

라플라스 분포 기반의 VaR 측정 방법의 적정성 평가[†]

변부근¹ · 유도식² · 임종태³

^{1,2}홍익대학교 전자정보통신공학과 · ³홍익대학교 전기정보제어공학과

접수 2013년 8월 27일, 수정 2013년 9월 17일, 게재확정 2013년 10월 1일

요약

VaR (value at risk)는 주어진 신뢰수준에서 일정기간 동안 발생할 수 있는 최대손실의 기대치를 나타내는 것으로, 현재 금융기관들의 대표적인 위험관리 수단으로 사용되고 있다. 기존의 대다수 연구에서는 수익률의 확률분포를 정규분포로 모형화한 후 VaR을 측정한다. 최근 Chen 등 (2012)은 수익률의 확률분포를 비대칭 라플라스 분포로 모형화하고 VaR을 측정하였기도 하였으나, 비대칭 라플라스 분포의 경우 그 모양을 결정하는 최빈값, 비대칭 정도, 분산정도 등을 실제적인 환경에서 제한된 개수의 데이터를 가지고 추정하기가 매우 어렵다는 단점이 있다. 이 논문에서, 우리는 (대칭) 라플라스 분포 모형이 정규분포 모형이나 비대칭 라플라스 분포 모형보다 실제적인 환경에서 VaR을 보다 더 정확히 추정해 줌을 주식시장의 실제 데이터와 VaR 초과비율, 기대초과손실, VaR초과편차율 등의 통계지표를 도입하여 입증한다.

주요 용어: 라플라스 분포, 모수적 방법, 비대칭 라플라스 분포, 시장위험측정, 종합주가지수.

1. 서론

베어링즈 (Barings)사, 다이와 (Daiwa)은행, 메탈게젤샤프트 (Metallgesellschaft)사 등은 금융시장에서 수십억 달러의 손실을 입었다 (Jorion, 1997). 이와 같은 경험을 한 후, 금융기관은 자산의 손실을 미연에 방지하고자 시장위험을 측정하고 통제하는 다양한 방법을 사용하기 시작하였다. 예를 들어, 1940 ~ 1950년대 미국의 대형 상업은행들은 ALM (asset liability management)을 사용함으로써 보유하고 있는 자산과 부채를 종합적으로 관리하여 장래에 발생 가능한 손실을 최소화하고자 노력하였다. 또한 각 국가의 중앙은행을 감독하는 국제결제은행 (Bank of International Settlements; BIS)은 BIS 기준을 고안함으로써 은행의 파산을 막고자 노력하였다. 1996년 국제결제은행의 바젤위원회는 시장위험을 측정하고 통제하는 수단으로 VaR (value at risk)를 채택하였고, 현재 대다수의 금융기관들도 시장위험을 측정하는 도구로 이를 사용하고 있다.

VaR을 측정하는 대표적인 방법으로 분산 공분산법, 역사적 시뮬레이션법, 그리고 몬테카를로 시뮬레이션법이 있다. Lee (2000)는 이 대표적인 세 가지 방법을 비교분석하였고 분산 공분산법을 가장 효과적인 방법으로 판단하였다. VaR을 측정하는 새로운 방법을 제안하는 논문들에서도 이전 연구의 결과와 비교하기 위하여 성능이 좋다고 알려진 분산 공분산법의 결과를 택하고 있다. 예를 들어, Kim과 Lee

[†] 이 연구는 2013년도 정부 (교육부)의 재원으로 한국연구재단 기초연구사업 (2010-0025062)의 지원을 받아 수행되었음.

¹ (121-791) 서울특별시 마포구 와우산로 94 홍익대학교, 전자정보통신공학과, 박사과정.

² (121-791) 서울특별시 마포구 와우산로 94 홍익대학교, 전자정보통신공학과, 부교수.

³ 교신저자: (121-791) 서울특별시 마포구 와우산로 94 홍익대학교, 전기정보제어공학과, 부교수.

E-mail: jlim@hongik.ac.kr

(2011)는 조건부 코플라를 이용하여 포트폴리오의 VaR을 추정하였으며, 이를 분산 공분산법을 이용하여 추정한 VaR과 비교하였다. 이와 같이 대다수의 기존 논문에서는 분산 공분산법을 효과적인 방법으로 판단 및 사용하고 있다.

기존 대다수의 연구에서는 분산 공분산법을 사용하여 VaR을 측정할 때 수익률의 확률분포를 정규 분포로 모형화한 후, 이 정규분포를 결정짓는 모수를 사용하여 VaR을 구한다. 우리는 일정 기간의 KOSPI의 일별수익률의 확률분포를 관찰한 결과 정규분포보다는 라플라스 분포에 가까움을 확인하였다. 최근 Chen 등 (2012)은 이러한 현상을 관찰하고, 라플라스 분포를 보다 일반화하여 비대칭 라플라스 분포로 가정하고 VaR을 측정하였다. 그러나, 이 논문에서 우리는 일별수익률의 확률분포를 (대칭) 라플라스 분포로 모형화하고 VaR을 측정할 경우가, 정규분포 또는 비대칭 라플라스 분포로 모형화한 후 측정하는 경우보다 우수함을 보이고자 한다.

수익률의 확률분포를 비대칭 라플라스 분포가 아닌 라플라스 분포로 모형화하였을 때가 VaR 추정 성능이 우수한 이유는 무엇보다도 비대칭 라플라스 분포의 경우 유한한 수익률 데이터를 이용하여 모수를 추정하기가 쉽지 않기 때문이다. 일반적으로 변동성이 있는 시장에서, 모수를 추정하기 위하여 사용할 수 있는 수익률의 개수는 수백 개 수준을 넘지 않는데 이것만으로는 추정하기 어려운 모수인 최빈값을 비롯해서 비대칭 정도를 나타내는 매개변수, 분산 정도를 나타내는 매개변수를 추정하는 것은 쉽지 않다. 즉, 관찰할 수 있는 수익률의 개수가 충분하지 못한 상황에서는 비대칭 라플라스 분포의 모수 추정은 부정확해질 수 밖에 없고, 이러한 모수의 부정확성이 VaR 추정 성능을 저하시키게 되는 것이다. 더 나아가, 수익률의 확률분포에 일정한 정도의 비대칭성이 실제로 있는 경우라도, VaR 추정은 수익률의 확률 분포 중 하위 1%, 3%, 5% 지점, 즉, 확률분포의 꼬리 부분이 중요하나, 확률분포의 꼬리 부분에서는 비대칭성을 가정한 경우와 그렇지 않은 경우에 큰 차이가 없음을 관찰할 수 있다. 우리는, 이 논문에서 수익률의 확률분포를 라플라스 분포로 가정하는 것이 정규분포나 비대칭 라플라스 분포로 가정하는 경우보다 VaR을 보다 더 정확하게 예측하게 해 줌을 실제적인 주식시장의 데이터와 각종 통계지표를 도입하여 분석한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 VaR의 개념에 관하여 간략하게 설명한다. 3절에서는 정규분포, 라플라스 분포, 비대칭 라플라스 분포 기반의 VaR 측정 기법에 대하여 수식을 통하여 설명한다. 4절에서는 각 방법을 사용하여 충분한 기간 (2002년 2월 1일부터 2013년 6월 21일)에 해당하는 KOSPI의 시가총액 상위종목 67개의 개별 주식에 대한 VaR을 측정하고 그 성과를 평가한다. 마지막으로 5절에서는 연구의 결론을 내린다.

2. VaR의 개념

VaR (value at risk)은 손실 위험의 정도를 확률적으로 측정하는 방법으로, Jorion (1997)은 이를 ‘주어진 신뢰수준 및 목표기간에 발생할 수 있는 최대손실의 예상치’와 같이 표현하였다. 수학적으로는 아래와 같이 VaR을 정의할 수 있다. 아래에서, $VaR^{(k,c)}$ 은 투자목표기간 k 일, 신뢰수준 c 에의 VaR을 의미한다.

정의 2.1 [VaR (value at risk)]

특정 상품에 금액 W_0 를 투자하는 상황을 가정하자. 해당 상품의 k 일 후의 평가금액이 W 이면, k 일-수익률 r 은 $(W - W_0)/W_0$ 와 같이 정의된다. 우리는 k 일-수익률 r 을 확률분포 $f(r)$ 을 갖는 확률변수라 간주하고, $c = \int_R^\infty f(r) dr$ 를 만족하는 값 R 을 신뢰수준 c 에서의 k 일-최소수익률이라 한다. 이 때, $-W_0R$ 이 투자보유기간 k 일, 신뢰수준 c 에서의 VaR (value at risk) 하고 기호로 $VaR^{(k,c)}$ 와 같이 나타낸다.

※ 여기서 $W_0(1 + R)$ 은 신뢰수준 c 에서의 k 일-최소평가금액이 되며, 이 금액을 초기 투자 금액에서 뺀 금액이 $VaR^{(k,c)}$ 이 됨.

VaR의 측정 방법은 크게 비모수적 방법과 모수적 방법으로 나뉘어진다. 비모수적 방법은 수익률의 확률분포를 이용하여 VaR을 측정하는 방법이다. 그리고, 모수적 방법은 수익률의 확률분포를 특정 분포로 모형화한 후, 특정 분포의 모수를 이용하여 VaR을 측정하는 방법이다. 모수적 방법을 이용하여 VaR을 측정하게 되면 계산과정이 매우 간단해진다. 예를 들어, 특정 주식의 수익률의 확률분포를 이와 가까운 정규분포라 모형화하였다고 가정하면, 이 정규분포의 모수인 평균과 표준편차만으로 VaR은 측정된다. 이와 같은 계산의 편리성 뿐만 아니라, Lee (2000)는 모수적 방법으로 구한 VaR이 비모수적 방법으로 구한 VaR보다 정확하게 손실 위험정도를 측정하고 있다는 결과를 도출하였다. 이 연구에서는 모수적 방법으로 VaR을 측정하며, 이 때 수익률의 확률분포를 라플라스 분포로 모형화하는 것에 관하여 논의한다.

3. VaR 측정 기법

3.1. 수익률의 확률분포

대다수의 기존 연구 (Ohk 등, 2006; Yoo and Lee, 2002; Lee, 2006; Cho, 2004)에서는 모수적 방법으로 VaR을 측정할 때 수익률의 확률분포를 정규분포라 모형화한다. 왜냐하면 정규분포는 식 (3.1)과 같이 평균 m 과 표준편차 σ 만으로 쉽게 결정되며, 수익률의 확률분포를 이 분포라 모형화하면 VaR은 두 변수 m 과 σ 만으로 쉽게 계산되기 때문이다. 이와는 달리 Chen 등 (2012)은 식 (3.2)와 같이 매개변수 σ', k, p , 최빈값 m' 으로 이루어진 비대칭 라플라스 분포를 사용하여 VaR을 측정하였다. 하지만 우리가 제안하는 수익률의 확률분포를 라플라스 분포라 모형화한 경우 식 (3.3)과 같이 평균 m 과 매개변수 b 만으로 라플라스 분포를 결정하고, VaR을 측정한다.

$$f_g(x) = N(m, \sigma^2) \quad (3.1)$$

$$f_{al}(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sigma'} \exp\left\{-\frac{k}{\sigma'}\left|x - m'\right|\frac{1}{p}\right\}, & x < m'; \\ \frac{k}{\sigma'} \exp\left\{-\frac{k}{\sigma'}\left|x - m'\right|\frac{1}{(1-p)}\right\}, & x > m'. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$f_l(x) = L(m, b) \quad (3.3)$$

충분한 기간의 KOSPI의 일별수익률의 확률분포를 살펴보면, 각각의 일별수익률의 확률분포가 정규분포보다는 라플라스 분포 또는 비대칭 라플라스 분포에 가까움을 확인할 수 있다. 이를 확인하기 위하여, 1997년 7월 2일부터 2013년 6월 24일까지의 총 $n = 3971$ 개로 이루어진 KOSPI 일별수익률의 확률분포를 정규분포, 라플라스 분포 및 비대칭 라플라스 분포와 각각 비교한다. 일별수익률의 확률분포를 얻고자 구간 간격이 0.001을 갖는 일별수익률의 히스토그램을 구한다. 그리고 히스토그램의 각 구간에 해당하는 값을 총 구간 간격으로 나누어 얻은 일별수익률의 근사적인 확률분포를 Figure 3.1, Figure 3.2, 그리고 Figure 3.3에 실선으로 나타내었다. 그리고 식 (3.4)와 식 (3.5)에 따라, $m = 0.00047$, $\sigma = 0.0197$ 로 구하여 식 (3.1)에 따라 그린 정규분포를 Figure 3.1에 점선으로 나타내었다. 여기서 $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$ 은 KOSPI의 일별수익률을 의미한다. 이와 비슷한 방법으로 라플라스 분포는 식 (3.4)와 식 (3.6)으로 구한 $m = 0.00047$, $b = 0.0136$ 를 식 (3.3)에 대입하여 Figure 3.2에 점선으로 나타내었다. 그리고 비대칭 라플라스 분포는 Chen 등 (2012)과 같이 최빈값 m' 을 0이라 한 후 식 (3.5), 식 (3.7), 그리고 식 (3.8)에 의해 $\sigma' = 0.0197$, $p = 0.4678$, $k = 0.7086$ 을 식 (3.2)에 대입하여 Figure 3.1에 점선으로 나타내었다. 이 때, 식 (3.7)에서 $\sum_{i=1}^n |r_i - m'|_{(\dots)}$ 은 (\dots) , 즉, $(r_i > m')$ 또

는 $(r_i < m')$ 를 만족시키는 항만을 더한다는 의미임에 유의하자.

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \tag{3.4}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - m)^2} \tag{3.5}$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_i - m| \tag{3.6}$$

$$p = \left[1 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n |r_i - m'|_{(r_i > m')}}{\sum_{i=1}^n |r_i - m'|_{(r_i < m')}}} \right]^{-1} \tag{3.7}$$

$$k = \sqrt{p^2 + (1 - p)^2} \tag{3.8}$$

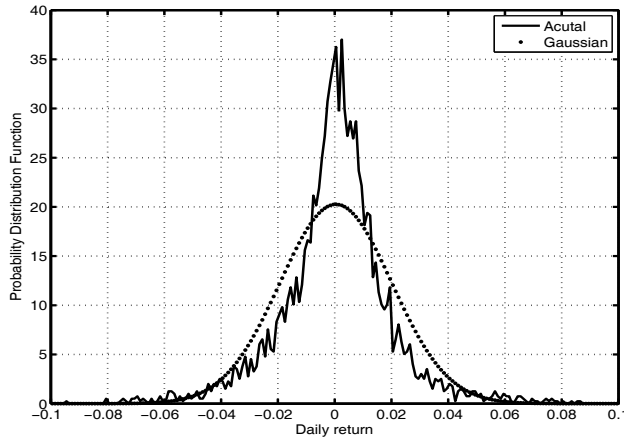


Figure 3.1 Daily return of KOSPI and normal distribution

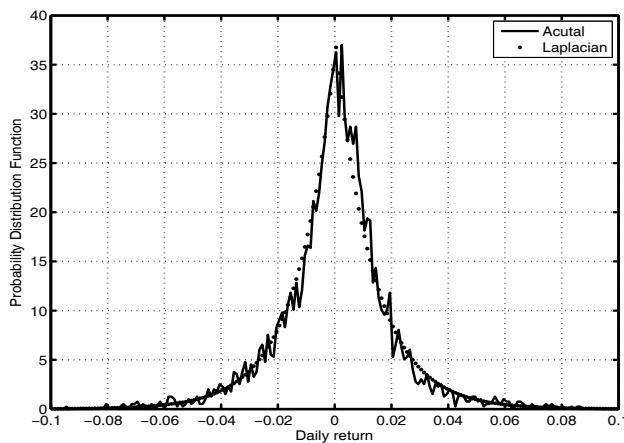


Figure 3.2 Daily return of KOSPI and Laplacian distribution

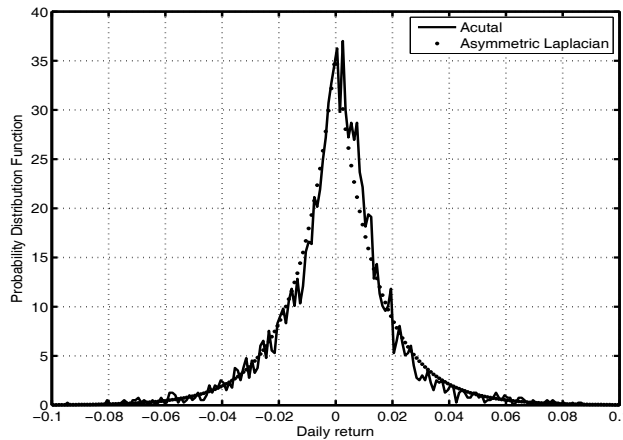


Figure 3.3 Daily return of KOSPI and asymmetric Laplacian distribution

Figure 3.1과 같이 일별수익률의 확률분포는 평균 근방에서 정규분포에 비하여 급격히 감소하며, 평균에서 멀리 떨어진 지점에서는 정규분포보다 완만하게 감소한다. 이와는 달리, Figure 3.2 및 Figure 3.3의 일별수익률의 확률분포는 라플라스 분포, 비대칭 라플라스 분포에 전체적으로 가까운 분포를 보인다. 특히, VaR에 가장 큰 영향을 주는 평균에서 멀리 떨어진 지점을 관찰하면, 일별수익률의 확률분포가 라플라스 분포, 비대칭 라플라스 분포에 더욱 가까움을 확인할 수 있다. 이와 같은 관찰을 통해, 우리는 라플라스 분포와 비대칭 라플라스 분포 기반의 VaR 측정방법이 정규분포 기반의 VaR 측정방법보다 정확한 추정 방법이 될 것임을 짐작할 수 있다.

각 분포의 적정성을 보다 수치적으로 판단해 보기 위하여 우리는 콜모고로프-스미르노프 검증 방법을 고려하여 보았다. 먼저 우리는 검증을 위하여 1997년 7월 2일부터 2013년 6월 24일까지의 KOSPI의 일별수익률, 즉, 3971개의 자료 $r_1, r_2, \dots, r_{3971}$ 를 준비하였다. 이 자료가 정규분포를 따른다는 가설을 귀무가설로 설정하고 콜모고로프-스미르노프 검정을 실시하였더니 유의확률 (p-value)가 0.001이하의 매우 작은 값이 얻어졌다. 이로부터 우리는 귀무가설이 참일 확률이 매우 희박함을, 즉, 3971개의 자료가 라플라스 분포 또는 비대칭 라플라스 분포를 따르는지를 판단하기 위하여 다음의 두 함수 g 와 h 를 고려하였다.

$$g(x) = \begin{cases} -Q^{-1} \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{|x - m|}{b} \right\} \right), & x < m'; \\ -Q^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{|x - m|}{b} \right\} \right), & x > m'. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$h(x) = \begin{cases} -Q^{-1} \left(p \exp \left\{ -\frac{k}{\sigma p} |x - m'| \right\} \right), & x < m'; \\ -Q^{-1} \left(p - (1 - p) \exp \left\{ -\frac{k}{\sigma(1 - p)} |x - m'| \right\} \right), & x > m'. \end{cases} \quad (3.10)$$

여기서, Q함수는 $Q(x) = \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt$ 를 의미하고, m, b, σ, p, k 는 식 (3.4) ~ 식 (3.8)과 같이 구할 수 있다. 그리고 최빈값 m' 은 0.001구간으로 나누어 구한 수익률의 확률분포에서 최대값을 나타내는 0.025으로 가정하였다. 이제, 우리는 $s_i = g(r_i)$ 와 $t_i = h(r_i)$ 로 정의되는 식에 의해 변환된 자료 $s_1, s_2, \dots, s_{3971}$ 이 정규분포가 된다는 가설을 귀무가설로 하여 콜모고로프-스미르노프 검증을 실시하였으며, 그 결과 유의확률로 0.153이 얻어졌다. 여기서 일별수익률 r_i 가 라플라스 분포를 따를 경우 s_i 가 표준 정규분포를 따르게 된다는 사실을 관찰하자. 마지막으로, $t_i = h(r_i)$ 로 정의되는 식에 의해 변환

된 자료 $t_1, t_2, \dots, t_{3971}$ 이 정규분포가 된다는 가설을 귀무가설로 하여 콜모고로프-스미르노프 검증을 실시하였더니, 유의확률로 0.199가 얻어졌다. 역시, 일별수익률 r_i 가 비대칭 라플라스 분포를 따를 경우, t_i 가 표준 정규분포를 따르게 됨을 관찰하자. 이와 같은 일련의 검증 결과를 분석하면, r_i 보다는 s_i 나 t_i 가 정규분포에 가까울 개연성이 훨씬 더 높음을 알 수 있다. 이를 재해석하면, r_i 는 정규분포보다는 라플라스 분포나 비대칭 라플라스 분포에 가까울 개연성이 훨씬 높다는 결론을 얻을 수 있다. 특히, 비대칭 라플라스 분포에 가까울 개연성이 조금 더 높다는 결론 또한 얻을 수 있다.

3.2. VaR 측정식

우리는 수익률의 확률분포를 정규분포, 비대칭 라플라스 분포라 모형화하였을 때의 VaR 측정식이 이 연구에서 제안하는 라플라스 분포라 모형화하였을 때의 VaR 측정식을 보인다. 앞서 설명하였듯이, $VaR^{(1,c)}$ 는 $-W_0R$ 이며, R 은 $c = \int_R^\infty f(\rho) d\rho$ 을 만족하는 값이다. 수익률의 확률분포를 정규분포라 모형화할 경우, 즉, $f(\cdot)$ 에 식 (3.1)의 $f_g(\cdot)$ 를 대입했을 때 구해지는 R 과 $VaR^{(1,c)}$ 를 각각 $R_g, VaR_g^{(1,c)}$ 라 표기하자. 이와 마찬가지로 $f(\cdot)$ 에 식 (3.2)의 $f_l(\cdot)$, 식 (3.3)의 $f_{al}(\cdot)$ 를 대입했을 때 구해지는 R 과 $VaR^{(1,c)}$ 를 각각 R_l 과 $VaR_l^{(1,c)}$ 및 R_{al} 과 $VaR_{al}^{(1,c)}$ 라 표기하자. 이러한 값들은 표준정규분포함수를 이용하여 구할 수 있다. 즉, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여 $\Phi(z) = \Pr[Z \leq z]$ 라 두면, $R_g = m + \Phi^{-1}(1 - c)\sigma$ 와 $VaR_g^{(1,c)} = -[m + \Phi^{-1}(1 - c)\sigma]W_0$ 을 얻을 수 있다. 비슷하게 라플라스인 분포와 비대칭 라플라스인 분포에 대하여도 R 과 $VaR^{(1,c)}$ 를 구하면 Table 3.1과 같다.

Table 3.1 Minimum daily return and VaR

	R	$VaR^{(1,c)}$
Normal distribution	$R_g = \Phi^{-1}(1 - c)\sigma + m$	$VaR_g^{(1,c)} = -[m + \Phi^{-1}(1 - c)\sigma]W_0$
Laplaccian distribution	$R_l = b \ln\{2(1 - c)\} + m$	$VaR_l^{(1,c)} = -[b \ln\{2(1 - c)\} + m]W_0$
Asymmetric Laplacian distribution	$R_{al} = \frac{\sigma'p}{k} \ln \frac{1-c}{p} + m'$	$VaR_{al}^{(1,c)} = -\left[\frac{\sigma'p}{k} \ln \frac{1-c}{p} + m'\right]W_0$

3.3. 단순이동평균법과 지수가중이동평균법

$VaR_g^{(1,c)}, VaR_l^{(1,c)}$, 그리고 $VaR_{al}^{(1,c)}$ 는 Table 3.1과 같이 평균 m , 표준편차 σ , 그리고 매개변수 b, p 로부터 얻어진다. 결국, VaR을 측정하기 위해서는 평균 m , 표준편차 σ , 매개변수 b, p 의 값을 추정하여야 한다. 이러한 값들은 VaR을 측정하고자 하는 시점까지 축적된 데이터 값에 단순 이동평균법 (simple moving average; SMA) 또는 지수가중 이동평균법 (exponentially weighted moving average; EWMA) 등의 기법을 적용하여 구하는 것이 일반적이다.

단순 이동평균법과 지수가중 이동평균법을 이용하여 m, σ, b, p 를 추정하는 방법을 살펴보기 위하여, VaR을 측정하고자 하는 날로부터 k 일 전의 일별수익률을 x_k 라 두자. 단순 이동평균법에서는 평균 m 을

$$m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \tag{3.11}$$

와 같이 산출한다. 그리고 지수가중 이동평균법에서는 평균 m 을

$$m = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda^{N-1}} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} x_n \quad (\text{단, } 0 < \lambda < 1) \tag{3.12}$$

와 같이 구한다. 여기서, 측정하고자 하는 날로부터 가까운 날의 수익률이 측정일의 수익률에 큰 영향을 끼치는 것을 고려하기 위하여 도입한 0과 1사이의 실수값 λ 를 주로 망각인자 (forgetting factor)라고 부른다. 이와 비슷한 방법으로 표준편차 σ , 매개변수 b, p 도 Table 3.2와 같이 산출한다. 이 때, 매개변수 p 를 추정하는 방법은 Lu 등 (2010)의 논문을 참조하여 구하였다.

Table 3.2 Parameter estimation with SMA and EWMA

	SMA	EWMA (where, $0 < \lambda < 1$)
Mean m	$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$	$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{N-1}} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} x_n$
Standard deviation σ	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (x_n - m)^2}$	$\sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{N-1}} \sum_{m=1}^N \lambda^{n-1} (x_n - m)^2}$
Parameter b	$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n - m $	$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{N-1}} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} x_n - m $
Parameter p	$\left[1 + \frac{\sum_{n=1}^N x_n - m' _{(x_n > m')}}{\sum_{n=1}^N x_n - m' _{(x_n < m')}} \right]^{-1}$	$\left[1 + \frac{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{N-1}} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} x_n - m' _{(x_n > m')}}{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{N-1}} \sum_{n=1}^N \lambda^{n-1} x_n - m' _{(x_n < m')}} \right]^{-1}$

기존 대다수의 논문에서는 지수가중 이동평균법을 사용하여 VaR을 측정할 경우, J.P.Morgan과 Reuters (1996)의 권고에 따라 망각인자 λ 를 0.94 혹은 0.97로 정하고 VaR을 측정 및 비교하였다. 그러나, 이러한 λ 는 수익률의 확률분포를 정규분포라 두고 VaR을 측정하는 상황에서 권고된 값으로서, 라플라스이나 비대칭 라플라스 분포라 할 때에는 적절한 λ 의 값을 결정해야한다. 따라서, 이 논문에서는 수익률의 확률분포를 특정 분포라 가정할 때마다 그에 해당하는 최적의 망각인자 λ 의 값을 구한 다음 VaR을 추정한다. 망각인자 λ 의 최적의 값을 구하기 위하여, 우리는 충분한 기간 (2002년 2월 1일부터 2013년 6월 21일)에 해당하는 KOSPI의 시가총액 상위종목 67개의 데이터를 선별하였다. 이 67개 종목의 데이터 (총 206844개)에 대하여 λ 를 0.750 ~ 0.999까지 0.001간격으로 변화시키며 신뢰수준 95% 및 97% 해당하는 VaR을 종목별로 각각 측정하였다. 그리고 각 종목별로 측정된 VaR이 실제 손실금액보다 작아지는 횟수를 구하였으며, 다시 그 횟수들의 총합을 총 67개 종목의 데이터의 수 (=206844)로 나눈 비율, 즉, 초과횟수비율 (excess number ratio)를 구하였다. 신뢰수준 95%인 경우의 결과를 그림으로 표현하면 Figure 3.4와 같다.

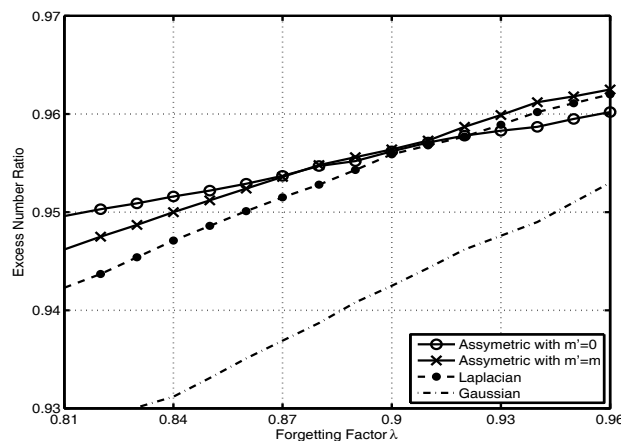


Figure 3.4 Effect of forgetting factor

Figure 3.4를 자세히 살펴 보면, 수익률의 확률분포로 정규분포를 사용하였을 경우, λ 의 값이 약 0.945일 경우에 초과회수비율이 0.95가 됨을 알 수 있다. 따라서, 우리는 정규분포 모델을 사용할 경우, 0.945를 신뢰수준 95%인 경우에 적절한 망각인자값으로 설정한다. 비슷한 방법으로 다른 수익률 확률분포에 대해서도 최적의 망각인자값을 구할 수 있다. Figure 3.4와 비슷한 그림을 신뢰수준 97%일 경우에도 그릴 수 있으며, 이러한 그림으로부터 최적의 망각인자값을 분포모델별로 얻을 수 있다. 이렇게 얻은 최적의 망각인자 값을 Table 3.3에 나타내었다.

Table 3.3 Factor estimation

Level of confidence	Normal	Laplacian	Asymmetric	Asymmetric
			Laplacian with $m' = 0$	Laplacian with $m' = m$
95%	0.945	0.859	0.816	0.840
97%	0.965	0.825	0.772	0.820

일반적으로 수익률의 확률분포를 정규분포라 모형화하고 지수가중이동평균법을 사용하여 VaR을 추정할 때 망각인자 값을 0.94 혹은 0.97로 사용하는 것을 고려 한다면, 우리가 추정한 정규분포일 때의 최적의 망각인자 값이 0.945 그리고 0.965 가 나온다는 것은 타당하게 받아들여진다. 하지만 수익률의 확률분포가 라플라스 분포, 비대칭 라플라스 분포라 모형화 하였을 때 최적의 망각인자 값이 0.94 혹은 0.97과는 다른 값이 나오에 따라 수익률의 확률분포에 따라 망각인자 값 또한 재설정될 필요하다는 것을 보여준다.

4. VaR 측정 기법의 평가

이 연구에서는 투자대상의 일별수익률의 확률분포를 각각 정규분포, 라플라스 분포, 비대칭 정규분포로 모형화한 후 측정 기법에 따라 $VaR^{(1,0.95)}$ 와 $VaR^{(1,0.97)}$ 을 구하고 각 값들을 비교하고 평가한다. 그리고 투자 대상은 KOSPI의 시가총액 상위 종목 중 2002년 2월 1일부터 2013년 6월 21일에 해당하는 67개의 데이터를 이용하였다. 이 때, 각각의 VaR을 분석하기 위하여 검증방법 중 하나인 백테스트를 이용한다. 백테스트는 과거의 데이터를 이용하여 추정할 때 시점에서의 VaR과 그에 상응하는 날에 실제 발생한 손실금액을 비교하여, 실제 손실이 VaR을 초과한 정도가 얼마나 되는지를 알아보는 것이다. 우리는 VaR에 대한 백테스트를 시행할 때, 실제 일별수익률 r_1, r_2, \dots, r_T 와 VaR을 결정하는 최소 일별수익률 R_1, R_2, \dots, R_T 를 비교하여 실제 발생한 일별 수익률 r 과 추정한 최소 일별수익률 R 을 비교 분석하였다. 이 때, 각 시행 시점에서부터 이전 300일 구간 사이의 초과 횟수를 나타내는 300일-백테스트를 실시하였으며, 매 시점에서 VaR을 추정하기 위하여 사용한 자료는 시점에서부터 200일 전까지의 일별수익률의 데이터를 이용하였다.

4.1. VaR 초과 비율 (excess loss ratio; ELR)

VaR 초과 비율은 과거 자료를 이용하여 300일 동안 실제 손실 금액이 VaR을 초과한 경우가 몇 번 일어났는지를 알아보는 방법이다. 이는 각 시행 시점에서 300일-백테스트를 시행한 후 각 시행별 초과 횟수의 합을 백테스트의 시행 횟수로 나누어 구한다. 이 때, 구해진 VaR 초과 횟수는 300일동안 발생한 초과 횟수이므로 300일을 기준으로 하여 비율로 표현한 것이 VaR 초과 비율이다. 이 지표에서 기준 값은 신뢰수준 95%, 97%에 따라 각각 5%, 3%이다. 따라서 기준 값에서부터 실제 VaR 초과 비율이 벗어난 정도에 따라 VaR 측정방법의 적정성을 평가한다. 이를 KOSPI 시가총액 상위 종목 67개에 적용시켜 각각의 값을 구한 후 평균을 내어 Table 4.1에 나타내었다.

Table 4.1 Excess loss ratio

Level of confidence	Measurement method	Normal	Laplacian	Asymmetric Laplacian with $m' = 0$	Asymmetric Laplacian with $m' = m$
95%	SMA	4.23%	3.73%	4.00%	3.73%
	EWMA	5.01%	5.00%	5.00%	5.00%
97%	SMA	2.88%	1.99%	2.12%	1.99%
	EWMA	3.00%	2.99%	2.99%	2.99%

Table 4.1과 같이 VaR 초과 비율이 목표치 5%, 3%에 정확하게 도달하는 방법은 지수가중 이동평균법을 확인할 수 있다. 하지만 지수가중 이동평균법을 사용하여 구한 VaR 초과 비율이 목표치에 정확하게 도달할 수 있었던 이유는 우리가 최적의 망각인자 값을 구하는 과정이 있었기 때문이다. 이러한 최적의 망각인자 값을 선정하는 과정이 없는 단순이동평균법으로 VaR을 추정할 경우에는 대다수의 값이 목표치에서부터 15% 이상 벗어나고 있으므로 VaR 추정 방법으로는 부적절함을 확인할 수 있다.

4.2. 기대초과손실 (expected excess loss; EEL)

기대초과손실은 VaR 추정시 실제 손실 금액이 VaR을 초과하는 크기의 기대값을 수치적으로 나타낸 것이다. 이를 수식으로 표현하기 위하여 자료로 삼은 실제 일별수익률의 개수를 N 이라 하고, 실제 일별 수익률이 최소 일별 수익률보다 작은 날의 집합을 I 라 하자. 이 때, 조건부 기대초과 손실은 식 (4.1)과 같이 정의된다. 이를 KOSPI 시가총액 상위 종목 67개를 대상으로 하여 각각의 신뢰수준 및 측정방법을 사용하여 구한 값을 Table 4.2에 나타내었다. Table 4.2에서 bp는 basis point 즉 0.01%를 의미한다.

$$CEEL = \frac{1}{N} \sum_{i \in I} |r_i - R_i| \quad (4.1)$$

Table 4.2 Conditional expected excess loss

Level of confidence	Measurement method	Normal	Laplacian	Asymmetric Laplacian with $m' = 0$	Asymmetric Laplacian with $m' = m$
95%	SMA	7.40bp	6.70bp	7.10bp	6.70bp
	EWMA	6.87bp	6.44bp	6.43bp	6.92bp
97%	SMA	5.25bp	3.87bp	4.01bp	3.87bp
	EWMA	4.44bp	3.78bp	3.77bp	4.20bp

각각의 확률 모형 측면에서 Table 4.2를 살펴보면, 수익률의 확률분포를 정규분포로 모형화하고 측정한 기대 초과 손실보다 라플라스 분포 또는 비대칭 라플라스 분포로 모형화하고 측정한 기대 초과 손실이 신뢰수준 95%에서는 약 5%작으며, 신뢰수준 97%에서는 약 신뢰수준 15%정도 작음을 확인할 수 있다. 또한, 측정 방법으로는 지수가중 이동평균법을 사용하여 측정한 기대 초과 손실이 단순 이동평균법을 사용하였을 때의 값보다 작음을 확인할 수 있다. 이로써 우리는 수익률의 확률분포로는 라플라스 분포, 비대칭 라플라스 분포를, 측정 방법으로는 지수가중 이동평균법을 사용하여 VaR을 추정하는 것이 실제 발생할 최대 손실 금액을 보다 정확하게 예측함으로써 기대 초과 손실을 최소화시켜줄 수 있음을 확인하였다.

4.3. VaR 초과편차율 (excess deviation ratio; EDR)

백테스트를 시행하여 VaR을 초과하는 횟수 구하기를 반복하여 그 평균값을 구해 보면, Table 4.1이 시사하는 바와 같이 어떤 분포 모형을 사용하더라도 크게 다르지 않다. 그러나, VaR을 초과하는 횟수들의 표준편차값은 각 분포모형별로 다소간의 차이가 있다. 우리는 VaR을 초과하는 횟수들의 표준편차값을 백테스트일수로 나눈값을 ‘VaR 초과편차율 (excess deviation ratio)’ 라 부르기로 한다. VaR 초과편차비율이 작을수록 VaR을 더 신뢰성있게 추정함을 의미한다. 우리는 300일-백테스트를 시행한 후, 각 분포모형별로 VaR 초과편차율을 구하였으며, 그 결과를 Table 4.3에 나타내었다.

Table 4.3 Excess deviation ratio

Level of confidence	Measurement method	Normal	Laplacian	Asymmetric Laplacian with $m' = 0$	Asymmetric Laplacian with $m' = m$
95%	SMA	1.90%	2.06%	1.99%	2.06%
	EWMA	1.06%	1.02%	1.14%	1.27%
97%	SMA	2.49%	3.20%	3.03%	3.20%
	EWMA	1.63%	1.63%	1.65%	1.69%

VaR 측정방법 중 지수가중 이동평균법을 사용하여 VaR을 추정하는 것이 단순 이동평균법을 사용하여 VaR을 추정하는 것보다 VaR 초과편차율이 30%이상 작음을 확인 할 수 있다. 또한 동일하게 지수가중 이동평균법을 적용하였을 경우, 투자대상의 일별 수익률의 확률분포를 라플라스 분포라 모형화한 후 구한 값이 타 방법으로 구한 값보다 작음을 확인할 수 있다. 특히, 지수가중 이동평균법을 사용할 때 일별 수익률의 확률분포를 비대칭 라플라스 분포라 모형화하는 것보다 라플라스 분포라 모형화하고 구한 VaR 초과편차율이 10%정도 작게 나옴을 관찰할 수 있다. 따라서, 모수계산법으로는 단순이동평균법보다는 지수가중 이동평균법이, 수익률 분포모형으로는 라플라스 분포 모형이 다른 분포모형보다 VaR을 더욱 신뢰성있게 추정해 줌을 알 수 있다.

5. 결론

이 연구에서 우리는 투자 대상의 일별 수익률의 확률분포를 라플라스 분포라 모형화하고 지수가중 이동평균법을 사용하여 VaR을 추정하는 기법을 제안하였다. 이 제안의 타당성을 부여하기 위하여 충분한 기간 (2002년 2월 1일부터 2013년 6월 21일)에 해당하는 KOSPI 시가총액 상위 종목 중 67개 주가의 일별수익률을 테스트 자료로 삼아 일별수익률의 확률분포를 각각 정규분포, 라플라스 분포, 그리고 비대칭 라플라스 분포라 모형화하고 모수적 방법을 이용하여 VaR을 측정하였다. 300일-백테스트를 사용하여 비교 분석한 결과 VaR 초과 비율이 단순 이동평균법을 사용하여 VaR을 추정했을 때 보다 지수가중 이동평균법을 사용하여 VaR을 추정했을 때가 신뢰수준에 따른 기준 값에 매우 가까운 값을 보였다. 또한 투자 대상의 일별 수익률의 확률분포를 정규분포보다 라플라스 분포, 비대칭 라플라스 분포라 사용하는 것이 기대초과손실의 크기를 5% ~ 15%정도 감소시켜줌을 확인하였다. VaR 초과편차율에서 보였듯이 비대칭 라플라스 분포보다는 라플라스 분포라 하였을 경우 VaR 초과편차율을 10%정도 감소시켜 안정도 면에 있어 우수함을 확인하였다. 이로부터 측정방법은 지수가중 이동평균법, 확률 모형은 라플라스 분포 모형을 사용하여 VaR을 추정할 경우, 초과 손실이 발생하는 경우라도 초과 손실의 규모가 상대적으로 적어지는 중요한 결과를 얻었다. 또한 주식 시장이 크게 변화하는 상황에 직면할지라도 우리가 제안한 방법을 사용하여 VaR을 추정하는 것이 보다 안전함을 확인하였다.

References

- Chen, Q, Gerlach, R. and Lu, Z. (2012). Bayesian value-at-risk and expected shortfall forecasting via the asymmetric Laplacian distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 3498-3516.
- Cho, D. (2004). The effects of estimation methods of stock price volatility on VaR. *Korean Journal of Futures and Options*, **12**, 1-24.
- Kim, E. and Lee, T. (2011). A numerical study on portfolio VaR forecasting based on conditional copula. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 1065-1074.
- Jorion, P. (1997). *Value at risk: The new benchmark for controlling market risk*, 1st Ed., McGraw-Hall, New York.
- J. P. Morgan and Reuters (1996). *Riskmetrics-Technical document*, 4th Ed., Morgan Guaranty Trust Company, New York.
- Lee, J. (2000). Backtesting of VaR estimates and evaluation for VaR model. *Korean Journal of Futures & Options*, **8**, 81-106.
- Lee, K. (2006). A comparison of the out-of-sample performance of VaR models. *Korean Journal of Money & Finance*, **11**, 127-168.
- Lu, Z., Huang H. and Gerlach, R. (2010). *Estimating value at risk: From JP Morgan's standard-EWMA to skewed-EWMA forecasting*, Working Paper, Faculty of Economics and Business, The University of Sydney.
- Ohk, K., Huh, H. and Cheon, S. (2012). A comparison of value at risk by the estimation models of KOSPI200 return volatility. *Journal of Finance*, **5**, 21-39.
- Yoo, J. and Lee, J. (2002). Price limits and VaR estimation of the KOSDAQ 50 companies. *Asia-Pacific Journal of Financial Studies*, **30**, 73-99.

Validity assessment of VaR with Laplacian distribution[†]

Bu-Guen Byun¹ · Do-Sik Yoo² · Jongtae Lim³

^{1,2}Department of Electronic, Information, and Communication Engineering, Hongik University

³Department of Electrical, Information, and Control Engineering, Hongik University

Received 27 August 2013, revised 17 September 2013, accepted 1 October 2013

Abstract

VaR (value at risk), which represents the expectation of the worst loss that may occur over a period of time within a given level of confidence, is currently used by various financial institutions for the purpose of risk management. In the majority of previous studies, the probability of return has been modeled with normal distribution. Recently Chen *et al.* (2010) measured VaR with asymmetric Laplacian distribution. However, it is difficult to estimate the mode, the skewness, and the degree of variance that determine the shape of an asymmetric Laplacian distribution with limited data in the real-world market. In this paper, we show that the VaR estimated with (symmetric) Laplacian distribution model provides more accuracy than those with normal distribution model or asymmetric Laplacian distribution model with real world stock market data and with various statistical measures.

Keywords: Asymmetric Laplacian distribution, KOSPI, Laplacian distribution, parametric estimation, value at risk.

[†] This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea funded by the Ministry of Education (2010-0025062).

¹ Graduate student, Department of Electronic, Information and Communication Engineering, Hongik University, Seoul 121-791, Korea.

² Associate professor, Department of Electronic, Information, and Communication Engineering, Hongik University, Seoul 121-791, Korea.

³ Corresponding author: Associate professor, Department of Electrical, Information, and Control Engineering, Hongik University, Seoul 121-791, Korea. E-mail: jlim@hongik.ac.kr