Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 5-6 (Nov. 2013), 401–416

The Study on the Process of Undergraduate Students' Generating Counter-Examples and Proposing True Statements

대학생의 반례 생성과 참 명제 제기 과정에 대한 연구

OH Hye Mi 오혜미 KWON Oh Nam 권오남

There has been increasing interest in recent years in the pedagogical importance of counter-examples that focuses on pedagogical perspectives. But there is no research that undergraduate students' generating counter-examples and proposing the true statements. This study analyze 6 undergraduate students' response to interview tasks and the process of their generating counter-examples and proposing true statements. The results of interviews are that the more undergraduate students generate various counter-examples, the more valid they propose true statements. If undergraduate students have invalid understanding of logical implication and generate only one counter-example, they would not propose true statements that modify the given statement, preserving the antecedent. In pre-service teacher's education and school mathematics class, we need to develop materials and textbooks about counter-examples and false statements.

Keywords: Counter-example, proof, implication; 반례, 증명, 함의

MSC: 97C70 ZDM: A35, B55

1 서론

수학사적으로 볼 때, 수학적 탐구에서 증명과 반박은 수학적 개념을 발달시키는 데 중요한 역할을 한다. 수학적 지식이 타당한지 검증하는 과정은 참인 주장에 대해서는 증명을 생성하고 명제 반박(refutation)을 위해 반례를 생성함으로써 수학적 지식을 다듬어나가는 순환적 과정을 거쳐왔다 [14, 23]. 이러한 증명에 대한 강조는 교육과정에서도 나타나는데, 2014년부터 고등학교에 적용되기 시작하는 2009 개정 교육과정에서도 한정사의 도입, 대우를 이용한 증명, 귀류법을 추가함으로써 증명을 강조하였다 [18]. 미국의 핵심

이 연구는 2013년도 교육부의 재원으로 한국과학창의재단의 지원을 받아 수행된 성과물임.
OH Hye Mi: Bopyung high school. E-mail: nepscent@hanmail.net
KWON Oh Nam: Seoul National Univ. Dept. of Math. Edu. E-mail: onkwon@snu.ac.kr
Receiveded on Aug. 7, 2013, revised on Sep. 11, 2013, accepted on Sep. 22, 2013.

공통교육과정(Common Core State Standards Initiative)에서도 증명에 대한 이해와 더불어 증명과 반례의 생성을 강조하고 있다 [3].

수학교육연구에서도 증명과 반례가 수학학습에서 수학적 개념을 이해하고 발전시키는 데 도움이 되지만 [7, 12], 학생들뿐만 아니라 예비교사와 수학교사가 증명과 반례를 생성하고 이해하는 데 상당한 어려움을 겪는 것으로 나타났다 [1, 19, 29]. 대학생(예비교사)를 대상으로 한 증명과 반례에 대한 연구 결과를 볼 때, 증명과 반례에 대한 교사들의 어려움이 학생들에게도 전달될 가능성이 있다 [22, 12]. 하지만 주어진 명제에 대하여 반례를 생성하거나 반증하는 활동은 오류 활동의 시작점이 될 수 있고 수학의 불확정성을 포함한다는 긍정적 함의점을 지니므로 [2], 대학생이 반례 생성을 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정을 분석하는 것은 수학 교수-학습에 큰 함의점을 가질 수 있다. 따라서 대학생들의 반례생성과 참 명제 제기 과정에 대한 연구를 통해 대학생이 겪는 어려움을 밝힌다면 이를 바탕으로 교사교육을 개선하고 교과서 및 교수학습자료 개발에 반영할 수 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 수학사에서의 반례, 함의로써의 반례, 수학교육연구에서의 반례에 대한 문헌연구를 고찰한다. 또한, 사범대 대학생이 제시된 거짓 명제를 반박하고 반례를 생성하고, 이를 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정을 탐구함으로써, 이 과정에서 대학생이 보이는 오류 및 어려움을 분석하여 사범대 교육과 교과서 및 교수학습자료 개발에 함의점을 제시할 수 있을 것이다.

2 이론적 배경

본 절에서는 수학적 개념이 발달하는 데 중요한 역할을 한 것이 반례이므로 수학사에서의 반례를 살펴본다. 본 연구의 인터뷰 과제의 명제는 가정과 결론 부분으로 구성된 함의라는 명제 형태로 고안되었으므로 함의에 대한 이론적 분석을 하고, 수학교육에서 연구된 반례에 대한 연구를 고찰한다.

2.1 수학사에서의 반례

반례와 반증은 수학자들에게 강력하고 효율적인 도구일 뿐만 아니라, 수학을 기반으로 하는 다른 학문에도 영향을 줄 수 있기에 그 중요성이 크다고 할 수 있다. McComas와 Olson [17]은 수학을 기반으로 하는 과학에서도 과학적 주장을 증명 또는 반증할 수 있도록 학생들은 과학적 지식이 연구되고 반증되는 과정을 이해해야 함을 강조하였다. 반례를 찾고 반증을 하는 것이 수학사에서 중요시되어 오고 있으며, 수학사에서 중요한 반례와 반증의 세 가지 사례를 제시하면 다음과 같다 [11].

첫째, 오랜 기간 동안 수학자들은 소수만을 나타내는 공식을 찾고자 노력하였다. 수

학자들은 n이 자연수일 때, $2^{2^n}+1$ 형태의 수들은 모두 소수라고 믿었다. 하지만 Euler가 반례를 제시함으로써 이 믿음은 바뀌게 되었다. Euler는 $n = 5$일 때, $2^{2^5}+1$은 641×6700417로 표현되어 소수가 아님을 반례로 제시하였다.

둘째, 소수에 대한 또 다른 추측은 여전히 증명되거나 반증되길 기다리고 있다. 그 추측은 1742년에 골드바흐가 Euler에게 편지로 제기한 골드바흐 추측이다. 골드바흐 추측은 $12 = 5+7$, $20 = 3+7$처럼, 2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다는 것이다. Richstein [21]은 골드바흐 추측이 거짓임을 보이기 위해 컴퓨터를 이용하여 반례를 찾았으나 4부터 4×10^{14} 사이에는 반례가 없음을 밝혔다. 2000년에 Faber & Faber 출판사에서 골드바흐 추측을 2년 이내에 반증하거나 증명하는 사람에게 백만 달러를 준다고도 발표하였으나, 아직 아무도 골드바흐 추측을 증명하지 못하였다.

셋째, 1861년에 독일 수학자 Weierstrass는 명제「한 함수가 열린 구간 (a,b)에서 연속이라면, 열린 구간 (a,b)의 임의의 점에서 미분가능하다」의 반례를 제안하였는데, 이 반례는 최초의 프랙탈로 알려져 있다. 그때, 많은 수학자들은 어떤 점에서 연속이지만 미분가능하지 않은「괴물 함수(monster-function)」는 실제로는 존재하지 않는다고 생각하였다. 이후 약 백년후인 1956년에 인공두뇌학의 창시자인 Norbert Wiener는 그러한 함수는 존재한다고 주장하였으며 그러한 반례는 브라운 운동에서의 입자들이 나타내는 궤적의 함수라고 하였다. 또한 Norbet Wiener가 제시한 이 반례를 시작으로 최근 수십년 동안 프랙탈 이론의 연구가 활성화되면서 괴물 함수의 곡선도 활발하게 연구되고 있다.

이와 같이 수학사적으로도 수학자들은 반례를 찾고 반증을 통하여 새로운 수학적 개념을 도출하거나 학문적 깊이를 더하여 왔다. 이러한 수학사적인 요소를 예비교사 교육과 학교수학에 도입하여 학생들과 교사들은 수학적 지식의 발달과 수학적 개념의 정련과정을 경험할 필요가 있다.

2.2 수학적 함의와 논리적 함의에서의 반례

최근 인지 과학 연구에서는 반례 생성에 대한 가능성에 대한 학생들의 인식을 유도함으로써, 학생들의 논리적 추론을 향상시켰다 [20, 26]. 또 다른 연구들 [4, 6]에서는 반례 생성에 있어 논리적 훈련이 필요하며 학교 수학에 이러한 과정을 포함시켜야 한다고 주장하였다. 이와 같이 명제 반박에 필수적인 반례는 논리를 빼놓고는 논할 수 없다.

대부분의 수학적 명제(mathematical statements)는『[명제(statement) P가 참]이면 [명제 Q가 참]이다』의 조건문 형태로 표현된다. 여기서 가정 부분 P와 결론 부분 Q는 수학적 개념과 성질에 관련된 명제(propositions)이다. 이러한 명제 형태를 함의

(implication)[1)]라고 부른다 [10]. 수학적 함의는 가정 부분과 결론 부분을 만족하는 수학적 대상들의 집합들 사이에서 조건 관계를 논리적 함의로 나타내는 「일반화된 조건문(generalized conditional)」이다. 논리적 함의(logical implication)를 통해 「참」 또는 「거짓」으로 함의의 진리 값(truth value)을 결정할 수 있다.

이러한 함의의 관점에서 반례를 살펴보자. 함의(implication)는 가정 부분 P를 만족하지만 결론 부분 Q를 만족하지 않는 수학적 예가 발견될 수 없을 때 논리적으로도 수학적으로도 참이다. 이러한 관점에서 반례는 가정 부분은 만족하지만 결론 부분을 만족하지 못하는 수학적 예이다 [4]. 즉, 논리적 함의를 적용하면, 가정 부분 P는 참이고 결론 부분 Q는 거짓인 예시로 나타날 수 있는 반례에 의해서만 원래의 명제가 변형될 수 있다. 수학적 대상의 집합들이 가정 부분 P와 결론 부분 Q로 한정되고, 동시에 한정된 수학적 대상들의 어떤 것도 P이고 Q가 아님을 뜻하는 반례가 아닐 때, 논리적 함의는 참이다. 이때, 「모든(all)」, 「어떤(some)」, 「아무것도(none)」 등의 한정사를 이용하여 수학적 대상들의 집합을 한정할 수 있다. 따라서 본 연구의 연구과정인 반례를 바탕으로 하여 참인 함의를 제기하는 것은 교육적 함의가 크다할 것이다.

논리적 함의와 수학적 함의라는 용어는 비슷한 것 같지만, 논리적 함의는 함의의 논리적 특징을 중요시한다. 즉, 반례가 존재하는 논리적 범위에 따라 함의가 참 또는 거짓으로 결정된다. 반면, 수학적 함의는 함의의 수학적 특징을 중요시한다. 즉, 반례가 수학적으로 성립하는지 기준을 정하는 데 수학적 법칙이 사용된다. 예를 들어 함의 『어떤 수가 1보다 작으면, 그 수의 제곱은 그 수보다 작다』는 반례의 가능성에 따라 진리 값(truth value)이 결정되는 논리적 함의이면서, 동시에 수를 「제곱」하는 수학적 법칙에 따른 반례의 가능성에 관계된 수학적 함의이다. 수학적 법칙에 의해 -1은 1보다 작지만, 그것의 제곱은 1이므로, -1보다 더 크다. 논리적 기준에 의해 -1이라는 반례의 존재 때문에 함의는 거짓이 된다.

논리적 함의를 적용하지 않고 수학적 결과는 도출될 수 없다. 수학적으로 의미있는 고리들이 논리적 함의에 의해 연결됨으로써, 수학적 결론은 확실히 증명될 수 있고, 수학적 반례의 가능성에 분명해질 수 있다 [6]. 하지만 수학적 증명에 기반한 수학적 확실성과 완벽함에 대한 이해는 반례가 가능하지 않은 수학적 관계의 명제들로써 논리적 함의를 이해하여야 가능하다 [4]. 이처럼 수학적 함의에 근간한 논리적 함의를 사용하고 이해하는 학생들의 능력은 수학적 추측을 타당화하고 형식적이거나 비형식적 수학적 증명을 구성할 뿐만 아니라, 증명을 이해하는 데 필수적이다.

1) 본 연구의 인터뷰 과정에서는 연구참여자들의 이해를 위해 「함의」 대신에 「명제」라는 용어를 사용하였다.

2.3 수학교육에서의 반례

최근 반례에 대한 연구는, 학생들의 수학적 개념에 대한 이해가 발전하는 방향으로 범위를 넓혀가고 있다. 반례에 대한 신중한 탐구는 수학적 추측과 성질을 깊이 알아보고 이해하기 위한 방식인데, 그러한 탐구는 예 공간 내부와 그것을 뛰어넘는 범위로 확장되어 향상될 수 있다 [28]. 하지만 반례에 대한 탐구는 학생들에게 쉽지 않은 것이 많은 연구들을 통해 밝혀졌다. 반증과정에서 많은 학생들은 반례로 확신하지 못하였으며, 원래 명제와 모순되는 예외 (exception) 로써 반례를 받아들였다 [8]. 심지어 학생들이 반례의 특별한 역할과 기능을 이해하지 못하여, 정확한 반례를 생성하지 못하였다. 반례를 생성하는 과정에서 학생들은 명제의 조건부분을 만족하지 못하는 예를 생성하거나, 불가능한 예를 제시하였다 [30]. 이처럼 반례 생성에 있어 학생들은 다양한 형태의 어려움을 가지고 있다.

수학교육연구에서 반례의 정확성, 새로운 논증 생성과정, 인지적 갈등 발생 등에 따라 반례는 다양한 차원으로 분류되었다 [13, 19, 30, 31]. 이는 반례가 수학적인 측면에서 명제를 반박하는 것에 그치지 않고 수학교육적 측면에서 새로운 논증을 생성하고 [15], 명제를 설명하고 [19], 타당성을 검증하고 [13, 30], 인지적 갈등을 발생시키거나 해결하는 [31] 교육적 측면에 주목했음을 뜻한다. 즉, Peled와 Zaslavsky [19]는 유사한 반례나 전체 반례공간을 생성하는 방법에 대한 통찰을 제공하는 범위에 따라서, 반례를 특별한 (specific), 반-일반적 (semi-general), 일반적 (general) 으로 분류하였다. Zaslavsky와 Ron [30]은 반례 역할에 대한 학생들의 이해는 예에 대한 학생들의 경험에 영향을 받으며 이를 통해 학생들은 반례의 타당성을 판단한다고 주장하였다. Zazkis와 Chernoff [31]도 반례는 학습자의 예 공간과 일치되는 범위에 존재하며, 이로써 인지적 갈등을 제기하는 반례를 중추적 예 (pivotal example) 라고 하였으며 인지적 갈등을 해결하는 반례는 교량적 예 (bridging example) 라고 하였다. 이와 같이 반례에 대한 선행연구들은 모두 연구참여자가 생성한 반례의 결과들을 분류하여 반례의 교수학적 역할을 밝혔다. 이들 연구결과에서는 거짓 명제가 탐구의 대상이 될 수 있음을 지적하고 있으며, 수학교육연구에서 반례를 바탕으로 주어진 명제를 변형하거나 명제의 참을 확립하는 과정을 거쳐야 함을 주장하고 있으나, 이에 대한 연구는 빈약한 실정이다. 따라서 반례를 바탕으로 주어진 명제를 확장하고 참인 명제를 제기하는 본 연구의 연구결과를 통해, 예비교사의 반례를 바탕으로 한 반증과정을 면밀히 분석할 수 있을 것이다.

3 연구방법

본 연구의 연구방법은 예비교사 6명을 대상으로 사례연구 (case study) 를 진행하였다. 사례연구는 어떤 프로그램, 사건, 행동, 과정, 한 명 이상의 개인을 심층적으로 탐구하는 질적 연구방법이며, 연구과정에서 자료 수집을 통하여 연구대상자의 상세한 정보를 수집할 수

있다 [25]. 본 연구에서는 사례연구방법으로 예비교사들의 반례 생성을 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정에 대한 분석이 이루어질 것이다. 본 연구의 참여자는 서울소재 사범대학 수학교육과 1학년 학생 6명이며, 전공수학 과목으로는 논리학과 미적분학 과목만 수강하였다. 연구의 목적 및 과제 기반 인터뷰임을 공지하여 희망자를 대상으로 모집하였다.

3.1 인터뷰 질문지

본 연구는 거짓 명제에 대하여 예비교사가 반례를 생성하고 이를 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정을 분석하는 데 목적이 있으므로, 인터뷰 과제는 두 개의 거짓명제(명제 1, 명제 2)에 기반하였다. 함의(implication) 형태인 두 명제는 주어진 명제가 거짓인지 판단하기 쉬운 명제로 선택되었으며, 연구참여자가 반례를 쉽게 생성하여 이를 바탕으로 새로운 수학적 추론으로 나아가기 쉽도록 하였다.

명제 1은 대수 영역의 명제였으며, 다음 Table 1과 같다.

명제 1: 각 자리의 수가 1, 3, 5, 7, 9만으로 구성된 두 자리 이상의 자연수라면, 그 수는 제곱수이다.

Table 1. statement 1 for interview; 인터뷰 과제 명제 1 [16]

명제 1에서 연구참여자는 조건 부분만 참인 반례를 생성할 수 있다. 명제 1이 거짓인 이유를 설명하면, 조건을 만족하는 자연수가 제곱수라면, 일의 자리수가 홀수인 제곱수이다. 다시 말하면, m, n이 양의 정수이고 m, n이 $1, 3, 5, 7, 9$일 때, $10m + n$의 형태인 자연수를 제곱하면 $(10m + n)^2 = 100m^2 + 20mn + n^2$이다. 여기서, $100m^2$은 일의 자리수와 십의 자리수에 영향을 주지 못하고, $20mn$은 10의 짝수배이다. 따라서 십의 자리수의 기우성(parity)은 n^2의 기우성과 같다. 한편 가능한 n의 값에 따라 살펴보면, $n = 1, 3, 5, 7, 9$이므로, $1^2 = 01, 3^2 = 09, 5^2 = 25, 7^2 = 49, 9^2 = 81$이다. 그러므로 제곱수의 모든 마지막 자리수는 모두 홀수이며, 십의 자리수는 짝수여야만 하므로, 주어진 명제 1은 거짓이다.

명제 2는 무한급수 영역의 명제였으며, 다음 Table 2와 같다.

명제 2: 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n < b_n$이고, $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이면, $\alpha > \beta$이다.

Table 2. statement 2 for interview; 인터뷰 과제 명제 2 [5]

명제 2에 대해서 직관적으로 참이라고 판단한 연구참여자들은 두 수열 a_n, b_n에 대하여 등비수열, 분수 형태의 수열 등으로 명제를 만족하는 예를 찾고자 노력하였다. 하지만, 명제 2에서 $b_n - a_n > 0$이므로 $\Sigma_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) > 0$이다. 따라서 주어진 명제는 거짓이다.

예비교사의 반례 생성을 바탕으로 명제를 변형하여 참 명제를 제기하는 과정을 분석

하기 위해서는 예비교사가 전형적인 반례 하나만 생성한 단순한 반응을 분석하기 보다는 다양한 반례 생성이 가능한 인터뷰 과제가 적절할 것이다. 반례에 대한 기존 연구들 [11, 13, 24, 30, 31] 에서는 연구과정에서 연구참여자가 생성한 하나의 반례만을 대부분 분석하였지만, 본 연구에서는 다양한 반례가 생성가능한 과제를 통해 반례를 다양하게 생성하도록 인터뷰 과정에서 연구참여자에게 요청하였다. 다양한 반례를 생성할 수 있도록 대학생들에게 비교적 쉬운 명제를 인터뷰 과제로 선택하였다. 이에 명제 1은 해결 방법에 있어 모두 홀수로 구성된 11이나 31처럼 반례에만 초점을 두어도 거짓임을 보일 수 있고, 더욱 형식화하여 명제 1이 거짓임을 보일 수 있다. 그리고 명제 2는 불가능하거나 옳지 않은 예로 인해 참인 명제라고 판단하기 쉬운 거짓 명제이므로 존재하지 않는 반례를 찾기 위해 노력하는 과정에서 연구참여자들은 자신의 논증과정에 대하여 다시금 생각할 수 있다. 연구참여자들은 고등학교 과정에서 학습한 수열들을 통해 $\alpha > \beta$인 수열을 반례로 쉽게 제시할 수 있으나, $\alpha = \beta$인 수열이 존재한다고 생각하면 그러한 예를 찾기 힘들다.

3.2 인터뷰 과정

본 연구의 인터뷰는 과제에 기반한 반구조화된 인터뷰(task based and semi-structured interview)로 진행되었다. 인터뷰 과정은 연구참여자가 주어진 명제의 진리값을 판단한 후, 다양한 반례를 생성하거나 형식화된 증명을 통해 거짓임을 보였으며, 이를 바탕으로 주어진 명제의 가정 부분은 유지시킨 채 참인 명제를 제기하도록 하였다. 반구조화된 인터뷰로 진행되었으며, 공통 질문(general question)은 다음 두 가지였다.

1. 주어진 명제의 참, 거짓을 판별하시오. 그 이유를 설명하시오.
2. 주어진 명제의 가정 부분을 유지시킨 채, 참이 되도록 주어진 명제를 변형하시오.

인터뷰 과정에서 연구자는 명제의 참, 거짓을 밝히는 것, 반증하는 것 외에는 공통 질문은 하지 않았다. 연구참여자는 자신의 생각을 말로 표현하였으며(think-aloud), 연구자는 연구참여자의 반응에 대하여 자세히 물어보는 것과 반례를 다양하게 생성하도록 요청하는 질문만 추가 질문으로 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰하는 시간은 각 연구참여자당 20～30분 정도 소요되었으며, 연구참여자의 동의로 비디오와 오디오 녹화를 하였다. 또한, 인터뷰 과제에 대하여 연구참여자가 면담지에 쓴 기록을 분석의 대상으로 포함하였다.

4 연구결과

6명의 예비교사를 연구자가 정한 순서대로 A, B, C, D, E, F로 정하였으며, 명제 1과 명제 2에 대하여 예비교사의 인터뷰 과정을 분석하고자 한다. 인터뷰 과정을 분석하여 드러난 연구 결과를 다음의 네 가지로 제시할 수 있다.

1. 다양하게 생성한 반례의 공통된 특징을 발견한 경우 참 명제 제기
2. 논리적 함의에 대한 지식 부족
3. 경험적 논증(empirical argument)을 바탕으로 명제의 진리값 결정
4. 수학적 지식에 대한 이해 부족

위의 1은 인터뷰 과제를 성공적으로 마무리한 사례이며, 2, 3, 4는 인터뷰 과제를 성공적으로 완료하지 못한 연구참여자의 특징을 기술한 것이다.

4.1 다양하게 생성한 반례의 공통된 특징을 발견한 경우 참 명제 제기

연구참여자 A는 주어진 명제가 거짓임을 설명할 때 먼저 하나 이상의 반례를 생성하였다. 이를 바탕으로 자신이 생성한 반례들의 공통된 특징을 발견하였는데, 자신이 생성한 반례인 홀수로 구성된 제곱수들의 공통점은 각 자리의 수로 짝수를 포함하고 있다는 점을 지적하였다.

> **연구참여자 A**: 1, 3, 5, 7, 9로 구성된 두 자리 자연수는 제곱수가 될 수 없는데요. 5의 제곱은 25, 7의 제곱은 49, 9의 제곱은 81, 11의 제곱은 121, 13의 제곱은 169, 15의 제곱은 225... 이런 것들의 공통점은 모두 짝수를 포함하고 있다는 것.

또한, 연구참여자 D는 다양하게 생성한 반례를 바탕으로 반증(disprove)이 가능하고 이 명제의 경우는 반례보다는 반증이 더 낫다고 언급하였다. Figure 1과 같이 연구참여자 A와 D는 홀수로 구성된 두 자리 자연수를 수식화하여 나타내어 그러한 두 자리 자연수는 존재할 수 없으며, 명제 1이 거짓임을 반증하였다. 나아가 연구참여자 A와 D는 반증을 바탕으로 참인 명제를 제안하였다.

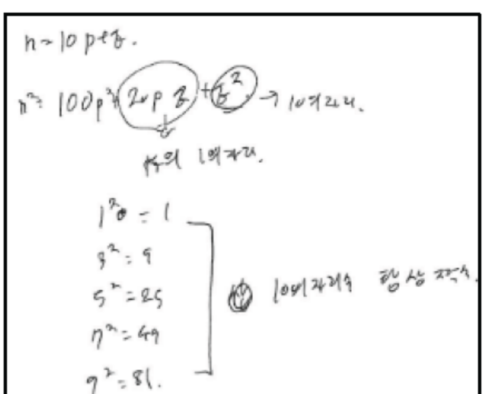

Figure 1. The interview of participant D; 연구참여자 D의 인터뷰지 기록

연구참여자 A와 D는 다양한 반례를 바탕으로 반례들의 공통점을 인식하였으며, 이는 선행연구에서 반례의 인지적 갈등 해결 [31]과 유사한 연구결과이다. 또한, 반례들의 공통점을 바탕으로 수식화를 통해 주어진 명제를 반박하였으며, 참인 명제도 제기하였다. 이 과정에서 연구참여자 A와 D는 명제 1의 조건 부분을 항상 유지하여 반례 생성을 위한 수학적 명제의 조건을 충족시키면서 참 명제를 제기하였다.

연구참여자 A와 D는 주어진 명제 2가 거짓이라고 지적하고, Figure 2와 같이 부분합을 다룸으로써 명제 2가 거짓임을 확인하였다. 연구자가 참인 경우는 없는지 물었을 때 연구참여자 D는 예를 찾는 것보다는 반증하는 것이 더 효율적이며, 그러한 경우는 존재할 수 없다고 응답하였다.

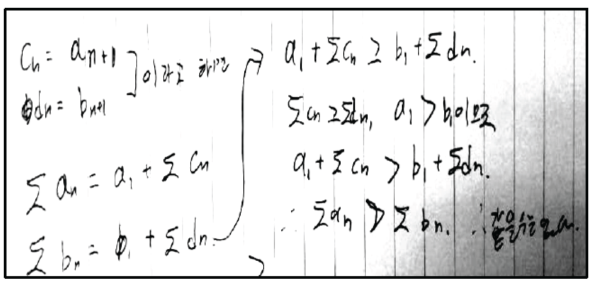

Figure 2. The interview result of participant D; 연구참여자 D의 인터뷰지 기록

이와 같이 다양한 반례를 생성하고 이들의 공통점을 정확하게 파악하고, 동시에 수학적 명제의 구조를 이해한 연구참여자들은 옳은 참 명제를 제기하였다. 이는 지금까지의 연구에서처럼 생성된 반례 그 자체만을 연구의 대상으로 하는 것이 아니라, 명제 생성의 연장선에서 반례의 역할에 주목할 필요가 있으며, 수학 교수학습에 있어서도 다양한 반례를 생성하고 이들의 공통된 특징을 유추하고 참 명제를 제기하는 학습이 필요할 것이다.

4.2 논리적 함의에 대한 지식 부족

연구참여자 C는 다음 인터뷰 전사 내용처럼 하나 이상의 반례를 생성하였으며 생성한 반례의 공통된 특징을 발견하였다.

> **연구참여자 C**: 제곱수인 것을 모두 떠올려봤어요. 9는 한 자리의 수니까, 16부터 25, 36, 49까지 생각해봤어요. 이 제곱수들을 봤을 때 짝수가 꼭 포함되어 있더라구요. 그 점에 착안해서 홀수만으로 제곱수가 될 수 없다고 생각했어요.

하지만, 이를 바탕으로 명제 1의 조건 부분을 유지하지 못하고 참 명제를 만들고자 시도했기 때문에 명제 1을 변형하여 참 명제를 제기하지는 못하였다. 이처럼 명제를 변형하기 위해선 논리적 함의에 대한 지식이 중요함을 관찰할 수 있었다.

연구참여자 B는 하나의 반례만을 생성하여 명제 1이 거짓임을 밝혔다. 하지만, 참인 명제를 생성할 때는 거짓임을 밝힌 명제 1은 고려하지 않은 채 Figure 3과 같이 자신이 암기한 논리학을 적용하려고 하였으나, 기억하지 못하여 참인 명제를 생성하지 못하였다.

> **연구참여자 B**: 명제가 참임을 보이려면 증명을 하는 것처럼 거짓을 증명할 때는 반례를 들었으니까. 이 명제를 참 명제로 나타내려면, p이면 q이다에서 어떻게 not을 붙이면 되는데... p and not q였던가? 모르겠어요.

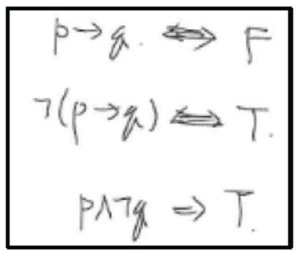

Figure 3. The interview result of participant B; 연구참여자 B의 인터뷰지 기록

이처럼 논리적 함의에 대한 정확한 지식을 갖지 못한 연구참여자 B는 명제 1의 조건 부분을 변형하지 않아야 한다는 인터뷰 과제 질문은 생각하지도 않고 논리적 함의를 기억해내고자 노력하였다.

연구참여자 F는 111을 반례로 제시하여 명제 1이 거짓임을 밝혔음에도 불구하고, 제곱수인 것도 존재할 것 같다는 자신의 직관만 말하였으며 제곱수가 되는 예를 찾으려고 시도했으나 찾지 못하여 참인 명제를 제시하지 못하였다. 제곱수인 것이 존재할 것 같다는 자신의 직관을 수식으로 나타내어 해결하거나 모든 경우를 고려하려는 시도보다는 주어진 명제의 가정 부분이 참이 되는 반례를 초기엔 제시했다가 나중에 가정 부분을 만족하지 못하는 예를 제시하기도 하였다. 이처럼 논리적 함의에 대한 이해가 부족하여 참인 명제를 제시하지 못하였다.

4.3 경험적 논증(empirical argument)을 바탕으로 명제의 진리값 결정

증명 과정에 있어 경험 기반 논거(empirically based evidence)에 의존하여 논증을 전개한다는 선행 연구 결과 [24]와 마찬가지로, 반례를 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정에 있어서도 예비 교사들은 경험적 논증에 의존하였다.

연구참여자 C는 무한등비급수 형태의 두 수열과 부분분수 형태의 두 수열을 반례로 등비수열 $a_n = (\frac{1}{3})^n$과 $b_n = (\frac{1}{2})^n$과 $a_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots$, $b_n = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \cdots$을 제시하여 하나 이상의 반례로 명제 2가 거짓임을 밝혔다. 하지만, $\alpha > \beta$인 경우의 반례들을

제시함으로써 명제 2가 거짓이라고 하였음에도, 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 무한등비급수의 수렴값 공식인 $\frac{a}{1-r}$ 를 이용하여, $\alpha = \beta$ 인 두 등비수열 a_n 과 b_n 을 찾으려고 하였으나 찾지 못하였다. 결국, 자신의 경험적 논증을 바탕으로 $\alpha = \beta$ 인 두 등비수열은 존재하지 않는다고 결론지었다. 형식적 증명이 아닌 자신의 경험적 논증을 바탕으로 하였기에 참 명제를 제기하지는 못하였다.

연구참여자 E는 참인 명제를 제기하기 위해, Figure 4와 같이 수학적 귀납법을 이용하여 명제 2가 거짓임을 밝혔는데, 스퀴즈 정리 (squeeze theorem)[2]를 부분합의 수열에 적용하여 $\alpha = \beta$ 인 경우가 존재한다고 판단하였다. 하지만, $\alpha = \beta$ 인 두 수열을 찾지 못하였다. 이에 자신의 증명이 엄밀하지 못하다고 응답하였다. 연구참여자 E는 자신이 잘못 적용한 수학적 정리에 기반하여 예가 존재한다는 경험을 근거로 $\alpha = \beta$ 인 두 수열을 계속 찾았으며, 이에 대한 재검토를 하지는 않았다.

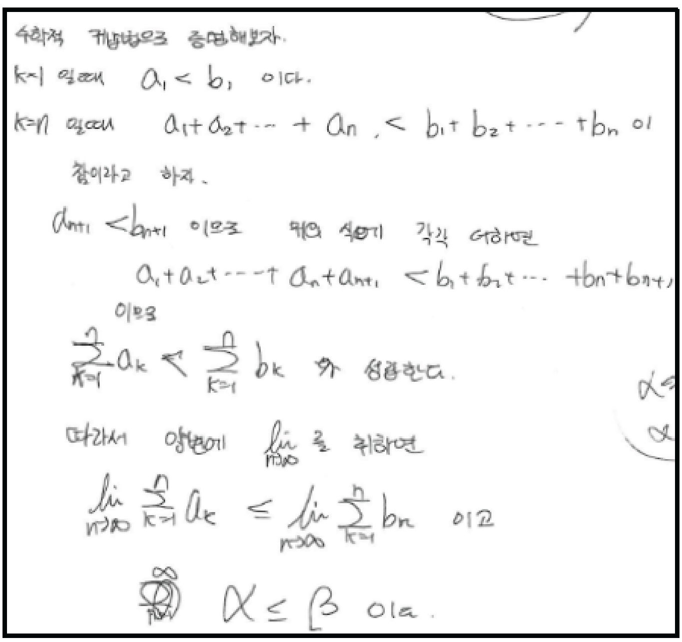
수학적 귀납법으로 증명해보자.
k=1 일때 $a_1 < b_1$ 이다.
k=n 일때 $a_1+a_2+\cdots+a_n < b_1+b_2+\cdots+b_n$ 이 참이라고 하자.
$a_{n+1} < b_{n+1}$ 이므로 위의 식에 각각 더하면
$a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1} < b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}$
이므로
$\sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} b_k$ 가 성립한다.
따라서 양변에 $\lim_{n\to\infty}$ 를 취하면
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_n$ 이고
$\alpha \le \beta$ 이다.

Figure 4. The interview result of participant E; 연구참여자 E의 인터뷰지 기록

기존 연구의 증명과정에서 나타나는 경험적 논증이 본 연구에서 반례를 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정에서도 나타났다. 이러한 경험적 논증이 형식적 증명과 거리가 있을 뿐만 아니라, 수학적 개념을 정련하고 발전시키는 데 장애물이 될 수 있을 것이다.

2) Squeeze Theorem [5]
세 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ 이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = L$ 이다.

4.4 수학적 지식에 대한 이해 부족

연구참여자 F는 명제 1의 조건 부분을 유지하지 못하고 참인 명제를 생성하려고 노력하였다. 이처럼 이해하지 못한 수학적 지식인 논리학을 이용하였으며, 결국 논리적 함의를 적용하지 못하여 명제 1을 수식으로 표현하였다. 하지만, 연구참여자 F는 Figure 5처럼 각 자리의 수가 홀수인데 제곱되는 수 전체를 $(2n+1)$ 인 홀수로 표현한 잘못된 수식 때문에 참인 명제를 제기하지 못하였다.

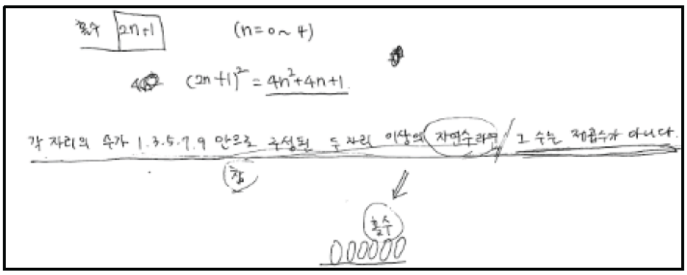

Figure 5. The expression of the equation by participant F; 연구참여자 F의 수식 표현

또한, 연구참여자 F는 명제 2에 대해서는 등비수열을 이용하여 하나의 반례를 제시하였다. 하지만, Figure 6과 같이 연구참여자가 제시한 반례는 명제 2의 가정 부분을 만족하지 못하는 반례였다. 즉, 연구참여자 F는 부분합이 아닌 수열에 극한을 취하였으며, $\alpha = \beta$가 같은 경우라고 언급하였다. 연구자가 명제 2를 다시 살펴보길 요청했지만, 무한 급수라도 부분합이 일반항의 형태로 표현될 수 있으면 가능하다고 대답하였다.

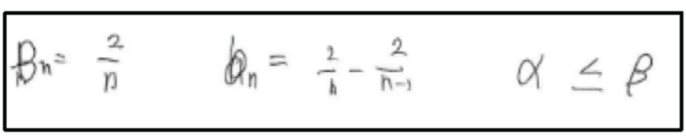

Figure 6. The interview result of participant F; 연구참여자 F의 인터뷰지 기록

이처럼 수학적 기호를 포함하여 수학적 표현에 대한 지식이 부족하거나, 명제의 논리적 함의에 대하여 이해가 부족한 경우, 다양한 반례를 바탕으로 참 명제를 제기하기는 어려움을 관찰할 수 있었다.

5 결론 및 논의

수학교육에서 증명교육은 오랜 기간 지속되었다. 증명은 세대를 걸쳐서 연속성을 유지할 필요가 있으며, 그 이유는 새로운 세대는 이전 세대로부터 이어받은 수학적 지식을 공리적

연역 방법을 통해 적응하게 되고, 수학적 실재에 있어 더욱 새로운 문제를 제기하는 풍토를 제공하기 때문이다 [9].

이와 같이, 반례도 증명과 관련되어 중요한 수학적 요소이며, 선행 연구에 대한 문헌 분석을 통해 반례에 대한 연구가 생성된 반례에 대한 교수학적 역할에 집중되어 있음을 밝혔다. 이에 본 연구에서는 예비교사가 거짓 명제에 대하여 반례를 생성하고 이를 바탕으로 참 명제를 제기하는 과정을 통해 반례가 수학적 명제의 참을 확립하는 과정에서 나타나는 예비교사의 반응을 분석하였다.

연구결과는 1. 다양하게 생성한 반례의 공통된 특징을 발견한 경우 참 명제 제기 2. 논리적 함의에 대한 지식 부족, 3. 경험적 논증(empirical argument)을 바탕으로 명제의 진리값 결정, 4. 수학적 지식에 대한 이해 부족의 네 가지로 분석할 수 있었다. 이러한 결과를 정리하면, 수학적으로는 명제를 반박하기 위해선 하나의 반례만으로 충분하지만, 주어진 명제를 변형하여 참 명제를 제기하기 위해선 다양한 반례를 생성할수록 도움이 됨을 확인할 수 있었다. 또한, 논리적 함의에 대한 지식 부족으로 예비교사들은 명제 구조에 대한 잘못된 이해를 하고 있었으며, 주어진 명제가 거짓임을 보여도 참 명제를 제기하기엔 명제의 논리적 지식의 부족은 장애물이 되었다. 더불어, 연구참여자 자신의 경험적 논증을 바탕으로 명제의 진리값을 결정한 경우는 잘못된 논증에 빠져 참 명제를 제기하지 못하였으며, 교사의 내용 지식(content knowledge)에 해당하는 수학적 지식 자체의 부족은 반례 생성이나 명제 이해에 치명적인 장애가 될 수 있었다.

증명과 반례에 대한 수학교사들의 내용 지식과 믿음은 교실에서 증명 과제를 가르치는 교수실행에 영향을 미치고, 학생들이 명제를 증명하고 반박할 기회를 제공하는 데 영향을 미치고, 학생들의 증명에 대한 교사들의 판단에 영향을 미친다 [27]. 따라서 수학교실에서 정당화에 대한 학생들의 이해를 발달시키기 위해서는 교사는 스스로 증명과 반례에 대한 충분한 내용 지식을 갖추어야만 한다.

이를 위한 몇 가지 제안점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 반례와 증명을 포함한 사범대 교육과정이 보강될 필요가 있다. 본 연구의 대상이 사범대 대학생이었고 수강한 과목이 논리학과 미적분학뿐이었다는 연구의 한계점이 있지만, 현재 사범대 교육과정에서 반례와 증명에 대한 교육은 교과 내용학을 수강하며 증명 자체의 이해만 수동적으로 이루어지고 있는 것이 현실이다. 이러한 교과 내용학 지식을 바탕으로 사범대 대학생들이 학교 수학 내에서 배운 내용 지식을 교수학적으로 전개할 수 있는 활동을 포함해야 할 것이다. 예를 들어, 본 연구에서도 직전 학기에 논리학을 수강하였음에도 실제 증명에 논리학을 적용해본 경험이 없어서 해결하지 못하겠다는 연구참여자의 응답이 있었음을 고려할 때, 논리학 수업 내에서 학교 수학에서 적용될 수 있는 논리적 함의를 다루어보는 교수학적 내용 지식을 보강할 수 있는 활동을 포함할 수 있을 것이다.

둘째, 학교 수학에 있어서도 다양하게 반례를 제기하는 교육이 이루어져야 할 것이다. 본 연구결과에 있어서도 다양한 반례를 생성한 학생들은 명제에 대한 이해가 더욱 깊어졌으며, 참 명제를 제기하는 데 있어서도 더욱 효율적이었다. 이는 반례의 기능이 주어진 명제를 설명하는 것 [19]뿐만 아니라, 다양한 반례를 생성함으로써 주어진 명제를 변형하여 새로운 명제를 제기할 수 있는 생산적 기능이 있음을 확인하는 것이다. 따라서 학생들이 다양한 반례를 생성하고 생성된 반례들이 옳은지 검토하고 반례들 사이의 포함관계 등을 살펴볼 수 있는 교과서 및 교수학습자료가 개발될 필요가 있으며, 이를 통해 증명 교육에 대한 방향 전환의 계기가 될 수 있을 것이다.

이상의 제안점을 통해 예비교사 교육과 학교 수학이 반례를 바탕으로 참 명제의 제기, 새로운 논증의 제기 등의 새로운 증명교육으로 발전되리라 생각된다.

참고 문헌

1. L. Alcock & K. Weber, "Using warranted implications to read and understand proofs", *For the Learning of Mathematics* 25(1) (2005), 34–38.
2. R. Borasi, *Learning mathematics through inquiry*, Portsmouth, NH: Heinemann, 1992.
3. Council of Chief State School Officers and National Governors Association, Common core state standards initiative [CCSSI] : Preparing America's students for college and career [Data file], 2011. Retrieved from `http://www.corestandards.org`.
4. V. Durand-Guerrier, "Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective", *Educational Studies in Mathematics* 53 (2003), 5–34.
5. L. H. Edwards, *Calculus of a single variable*, Houghton Mifflin: USA, 2006.
6. S. S. Epp, "The Role of Logic in Teaching Proof", *The American Mathematical Monthly* 110(10) (2003), 886–899.
7. G. Hanna, "Proof, explanation and exploration: An overview", *Educational Studies in Mathematics* 44 (2000), 5–23.
8. G. Harel & L. Sowder, "Students' proof schemes: Results from exploratory studies", in A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* III (234–283), Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.
9. K. Hemmi, "Three styles characterising mathematicians' pedagogical perspectives on proof", *Educational studies in mathematics* 75(3) (2010), 271–291.
10. K. Houston, *How to think like a mathematician: A companion to undergraduate mathematics*, Cambridge University Press: UK, 2009.
11. S. Klymchuk, "Using counter-examples in teaching and learning of calculus: students' attitudes and performance", *Mathematics teaching-research journal online* 5(4) (2012), Retrieved from `http://www.hostos.cuny.edu/departments/math/mtrj`.
12. E. Knuth, "Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof", *Journal for Research in Mathematics Education* 33(5) (2002), 379–405.
13. Y. Ko, *Proofs and Counterexamples: undergraduate students' strategies for validating arguments, evaluating statements, and constructing productions*, Unpublished Doctoral disserta-

tion, University of Wisconsin-Madison, Wisconsin, 2010.

14. I. Lakatos, *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
15. F. L. Lin, "Modeling students' learning on mathematical proof and refutation", in H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 1 (2005), 3–18, Melbourne: University of Melbourne.
16. H. Liong-Shin, *New Mexico Mathematics Contest Problem Book*, USA, 2005.
17. W. F. McComas & J. Olson,"The nature of science in international science eduction standards", in W. F. McComas (Ed.), *The nature of science in science education: Rationales and strategies*, 1998, 41–52. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
18. MEST, Ministry of Education, Science and Technology announcement no. 2011–361[Appendix 8] mathematics curriculum, MEST, 2011. 교육과학기술부, 교육과학기술부 고시 제 2011–361호 [별책 8] 수학과 교육과정, 교육과학기술부, 2011.
19. I. Peled & O. Zaslavsky,"Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain", *FOCUS on Learning Problems in Mathematics* 19(3) (1997), 49–61.
20. R. Platt & R. A. Griggs, "Facilitation in the abstract selection the task; The effects of attentional and instructional factors", *Quarterly Journal of Experimental Psychology—A* 46(4) (1993), 591–613.
21. J. Richstein,"Verifying the Goldbach conjecture up to 4×10^{14}", *Mathematics of Computation* 70(236) (2000), 1745–1749.
22. K. J. Riley, "Prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and its logical underpinnings". in *Psychology of Mathematics and Education of North America*, 2004 Annual Meeting (1–7). Toronto, Canada, 2004.
23. A. H. Schoenfeld (Ed.), *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*. Washington DC: Mathematical Association of America, 1983.
24. A. Selden & J. Selden,"Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?", *Journal for Research in Mathematics Education* 34(1) (2003), 4–36.
25. R. E. Stake, *The art of case study research*, Thousand Oaks, CA: Sage, 1995.
26. K. Stenning & M. V. Lambalgen, "A little logic goes a long way: basing experiment on semantic theory in the cognitive science of conditional reasoning", *Cognitive Science* 28 (2004), 481–529.
27. D. A. Stylianides, M. L. Blanton & E. Knuth,"Introduction", in D. A. Stylianides, M. L. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective (xii–xvi)*. New York, NY: Routledge, 2009.
28. A. Watson & J. Mason, *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*, Lawrence Erlbaum Associates, 2005.
29. K. Weber,"Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof", *Mathematical Thinking and Learning* 12 (2010), 306–336.
30. O. Zaslavsky & G. Ron,"Students' understanding of the role of counter-examples", in A.

Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, 225–232), Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch, 1998.

31. R. Zazkis & J. E. Chernoff,"What makes a counterexample exemplary?", *Educational Studies in Mathematics* 68(3) (2008), 195–208.