

다변량 통합공정관리의 재수정 절차에서 모수추정[†]

조교영¹ · 박중숙²

^{1,2} 경북대학교 통계학과

접수 2013년 8월 29일, 수정 2013년 10월 2일, 게재확정 2013년 10월 7일

요약

다변량 통합공정관리의 기본절차는 잡음이 내재하는 공정에 수정조치를 취하여 공정편차벡터를 백색잡음벡터로 전환하도록 하여 공정제곱편차벡터를 최소화하게 되는 것이며, 이러한 다변량 통합공정관리의 수정활동을 하는 경우 공정에 이상원인이 발생하면 관리도를 통해 이를 탐지하고 제거하게 된다. 수정된 공정은 이상원인 발생 전에는 백색잡음이지만, 이상원인 발생 후 다양한 형태의 시계열 모형으로 변환하게 된다. 만약 수정된 공정을 탐지하여 이상원인의 신호가 발생한 경우 교정활동을 통하여 이를 제거해야 하지만, 구조적으로 교정이 불가능 하거나 교정활동의 비용이 많이 발생하는 경우에는 이상원인의 효과를 감안하여 수정활동을 재조정해야할 것이다. 이 논문에서는 공정모형으로 다변량 IMA(1,1)모형을 가정하고 다변량 통합공정관리 절차를 수행하는 경우 이상신호가 발생한 후 재수정 절차에서 필요한 모수추정을 하고자 한다.

주요용어: 다변량 관리도, 다변량 통합공정관리, 모수추정, 재수정절차.

1. 서론

생산 기술이 발전하고 제품 구조가 복잡해짐에 따라 하나의 특성치 보다는 여러 개의 연관된 특성치를 동시에 관리해야 하는 경우가 많아지게 되었다. 다변량 공정관리는 상관관계가 존재하는 다수의 품질 특성치들을 관리하기 위해 사용하는 것이다.

다변량 통합공정관리의 기본절차는 우선 잡음이 내재하는 공정에 대해 수정조치를 취하여 공정편차벡터를 백색잡음벡터 (white noise vector)로 전환하도록 하여 공정제곱편차벡터를 최소화하게 된다. 이런 수정절차를 MMSE (minimum mean square error)수정이라 한다. 또한 수정활동을 하면서 다변량 관리도를 통하여 공정에 이상원인의 발생을 탐지하게 된다. Lee와 Lee (2007)는 자기상관이 있는 공정모형으로 AR(1) 모형에 랜덤오차가 추가된 모형을 사용하고 공정모수들의 변화시점에 대한 추정치를 제안하였다. 공정수정을 수행하는 공학적 공정관리에 대해서는 Del Castillo (2002), 통합공정관리에 대한 최근 연구는 Pan과 Del Castillo (2003), Jiang (2004), Runger 등 (2006), Park (2007), Nembhard와 Chen (2007), Park과 Lee (2008), 그리고 Park과 Reynolds (2008) 등이 있다.

다변량 통합공정관리에서 MMSE 수정된 공정은 이상원인 발생 전에는 백색잡음벡터가 되지만, 이상원인 발생 후에는 다양한 형태의 다변량 시계열 모형으로 변환하게 된다. 이러한 현상은 공정모수의 변환을 야기 시키는 이상원인 효과의 다양성에 기인한다. 이상원인의 효과는 크게 세 종류, 즉 지속적 변

[†] 이 논문은 2010학년도 정부 (교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임 (과제번호: NRF-2010-0023732).

¹ 교신저자: (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 통계학과, 교수.

E-mail: gycho@knu.ac.kr

² (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 통계학과, 박사과정.

화 (sustained shift), 지속적 흐름 (sustained drift), 그리고 일시적 변화 (transient shift)로 분류한다 (Park과 Lee, 2009). 이 세 가지 변화 중에서, 지속적 변화는 수정된 공정에서 그 효과의 크기가 지속적으로 감소하고, 지속적 흐름은 공정을 목표치로부터 점점 더 멀어지게 하는 특성이 있다. 반면에 일시적 변화는 일정잔류기간 후에는 그 원인이 더 이상 존재하지 않게 된다.

다변량 통합공정관리에서 MMSE수정을 수행할 때, 위에서 언급한 바와 같이 이상원인의 형태에 따라 수정된 공정은 다양한 형태를 가지게 된다. 이와 같이 수정된 공정을 탐지하여 이상원인의 신호가 있을 경우 교정활동을 통하여 이를 제거해야 하지만, 교정활동의 비용이 너무 크거나 또는 구조적으로 이를 제거할 수 없는 경우에는 이상원인의 효과를 감안하여 수정활동을 재조정해야 할 것이다. Cho와 Park (2011)은 이상원인의 효과가 지속적 변화와 지속적 흐름인 경우 이상신호 후 공정을 재수정 (readjustment)하는 절차를 제안하였다.

본 논문에서 관리상태의 공정모형, 이상상태에서의 공정모형, 이상원인 탐지 후 재수정 절차를 소개한 후 공정모형으로서 다변량 IMA(1,1)모형 가정하에서 다변량 통합공정관리 절차를 수행하는 경우 이상신호가 발생한 후 재수정 절차에서 최우추정법을 사용하여 모수추정을 한다.

2. 관리상태의 공정모형

이 절에서는 다변량 통합공정관리 절차를 수행하는 공정에서 이상원인이 발생하기 이전인 관리상태의 공정모형 (in control process model)에 대하여 설명하고자 한다.

먼저 \mathbf{Y}_t 는 시점 t 에서의 관측값의 벡터라고 할 때 편의상 공정의 목표값을 $\mathbf{0}$ 으로 놓을 경우 \mathbf{Y}_t 는 목표값으로부터의 관측편차 (observed deviation from target) 벡터가 된다. 이후로 공정의 목표값은 $\mathbf{0}$ 으로 간주하며 p 차원으로 가정한다. \mathbf{X}_t 는 시점 t 에서의 입력변수 값의 벡터, \mathbf{G} 는 시스템계인 행렬 (system gain matrix) 또는 공정계인 행렬 (process gain matrix), 그리고 \mathbf{N}_t 는 시점 t 에서의 잡음값의 벡터라 할 때, 가장 간단한 공정모형으로

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{G}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{N}_t \quad (2.1)$$

즉,

$$\mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{t1} \\ \mathbf{Y}_{t2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{tp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{t-11} \\ \mathbf{X}_{t-12} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{t-1p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{t1} \\ \mathbf{N}_{t2} \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{tp} \end{pmatrix}$$

을 고려할 수 있다.

이 논문에서 잡음벡터인 \mathbf{N}_t 는 다변량 IMA(1, 1)모형을 사용하며, 이 모형은 공정수준의 유동적 현상을 잘 표현하여 공정잡음 모형으로 적합한 것으로 알려져 있다 (Box와 Kramer, 1992; Vander Wiel, 1996; Montgomery, 1999). 다변량 IMA(1, 1)모형은 다음과 같다.

$$\mathbf{N}_t = \mathbf{N}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_t - \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\epsilon}_{t-1}$$

여기서, $\boldsymbol{\Theta}$ 와 $\boldsymbol{\epsilon}_t$ 는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Theta}_{p \times p} = \begin{pmatrix} \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta \end{pmatrix}, \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon)$$

Cho와 Park (2011)은 후진연산자 (backshift operator)를 이용하여 잡음벡터 N_t 를 다음과 같이 나타내었다.

$$N_t = (I - B)^{-1}(I - \Theta B)\epsilon_t \tag{2.2}$$

여기서 B 는 $BN_t = N_{t-1}$ 인 후진연산자이고 시점 t 에서의 공정오차벡터인 ϵ_t 는 평균벡터는 0 이고 분산-공분산 행렬이 Σ_ϵ 인 다변량 정규분포를 따르는 확률변수를 가정한다. 또한 θ 는 $0 \leq \theta \leq 1$ 인 평활상수 (smoothing constant)를 나타낸다. 공정모형에서는 시작 시점이 있기 때문에 $t \leq 0$ 인 경우 $N_t = 0$ 과 $\epsilon_t = 0$ 을 가정하며, 시스템계인 행렬 G 뿐만 아니라 잡음모형의 모수인 Θ 와 Σ_ϵ 은 참값과 차이가 없을 정도로 잘 추정할 수 있어 알려져 있는 값이라고 가정한다. Cho와 Park (2011)에 의하면 식 (2.1)의 공정모형은 다음과 같이 표현된다.

$$Y_t = GX_{t-1} + \epsilon_t + (I - B)^{-1}(I - \Theta)\epsilon_{t-1}$$

또한, 순수적분 콘트롤러 (pure integral controller)는 다음과 같음을 보였다.

$$X_t = -G^{-1}(I - \Theta) \sum_{j=1}^t Y_j \tag{2.3}$$

3. 이상상태에서의 공정모형

먼저 이상원인은 알려지지 않은 시점 τ 와 $\tau + 1$ 사이에서 발생하며, 잡음벡터 N_t 의 평균벡터와 분산-공분산 행렬을 변화시킨다고 가정하자. 일반적으로 τ 를 공정의 변화시점 (process change point)이라 칭한다. 평균벡터에 대한 이상원인의 효과는 지속적 변화 또는 지속적 흐름을 가정하며, 분산-공분산 행렬에 대한 효과는 지속적 변화만을 가정하기로 한다. 평균벡터와 분산-공분산 행렬에 변화를 주는 이상원인이 발생한 후의 잡음벡터모형은 식 (2.2)와 대비하여 $k \geq 1$ 에 대하여

$$N_{\tau+k} = (I - B)^{-1}(I - \Theta B)\epsilon'_{\tau+k} + \Sigma_\epsilon^{1/2}\mu_k \tag{3.1}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 $\epsilon'_{\tau+k} = \Sigma_k^{1/2}\epsilon_{\tau+k}$ 이고, $k \leq 0$ 인 경우에는 $\mu_k = \Sigma_k = 0$ 으로 정의한다. Cho와 Park (2011)은 관리상태와 이상상태에서의 공정모형은 각각 다음과 같음을 보였다.

$$\begin{cases} Y_t = \epsilon_t, t \leq \tau \\ Y_{\tau+k} = \Sigma_k^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + (I - \Theta B)^{-1}(I - B)\Sigma_\epsilon^{1/2}\mu_k, k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

또한 후진연산자를 사용하지 않고 풀어서 표현하면 다음과 같음을 보였다.

$$Y_{\tau+k} = \Sigma_k^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + \Sigma_\epsilon^{1/2}\mu_k - (I - \Theta) \sum_{j=1}^{k-1} \Theta^{j-1}\Sigma_\epsilon^{1/2}\mu_{k-j} \tag{3.3}$$

Cho와 Park (2011)은 이상원인의 효과가 평균벡터에는 지속적 변화 ($\mu_k = \delta$), $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)'$, 분산-공분산 행렬에는 지속적 흐름 ($\Sigma_k = \Sigma$)인 경우 식 (3.3)은

$$Y_{\tau+k} = \Sigma^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + \Theta^{k-1}\Sigma_\epsilon^{1/2}\delta \tag{3.4}$$

와 같으며, 평균벡터에는 지속적 흐름, 분산-공분산 행렬에는 지속적 변화가 발생한 경우, 즉 $\mu_k = k\gamma$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)'$ 이고 $\Sigma_k = \Sigma$ 인 경우 식 (3.3)은 식 (3.5)가 됨을 보였다.

$$Y_{\tau+k} = \Sigma^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + (I + \Theta + \Theta^2 + \dots + \Theta^{k-1})\Sigma_\epsilon^{1/2}\gamma \tag{3.5}$$

식 (3.4)와 (3.5)를 살펴보면, 모두 이상원인의 발생 후 관측값의 평균벡터와 분산-공분산 행렬이 변하는 형태로서 평균벡터와 분산-공분산 행렬의 변화를 동시에 탐지하는 관리도를 사용하여 이상원인을 탐지할 수 있다.

4. 이상원인 탐지 후 재수정 절차

앞에서 언급한 바와 같이 MMSE 조정된 공정에서 관측값인 Y_t 의 함수를 통계량으로 하는 관리도를 사용하여 이상원인을 탐지할 수 있다. 그런데 관리도에서 이상상태의 신호가 주어졌을 경우 교정활동을 통하여 이를 제거해야 하지만, 교정활동의 비용이 많이 발생하거나 또는 구조적으로 이를 제거할 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 이런 경우에는 식 (2.3) 대신 이상원인의 효과를 감안하여 수정활동을 재조정해야 할 것이다. 이상원인은 3절에서 가정한 바와 같이 잡음의 평균벡터와 분산-공분산 행렬을 변화시키는 경우를 고려해 보자. 또한 이상상태의 신호는 공정에 이상원인이 발생하고 L_1 시점이 지난 후, 즉 시점 $\tau + L_1$ 에 주어진다고 가정한다. 신호 이후 시점에서의 잡음모형은 $k \geq L_1 + 1$ 에 대하여 식 (3.1)과 같으므로, 공정모형은

$$Y_{\tau+k} = GX_{\tau+k-1} + \epsilon'_{\tau+k} + (I - B)^{-1}(I - \Theta)\epsilon'_{\tau+k-1} + \Sigma_{\epsilon}^{1/2}\mu_k$$

로 표현된다. Cho와 Park (2011)은 MMSE 콘트롤러가 다음과 같음을 보였다.

$$X_{\tau+k-1} = -G^{-1} \left\{ (I - B)^{-1}(I - \Theta)Y_{\tau+k-1} + \Sigma_{\epsilon}^{1/2}\mu_k \right\}$$

수정을 수행하는 시점 $\tau + k - 1$ 에서 다음 시점의 평균벡터의 변화량에 관련된 μ_k 는 추정을 해야 하는 값이다. 따라서 실제 공정에서 수행하는 MMSE 콘트롤러는

$$X_{\tau+k-1} = -G^{-1} \left\{ (I - B)^{-1}(I - \Theta)Y_{\tau+k-1} + \Sigma_{\epsilon}^{1/2}\hat{\mu}_k \right\} \quad (4.1)$$

가 된다. Cho와 Park (2011)은 재수정을 수행할 경우 이상신호 이후, 즉 시점 $\tau + k$ ($k \geq L_1 + 1$)에서의 공정모형이

$$Y_{\tau+k} = \Sigma_k^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + (I - \Theta B)^{-1}(I - B)\Sigma_{\epsilon}^{1/2}(\mu_k - \hat{\mu}_k)$$

와 같으며 후진연산자를 사용하지 않고 풀어서 표현하면 식 (4.2)와 같음을 보였다.

$$Y_{\tau+k} = \Sigma_k^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + \Sigma_{\epsilon}^{1/2}(\mu_k - \hat{\mu}_k) - (I - \Theta) \sum_{j=1}^{k-1} \Theta^{j-1} \Sigma_{\epsilon}^{1/2}(\mu_{k-j} - \hat{\mu}_{k-j}) \quad (4.2)$$

이와 같이 이상신호 이후 재수정을 수행 할 경우 두 가지 이상원인의 효과를 적용하여 표현하면 다음과 같다. Cho와 Park (2011)은 평균벡터와 분산-공분산 행렬에 지속적 변화가 발생하는 경우, 식 (4.2)은

$$Y_{\tau+k} = \Sigma^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + \Theta^{k-1}\Sigma_{\epsilon}^{1/2}(\delta - \hat{\delta}) \quad (4.3)$$

와 같으며, 평균벡터에는 지속적 흐름, 분산-공분산 행렬에는 지속적 변화가 발생한 경우에는 식 (4.2)은 식 (4.4)와 같음을 보였다.

$$Y_{\tau+k} = \Sigma^{1/2}\epsilon_{\tau+k} + (I + \Theta + \Theta^2 + \dots + \Theta^{k-1})\Sigma_{\epsilon}^{1/2}(\gamma - \hat{\gamma}) \quad (4.4)$$

5. 모 수 추 정

평균벡터 μ_k 의 추정은 Park과 Lee (2008)가 제안한 MLE (maximum likelihood estimator)를 참고한다. 이상상태의 신호가 발생한 시점을 $T(= \tau + L_1)$ 라 할 때, 시점 $T^*(= T, T + 1, \dots)$ 에서 다음 시점 $T^* + 1$ 의 변화량인 $\mu_{T^*+1-\tau}$ 에 대한 추정량을 계산하기 위해서는 공정의 변화시점인 τ 의 추정 또한 필요하다. 이상원인의 효과를 두 가지로 가정하였다. 첫 번째 경우의 모수 추정과정을 다음과 같이 증명하고자 한다. 공정상태에서의 모형과 이상상태 발생 이후의 모형은 식 (3.4)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_t = \begin{cases} \epsilon_t, & t \leq \tau \\ \Sigma^{1/2} \epsilon_t + \Theta^{t-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta, & t \geq \tau + 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

다변량 정규분포 가정하에서, 식 (5.1)의 식을 이용하여 평균벡터와 분산-공분산행렬을 표현하면 다음과 같다.

$$E(Y_t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau \\ \Theta^{t-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta, & t \geq \tau + 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$Cov(Y_t) = \begin{cases} \Sigma_\epsilon, & t \leq \tau \\ \Sigma \Sigma_\epsilon, & t \geq \tau + 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

위의 식 (5.2)와 (5.3)을 이용하여 우도함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} L(\tau, \delta, \Sigma) &= \prod_{j=1}^t f(Y_j) = \prod_{j=1}^{\tau} f(Y_j) \cdot \prod_{j=\tau+1}^t f(Y_j) \\ &= \prod_{j=1}^{\tau} (2\pi)^{-p/2} |\Sigma_\epsilon|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y_j)' \Sigma_\epsilon^{-1} (Y_j) \right\} \cdot \prod_{j=\tau+1}^t (2\pi)^{-p/2} |\Sigma \Sigma_\epsilon|^{-1/2} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Y_j - \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta)' (\Sigma \Sigma_\epsilon)^{-1} (Y_j - \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta) \right\} \end{aligned}$$

평균의 지속적 변화인 경우, $k \geq \tau + 1$ 에 대하여 $\mu_k = \delta$ 가 된다. 이상상태의 신호가 발생한 시점 T 에서 τ 의 MLE는 다음과 같다.

$$\hat{\tau} = \arg \min \left\{ (\tau - p\tau) \ln |\Sigma_\epsilon| + (pt - p\tau) (\ln |\hat{\Sigma}| + 1) + \sum_{j=1}^{\tau} (Y_j' \Sigma_\epsilon^{-1} Y_j) \right\} \quad (5.4)$$

(5.4)의 증명은 부록에 있다. $\mu_{T^*+1-\tau}$ 와 Σ 의 MLE는 다음과 같다.

$$\hat{\mu}_{T^*+1-\tau} = \hat{\delta} = \frac{\sum_{j=\tau+1}^t (\Theta^{j-\tau-1} Y_j)}{\Sigma_\epsilon^{1/2} \sum_{j=\tau+1}^t (\Theta^{j-\tau-1})' (\Theta^{j-\tau-1})} = \Sigma_\epsilon^{-1/2} \bar{Y}_{\tau+1,t}^S \quad (5.5)$$

$$\hat{\Sigma} = (pt - p\tau)^{-1} \Sigma_\epsilon^{-1} \sum_{j=\tau+1}^t (Y_j - \Theta^{j-\tau-1} \bar{Y}_{\tau+1,t}^S) (Y_j - \Theta^{j-\tau-1} \bar{Y}_{\tau+1,t}^S)' \quad (5.6)$$

여기서, $\bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^S = \sum_{j=\tau+1}^t (\boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1} \mathbf{Y}_j) / \sum_{j=\tau+1}^t (\boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})' (\boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})$ 이다. 식 (5.5)와 (5.6)의 증명은 부록에 있다.

평균의 지속적 흐름인 경우, $k \geq \tau + 1$ 에 대하여 $\boldsymbol{\mu}_k = k\boldsymbol{\gamma}$ 이 된다. 지속적인 변화의 경우와 유사하게 이상상태의 신호가 발생한 시점 T 에서 τ 의 MLE는 다음과 같다.

$$\hat{\tau} = \arg \min \left\{ (\tau - p\tau) \ln |\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon| + (pt - p\tau) (\ln |\hat{\boldsymbol{\Sigma}}| + 1) + \sum_{j=1}^{\tau} \mathbf{Y}_j' \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} \mathbf{Y}_j \right\}$$

또한 $\boldsymbol{\gamma}$ 와 $\boldsymbol{\Sigma}$ 의 MLE는 다음과 같다.

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1}) \mathbf{Y}_j}{\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{1/2} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})' (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})} = \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1/2} \bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^D$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (pt - p\tau)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\Theta}_j' \bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^D) (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\Theta}_j' \bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^D)'$$

여기서

$$\bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^D = \frac{\sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1}) \mathbf{Y}_j}{\sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})' (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_j' = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^2 + \cdots + \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1})$$

이다. 이 MLE들의 증명은 식 (5.5)과 (5.6)의 증명과 유사하여 생략한다.

부록

식 (5.4)의 증명:

다음의 우도와 로그우도를 유도할 수 있다.

$$L(\tau) = (2\pi)^{-pt/2} |\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon|^{-\tau/2} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon|^{-p(t-\tau)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}_j)' \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \right\} \cdot$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} tr \left((\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon)^{-1} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{1/2} \hat{\boldsymbol{\delta}})' (\mathbf{Y}_j - \boldsymbol{\Theta}^{j-\tau-1} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{1/2} \hat{\boldsymbol{\delta}}) \right) \right\}$$

$$= (2\pi)^{-pt/2} |\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon|^{-\tau/2} |\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon|^{-p(t-\tau)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}_j)' \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \right\} \cdot$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} tr (pt - p\tau) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \ln(L(\tau)) &= -\frac{pt}{2} \ln(2\pi) - \frac{\tau}{2} \ln |\Sigma_\epsilon| - \frac{p(t-\tau)}{2} \ln |\widehat{\Sigma} \Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} \mathbf{Y}'_j \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{Y}_j - \frac{1}{2} (pt - p\tau) \\
 &= -\frac{pt}{2} \ln(2\pi) - \frac{pt}{2} \ln |\Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2} \left[(\tau - p\tau) \ln |\Sigma_\epsilon| + (pt - p\tau) (\ln |\widehat{\Sigma}| - 1) + \sum_{j=1}^{\tau} \mathbf{Y}'_j \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{Y}_j \right] \\
 &= -\frac{pt}{2} \ln(2\pi) |\Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2} \left[(\tau - p\tau) \ln |\Sigma_\epsilon| + (pt - p\tau) (\ln |\widehat{\Sigma}| - 1) + \sum_{j=1}^{\tau} \mathbf{Y}'_j \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{Y}_j \right]
 \end{aligned}$$

따라서 다음의 식이 성립한다.

$$\hat{\tau} = \arg \min \left\{ (\tau - p\tau) \ln |\Sigma_\epsilon| + (pt - p\tau) (\ln |\widehat{\Sigma}| + 1) + \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}'_j \Sigma_\epsilon^{-1} \mathbf{Y}_j) \right\}$$

식 (5.5)의 증명:

$$\begin{aligned}
 L(\tau, \delta, \Sigma) &= \prod_{j=1}^t f(\mathbf{Y}_j) = \prod_{j=1}^{\tau} f(\mathbf{Y}_j) \cdot \prod_{j=\tau+1}^t f(\mathbf{Y}_j) \\
 &= \prod_{j=1}^{\tau} (2\pi)^{-p/2} |\Sigma_\epsilon|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y}_j)' \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \right\} \cdot \prod_{j=\tau+1}^t (2\pi)^{-p/2} |\Sigma \Sigma_\epsilon|^{-1/2} \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y}_j - \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta)' (\Sigma \Sigma_\epsilon)^{-1} (\mathbf{Y}_j - \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta) \right\} \\
 &= (2\pi)^{-pt/2} |\Sigma_\epsilon|^{-\tau/2} |\Sigma \Sigma_\epsilon|^{-p(t-\tau)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}_j)' \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \right\} \\
 &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta)' (\Sigma \Sigma_\epsilon)^{-1} (\mathbf{Y}_j - \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2} \delta) \right\} \\
 \ln(L(\tau, \delta, \Sigma)) &= -\frac{pt}{2} \ln(2\pi) - \frac{\tau}{2} \ln |\Sigma_\epsilon| - \frac{p(t-\tau)}{2} \ln |\Sigma \Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}_j)' \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \delta)' (\Sigma \Sigma_\epsilon)^{-1} (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \delta) (\because \Lambda_j = \Theta^{j-\tau-1} \Sigma_\epsilon^{1/2}) \\
 \frac{\partial \ln(L(\tau, \delta, \Sigma))}{\partial \delta} &\simeq \sum_{j=\tau+1}^t (-2\Lambda'_j \mathbf{Y}_j + 2\Lambda'_j \Lambda_j \delta)
 \end{aligned}$$

따라서 다음의 식이 성립한다.

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{j=\tau+1}^t \Lambda'_j \mathbf{Y}_j}{\sum_{j=\tau+1}^t \Lambda'_j \Lambda_j} = \frac{\sum_{j=\tau+1}^t (\Theta^{j-\tau-1} \mathbf{Y}_j)}{\Sigma_\epsilon^{1/2} \sum_{j=\tau+1}^t (\Theta^{j-\tau-1})' (\Theta^{j-\tau-1})}$$

식 (5.6)의 증명:

$$\begin{aligned} \ln(L(\tau, \Sigma)) &= -\frac{pt}{2} \ln(2\pi) - \frac{\tau}{2} \ln |\Sigma_\epsilon| - \frac{p(t-\tau)}{2} \ln |\Sigma \Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}_j)' \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (\Sigma \Sigma_\epsilon)^{-1} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \hat{\boldsymbol{\delta}}) (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \hat{\boldsymbol{\delta}}) \right\} \\ \ln(L(\tau, \Sigma)) &= -\frac{pt}{2} \ln(2\pi) - \frac{\tau}{2} \ln |\Sigma_\epsilon| - \frac{p(t-\tau)}{2} \ln |\Sigma \Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tau} (\mathbf{Y}_j)' \Sigma_\epsilon^{-1} (\mathbf{Y}_j) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (\Sigma \Sigma_\epsilon)^{-1} \Phi \right\} \left(\cdot \cdot \Phi = \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \hat{\boldsymbol{\delta}}) (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \hat{\boldsymbol{\delta}}) \right) \\ \frac{\partial \ln(L(\tau, \Sigma))}{\partial \Sigma} &\simeq (pt - p\tau) \cdot (\Sigma')^{-1} + \left\{ -(\Sigma^{-1} \Phi \Sigma_\epsilon^{-1} \Sigma^{-1})' \right\} \end{aligned}$$

따라서 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} &= (pt - p\tau)^{-1} \Sigma_\epsilon^{-1} \Phi \\ &= (pt - p\tau)^{-1} \Sigma_\epsilon^{-1} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \hat{\boldsymbol{\delta}}) (\mathbf{Y}_j - \Lambda_j \hat{\boldsymbol{\delta}}) \\ &= (pt - p\tau)^{-1} \Sigma_\epsilon^{-1} \sum_{j=\tau+1}^t (\mathbf{Y}_j - \Theta^{j-\tau-1} \bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^S) (\mathbf{Y}_j - \Theta^{j-\tau-1} \bar{\mathbf{Y}}_{\tau+1,t}^S)' \end{aligned}$$

References

- Box, G. E. P. and Kramer, T. (1992). Statistical process control and feedback adjustment adjustment - A discussion. *Technometrics*, **34**, 251-285.
- Cho, G. and Park, J. (2011). A readjustment procedure in the multivariate integrated process control. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 1123-1135.
- Del Castillo, E. (2002). *Statistical process adjustment for quality control*, John Wiley and Sons, New York.
- Jiang, W. (2004). A joint monitoring scheme for automatically controlled processes. *IIE transactions*, **36**, 1201-1210.
- Lee, J. and Lee, H. (2007). Change point estimators in monitoring the parameters of an AR(1) plus an additional random error model. *Journal of Korean Data & Information Science Society*, **18**, 963-972.
- Montgomery, D. C. (1999). A perspective on models and the quality sciences: Some challenges and future directions. *ASQ Statistics Division Newsletter*, **18**, 8-13.
- Nembhard, H. B. and Chen, S. (2007). Cuscore control charts for generalized feedback-control system. *Quality and Reliability Engineering International*, **23**, 483-502.
- Pan, R. and Del Castillo, E. (2003). Integration of sequential process adjustment and process monitoring techniques. *Quality and Reliability Engineering International*, **19**, 371-386.
- Park, C. (2007). An algorithm for the properties of the integrated process control with bounded adjustments and EWMA monitoring. *International Journal of Production Research*, **45**, 5571-5587.
- Park, C. and Lee, J. (2008). An integrated process control scheme based on the future loss. *The Korean Journal of Applied Statistics*, **21**, 247-264.
- Park, C. and Lee, J. (2009). A readjustment procedure after signaling in the integrated process control. *Communications for Statistical Applications and Methods*, **16**, 429-436.
- Park, C. and Reynolds, M. Jr. (2008). Economic design of an integrated process control procedure with repeated adjustments and EWMA monitoring. *Journal of the Korean Statistical Society*, **37**, 155-174.
- Runger, G., Testik, M. C. and Tsung, F. (2006). Relationships among control charts used with feedback control. *Quality and Reliability Engineering International*, **22**, 877-887.
- Vander Wiel, S. A. (1996). Monitoring processes that wander using integrated moving average models. *Technometrics*, **38**, 139-151.

Parameter estimation in a readjustment procedure in the multivariate integrated process control[†]

Gyo-Young¹ · Jong Suk Park²

^{1,2}Department of Statistics, Kyungpook National University

Received 29 August 2013, revised 2 October 2013, accepted 7 October 2013

Abstract

This paper considers the multivariate integrated process control procedure for detecting special causes in a multivariate IMA(1, 1) process. When the multivariate control chart signals, the special cause will be detected and eliminated from the process. However, when the elimination of the special cause costs high or is not practically possible, an alternative action is to readjust the process with approximately modified adjustment scheme. In this paper, we estimate parameters in the readjustment procedure after having a true signal in the multivariate integrated process control

Keywords: Multivariate control chart, multivariate integrated process control procedure, parameter estimation, readjustment procedure.

[†] This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (grant number: NRF-2010-0023732).

¹ Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea. E-mail:gycho@knu.ac.kr

² Ph. D. student, Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea.