 샤논 엔트로피로서의 성질을 갖고 있지 않다. 또한 단일 온실가스에 대한 해석이 난해하고 다른 온실가스를 비교 대상으로 필요로 하기 때문에, 엔트로피로서의 타당성은 결여된다.

3.2.3. E_3

E_3 는 E_2 에서 로그의 밑을 고정하여 구한 값으로 샤논 엔트로피의 로그 함수적 특성을 갖도록 도출하였고, 실제 온실가스를 대입하였을 때에도 로그 함수적 특성을 갖고 있었다. 그 결과 E_3 가 크게 변한다는 것은 주어지는 온실가스의 농도의 변화가 전체 변화에 영향을 미친다는 의미를 뜻한다.

이러한 성질은 평균 변화량을 유지하려는 성질을 갖는다는 샤논 엔트로피의 평균 정보량과도 일맥상통하였음을 볼 수 있었다. 또한 열역학적 엔트로피의 정성적 성질인 엔트로피는 항상 증가한다는 의미는 새롭게 정의한 E_3 가 항상 보상하려는 성질 즉 ‘감소하였어도, 감소한 만큼 다시 증가한다’라는 의미와 대응되는 것을 확인할 수 있으며, 열역학적 엔트로피의 의미와 샤논 엔트로피의 의미에 대해 타당성이 존재한다.

위에서 언급된 열역학 엔트로피와 새로 정의된 엔트로피에 대한 특성을 비교 하면, Table 2와 같은 표로 요약 될 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 전산학에서 사용되는 샤논의 엔트로피로부터 고전적 열역학 엔트로피의 개념을 충족시키는 환경 분야에서의 세 가지의 서로 다른 엔트로피를 정의하였고, 구체적으로 온실가스에 적용함으로써 각 지수별 특성화에 관한 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

1) E_1 은 샤논 엔트로피 및 열역학 엔트로피의 정성적 개념과는 상이하지만 각 시대 구간 내에서 온실가스 농도 변화량의 예측 가능성의 정도를 나타낸다.

2) 엔트로피 지수를 정규화한 E_2 는 열역학적인 엔트로피와 샤논 엔트로피의 정성적 특성과의 상관성은 낮지만, 온실가스 상호간의 상대 비교 지표로 유효하다.

3) E_2 의 로그 밑을 고정하여 구한 E_3 는 일부 특정 구간에서는 보완적 증감을 반복하지만 평균적으로는 로그함수를 따라 변화한다는 것을 알 수 있었고, 이는 고전적 열역학 엔트로피와 동일한 패턴으로 해석될 수 있음을 보여준다.

감사의 글

이 논문은 2012년도 광운대학교 교내학술비 지원에 의해 연구되었습니다.

Table 2. Comparative characteristics of entropies(O : High, Δ : Middle, X : Low)

Entropies	Logarithmic	Always increase	Degree of randomness	Immediacy of interpretation
Thermodynamics	O	O	O	O
Shannon	O	Δ	X	O
E_1	X	X	O	Δ
E_2	X	X	Δ	O
E_3	O	Δ	X	Δ

참 고 문 헌

- Elrod, M., 1999, Greenhouse Warming Potential Model, J. Chem. Educ., 76, 1702-1705.
- Feynman, R. P., Leighton, R., Sands, M., 2007, The Feynman lecture on Physics I, Pearson Addison Wesley, 44-13 ~16.
- IPCC, 1990, IPCC First Assessment Report, IPCC.
- IPCC, 2001, IPCC Third Assessment Report, IPCC.
- Rifkin, J., 2009, Entropy, Se-Jong, Korea, 239-325.
- Shannon, C. E., 1948, A Mathematical Theory of Communication, Bell Syst. Tech. J., 27, 379-423.
- Shannon, C. E., 1953, General Treatment of the problem of coding, IEEE Transactions on Information Theory, 102-104.
- Williams, J. M., 2008, Entropy shows that global warming should cause increased variability in the weather, <http://arxiv.org/pdf/physics/0008228.pdf>.