Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 18, No. 11, November 2013
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci.2013.18.11.159

간선 색칠 문제의 다항시간 알고리즘

이 상 운*

A Polynomial Time Algorithm for Edge Coloring Problem

Sang-Un, Lee *

요 약

본 논문은 NP-완전 문제인 간선 색칠과 그래프 부류 결정 문제를 동시에 해결하는 $O(E)$의 다항시간 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 최대차수-최소차수 정점 쌍 간선을 단순히 선택하는 방법으로 간선 채색수 $\chi'(G)$를 결정하였다. 결정된 $\chi'(G)$는 $\Delta(G)$또는 $\Delta(G)+1$을 얻는다. 결국, 알고리즘 수행 결과 얻은 $\chi'(G)$로부터 $\chi'(G)=\Delta(G)$이면 부류 1, $\chi'(G)=\Delta(G)+1$이면 부류 2로 분류할 수 있다. 또한, 미해결 문제로 알려진 "최대차수가 6인 단순, 평면 그래프는 부류 1이다."라는 Vizing의 평면 그래프 추정도 증명하였다.

▸ Keywords : 간선 채색수, 최대 차수, 최소 차수, 부류, NP-완전

Abstract

This paper proposes a $O(E)$ polynomial-time algorithm that has been devised to simultaneously solve edge-coloring problem and graph classification problem both of which remain NP-complete. The proposed algorithm selects an edge connecting maximum and minimum degree vertices so as to determine the number of edge coloring $\chi'(G)$. Determined $\chi'(G)$is in turn either $\Delta(G)$ or $\Delta(G)+1$. Eventually, the result could be classified as class 1 if $\chi'(G)=\Delta(G)$ and as category 2 if $\chi'(G)=\Delta(G)+1$. This paper also proves Vizing's planar graph conjecture, which states that ′all simple, planar graphs with maximum degree six or seven are of class one, closing the remaining possible case′, which has known to be NP-complete.

▸ Keywords : Chromatic Index, Maximum Degree, Minimum Degree, Class, NP-complete

•제1저자 : 이상운
•투 고 일 : 2013. 06. 23, 심사일 : 2013. 08. 14, 게재확정일 : 2013. 09. 24.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

I. 서 론

n개의 정점 (vertices, v)과 m개의 간선 (edges, e)으로 구성된 무방향 그래프 (Undirected Graph) $G=(V,E)$, $u,v \in V, e=\{u,v\} \in E$에 대해, 색칠 문제 (coloring problem)는 정점 색칠 (vertex coloring, VC), 간선 색칠 (edge coloring, EC)과 완전 색칠 (total coloring, TC) 문제로 분류된다[1-3]. 특별한 조건을 명시하지 않는 한 그래프 색칠 문제는 일반적으로 정점 색칠을 의미한다[1].

정점 색칠 문제는 동일 간선을 공유하는 인접 (adjacent) 정점들 (하나의 정점에 부속된 간선으로 연결된 모든 인접 정점들)간에는 다른 색을 할당하여 모든 정점들을 색칠하는데 요구되는 최소의 채색 수 (chromatic number) $\chi(G)=k$를 찾는 문제이다[1]. 간선 색칠 문제는 공통 정점으로 서로 인접한 간선들 (하나의 정점에 부속된 모든 간선들)간에는 다른 색을 할당하여 모든 간선들 색칠에 요구되는 최소의 채색 수 (chromatic index) $\chi'(G)=k$를 찾는 문제이다[2]. 또한, 완전 색칠 문제는 정점 색칠과 간선 색칠 문제를 합한 개념으로 하나의 정점에 인접한 정점들과 부속 (incident) 간선들 모두에 다른 색을 할당할 경우, 최소로 요구되는 채색수 $\chi''(G)=k$를 찾는 문제이다[3].

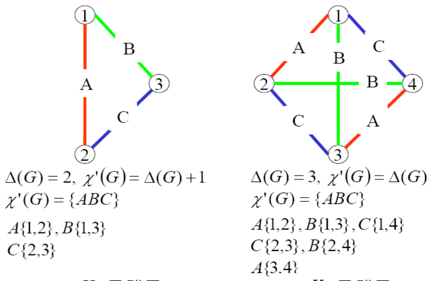
본 논문에서는 간선 채색수 $\chi'(G)=k$를 찾는 문제를 연구대상으로 한다. $\chi'(G)=k$를 찾는 방법은 NP-완전 (NP-complete, NPC)으로 알려져 있다[1,2]. 정점의 차수 (degree, deg(v))는 임의의 정점에 부속된 간선수이다. 그래프에서 부속된 간선을 가장 많이 가진 정점의 차수를 그래프의 최대 차수 (maximum degree) $\Delta(G)$라 하며, 최소 차수 (minimum degree)를 $\delta(G)$라 한다[4]. 최소 간선 채색수는 $\chi'(G)=\Delta(G)$또는 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$만이 존재하는 것으로 알려져 있다. $\chi'(G)=\Delta(G)$를 부류 1 (Class 1) 그래프라 하며, $\chi'(G)=\Delta(G)+1$를 부류 2 (Class 2) 그래프라 한다[2]. 루프 (loop)가 없으며, 어떤 다른 두 정점 간에 1개 이상의 간선이 존재하지 않는 단순 그래프 (simple graph)가 부류 1 또는 부류 2 그래프 여부를 판단하는 문제도 정확한 해를 다항시간으로 찾는 알고리즘이 제안되지 않아 NP-완전이다[2].

본 논문에서는 간선 채색 수 $\chi'(G)$를 모르는 상태에서 $O(V+E)$ 수행 복잡도로 $\chi'(G)$를 정확히 찾음과 동시에 그래프의 부류도 쉽게 구별할 수 있는 다항시간 알고리즘을 제안하여 간선 색칠 문제가 P-문제임을 증명한다. 2장에서는 $\chi'(G)=\Delta(G)$ 또는 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$이 되는 관련 연구와 문제점을 고찰한다. 3장에서는 $\chi'(G)=\Delta(G)$또는 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$을 정확히 찾는 다항시간 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 단순 평면, 단순과 완전 그래프 (complete graph)를 대상으로 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

II. 관련 연구와 문제점

간선색칠 문제에 있어서의 최소 채색수 $\chi'(G)$의 개념을 고찰해 보자. 그래프 이론에서, 두 정점 u와 v간에 연결된 간선 $\{u,v\}$가 존재할 경우 u와 v는 인접 (adjacent)한다고 한다. 또한, u에 연결된 모든 간선들은 u에 부속 (incident)된다고 한다. u에 부속된 간선들 간에는 인접한다고 한다.

그림 1은 K_3와 K_4 완전 그래프[5,6]에 대해 인접한 간선들 간에 서로 다른 색을 배정한 하나의 해를 보여주고 있다.



(a) K_3 그래프 (b) K_4 그래프

그림 1. K_3와 K_4 완전 그래프의 간선 색칠

Fig. 1. Edge Coloring for K_3 and K_4 Complete Graphs

K_3 그래프는 $\Delta(G)=2$로 모든 정점들의 차수가 동일한 경우이다. 첫 번째로 $c\{v_i,v_j\}=A\{1,2\}, B\{1,3\}$으로 할당하면 $\chi'(G)=\{A,B\}$로 $\chi'(G)=\Delta(G)$가 된다. 나머지 간선 $\{2,3\}$에 대해 ② 정점은 $A\{2,1\}$,③ 정점은 $B\{3,1\}$이 이미 배정되어 있어 간선 $\{2,3\}$에는 A와 B의 어떤 색도 배정될 수 없어 다른 색인 C를 배정해야 한다. 결국, K_3 그래프는 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$로 부류 2 그래프임을 알 수 있다.

K_4 그래프는 $\Delta(G)=3$으로 모든 정점들의 차수가 동일한 경우이다. 첫 번째로 $c\{v_i,v_j\}=A\{1,2\}, B\{1,3\}, C\{1,4\}$로 할당하면 $\chi'(G)=\{A,B,C\}=\Delta(G)$이다. 나머지 간선들에 $C\{2,3\}, B\{2,4\}, A\{3,4\}$를 배정하면 한 정점에 부속된 모든 간선들은 서로 다른 색이 배정된다. 결국, K_4 그래프는 $\chi'(G)=\Delta(G)$로 부류 1 그래프임을 알 수 있다.

단순 그래프에 관한 간선 채색수 $\chi'(G)$ 연구 결과를 살펴보면, $\chi'(G) \geq \Delta(G), \chi'(G)=\Delta(G)+1$(Vizing 1964), 이분그래프 (bipartite graph)인 경우 $\chi'(G)=\Delta(G)$(Kőnig bipartite theorem), 단순, 평면 그래프이고 $\Delta(G) \geq 7$인 경우 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$(Sanders & Zhao 2001), 거의 대부분의 그래프에 대해 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$(Erdos & Wilson 1977) 등이 있다. 결국, 지금까지의 연구결과를 종합하면 단순 그래프는 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$인 부류 1 그래프와 $\chi'(G) \geq \Delta(G)+1$인 부류 2 그래프만이 존재함을 알 수 있다[2].

Vizing의 평면 그래프 추정 (planar graph conjecture)[7]은 최대 차수가 6 또는 7을 가진 모든 단순, 평면 그래프는 부류 1 그래프이다. 이 추정에 대해 Sanders와 Zhao[8]는 최대 차수가 7인 경우 부류 1 그래프임을 증명하였으며, 최대 차수가 6인 경우는 증명되지 않고 있다.

간선과는 반대로 인접한 정점들 간에 다른 색을 배정하는 정점색칠과 관련한 다항시간 알고리즘으로는 Lee[9]가 있으며, 이의 응용으로 지도상의 인접한 지역 간에는 4가지 색으로 다른 색을 칠할 수 있다는 4색 정리를 증명한 연구로는 Lee[10]가 있다. 정점 색칠 문제는 독립된 정점들의 집합을 최소로 하는 방법으로 간단한 반면에, 간선 색칠 문제는 하나의 간선으로 연결된 2개의 정점에 부속된 간선들은 동일한 독립집합에 속하지 않아야 되는 복잡성이 있다. 따라서, 최소 정점 독립집합에 비해 최소 간선 독립집합을 찾는 것이 보다 여렵다.

지금까지 간선 색칠 방법과 더불어 주어진 그래프가 부류 1인지 부류 2인지를 정확히 구별하는 다항시간 알고리즘이 존재하지 않아 NP-완전으로 분류되어 있다[2].

III. 간선 색칠 알고리즘

인접한 간선 간에 서로 다른 색을 칠하는 문제는 서로 인접하지 않는 간선들을 하나의 부분집합으로 하여 동일한 색을 배정하는 개념과 동일하다. 이는 그래프를 서로 인접하지 않는 간선들의 최대 독립집합 (maximum independent set, MIS)들로 분류하는 문제로 볼 수 있다. 주어진 그래프의 MIS를 구하는 문제 또한 NP-완전이다.

본 장에서는 MIS 개념을 적용한 그림 2의 독립집합 알고리즘 (independent set algorithm, ISA)을 제안하여 간선 채색수의 정확한 해를 $O(E)$의 선형 다항시간으로 구하고자 한다.

제안된 알고리즘은 모든 정점이 동일한 차수 (부속 간선수가 모두 동일)한지 여부를 검증하여 동일 차수이면 임의의 간선을 하나의 독립집합에 포함시키고 이 간선으로 연결된 2개 정점에 부속된 간선을 모두 삭제하고 남은 간선들을 대상으로 해당 독립집합에 포함시키는 방법을 적용하였다. 만약, 모두 동일한 차수를 갖지 않는 그래프인 경우는 차수를 비교하여 간선 독립집합에 포함시키는 방법을 적용하였다.

제안된 알고리즘은 m개의 간선에 대해 $\chi'(G)=k$개의 최대 독립집합 (maximum independent set, MIS)으로 분할하기 때문에 알고리즘 수행 복잡도는 $O(E)$인 다항시간 알고리즘이다.

k: 간선 채색 수 ($\chi'(G)$).
$\overline{C_k}$: k^{th}색의 최대독립집합 (MIS)
C_k: k^{th}색의 최소간선피복 (MEC).
$E_1=E, V_1=V, C_1=E_1, v_2=\{\phi\}$
각 정점 v에 대한 $\deg(v)$계산.
for $k=1$ to $C_k=\{\phi\}$
while $E_k \neq \{\phi\}$
C_k 각 정점 v의 $\deg(v)$계산.
$\deg(v)$로 $\delta(G)$, $\Delta(G)$, $|\delta(G)|$, $|\Delta(G)|$ 확인.
$v_i \leftarrow \Delta(G)$정점, $v_j \leftarrow \delta(G)$정점, $v_a \leftarrow v_i$의 인접 정점.
if $|\Delta(G)|=|V|$ then $\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v_i, v_j\}$
/* 정점 번호 순으로 선택
else if $|\Delta(G)| \neq |V|$ then
if $\forall(\Delta(G)=2)$ and $\forall(\Delta(G)=1)$ then
if $v_2=\{\phi\}$ then $v_2 \leftarrow v_i$,
$\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v_i, v_j\}$
else if $v_2 \neq \{\phi\}$ then $v_2 \leftarrow v_j \cap v_2$,
$\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v_i, v_j\}$
else if $\exists(\deg(v_i)=1$ and $(\deg(v_j)=1)$ then
$\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v_i, v_j\}$.
else
if $v_j \in v_a$ then $\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v_i, v_j\}$
else if $v_j \not\in v_a$ then v_i 인접 정점 중 ${}_{\max}\deg(v)$인 정점 v_j 선택,
$\overline{C_k} \leftarrow \overline{C_k} \cup \{v_i, v_j\}$
v_i와 v_j 부속 간선 삭제.
Return $\overline{C_k}$
$C_{k+1}=E_k \setminus \overline{C_k}$.
Next k

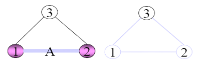
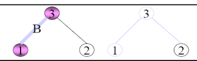
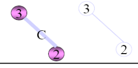
그림 2. 간선 채색수 독립집합 알고리즘
Fig. 2. Edge Chromatic Number Independent Set Algorithm

그림 1에 대해 독립집합 알고리즘 수행 결과는 표 1에 제시되어 있다. 독립집합 알고리즘은 하나의 색이 배정되는 간선 선택을 최대차수-최소차수 정점 쌍을 가진 간선을 선택하는 방법으로 $\chi'(G)$를 결정하는 방법이다. K_3 그래프는 $\Delta(G)=2$, K_4 그래프는 $\Delta(G)=3$이다. K_3 그래프에 대해 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$인 $\{A,B,C\}$를 얻어 부류 2 그래프임을, K_4 그래프에 대해서는 $\chi'(G)=\Delta(G)$인 $\{A,B,C\}$를 얻어 부류 1 그래프가 됨을 보였다.

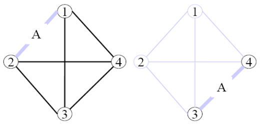
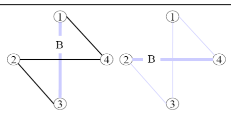
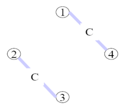
결국, 제안된 알고리즘은 수행 복잡도 $O(E)$로 간선의 색을 정확히 배정함과 동시에 주어진 그래프의 부류도 쉽게 분류할 수 있는 장점을 갖고 있다.

표 1. K_3와 K_4 완전 그래프의 독립집합 알고리즘 적용
Table 1. Apply Independent Set Algorithm to K_3 and K_4 Complete Graphs

(a) K_3 그래프

k	$\Delta(G)$	$\delta(G)$	$\overline{C_k}$		그래프
			후보	선택	
1	$\Delta(G)=2$ $v_i=\{1,2,3\}$	$\delta(G)=2$ $v_j=\{1,2,3\}$	$\{1,2\},\{1,3\}$ $\{2,1\},\{2,3\}$ $\{3,1\},\{3,2\}$	$\{1,2\}$	
2	$\Delta(G)=2$ $v_i=\{3\}$	$\delta(G)=1$ $v_j=\{1,2\}$	$\{3,1\},\{3,2\}$	$\{3,1\}$	
3	$\Delta(G)=1$ $v_i=\{2,3\}$	$\delta(G)=1$ $v_j=\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	
$\chi'(G)=\Delta(G)+1 \Rightarrow$ 부류 2 그래프					

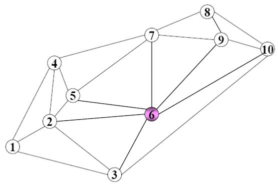
(b) K_4 그래프

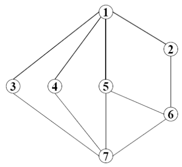
k	$\Delta(G)$	$\delta(G)$	$\overline{C_k}$		그래프
			후보	선택	
1	$\Delta(G)=3$ $v_i=\{1,2,3,4\}$	$\delta(G)=3$ $v_j=\{1,2,3,4\}$	$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$ $\{2,1\},\{2,3\},\{2,4\}$ $\{3,1\},\{3,2\},\{3,4\}$ $\{4,1\},\{4,2\},\{4,3\}$	$\{1,2\}$	
	$\Delta(G)=1$ $v_i=\{3,4\}$	$\delta(G)=1$ $v_j=\{3,4\}$	$\{3,4\}$	$\{3,4\}$	
2	$\Delta(G)=2$ $v_i=\{1,2,3,4\}$	$\delta(G)=2$ $v_j=\{1,2,3,4\}$	$\{1,3\},\{1,4\},\ \{2,3\},\{2,4\}$ $\{3,1\},\{3,2\},\ \{4,1\},\{4,2\}$	$\{1,3\}$	
	$\Delta(G)=1$ $v_i=\{2,4\}$	$\delta(G)=1$ $v_j=\{2,4\}$	$\{2,4\}$	$\{2,4\}$	
3	$\Delta(G)=1$ $v_i=\{1,2,3,4\}$	$\delta(G)=1$ $v_j=\{1,2,3,4\}$	$\{1,4\}$ $\{2,3\}$	$\{1,4\}$	
	$\Delta(G)=1$ $v_i=\{2,3\}$	$\delta(G)=1$ $v_j=\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	
$\chi'(G)=\Delta(G) \Rightarrow$ 부류 1 그래프					

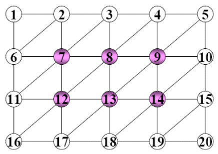
IV. 실험 및 결과 분석

본 장에서는 그림 3의 단순 평면 그래프인 P_1[9], P_2[10], 20개의 정점으로 이루어진 P_3 격자 그래프, 부류 2 단순 그래프인 Peterson 그래프 S_1[6,11]과 Flower Snark 그래프 S_2[6], $K_5 \sim K_{10}$의 완전 그래프[12]를 대상으로 제안된 알고리즘의 적용성을 평가해 본다.

대표적으로 P_1과 P_3 그래프에 대해 독립집합 알고리즘의 최대차수-최소차수 선택방법으로 간선을 색칠한 결과는 각각 그림 4와 그림 5에 제시하였다. 각 채색수 집합에 있는 원소들의 순서는 최대차수-최소차수 간선을 선택하는 순서이다.


(a) P_1 그래프


(b) P_2 그래프


(c) P_3 그래프

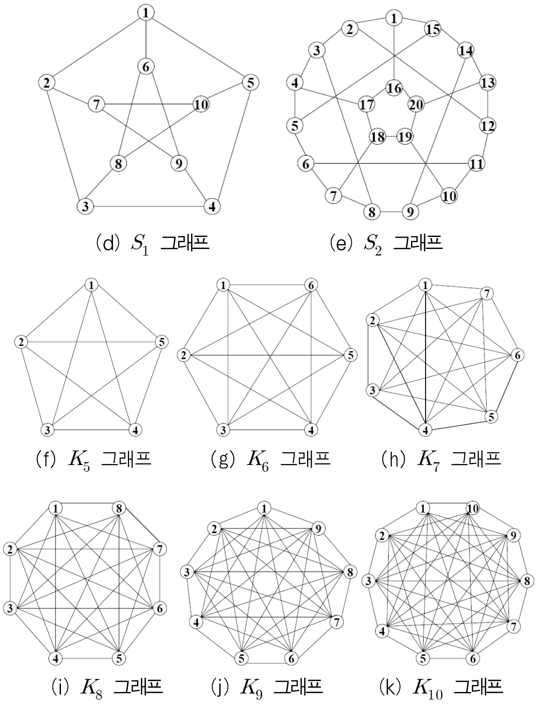


그림 3. 실험 그래프
Fig. 3. Experimental Graphs

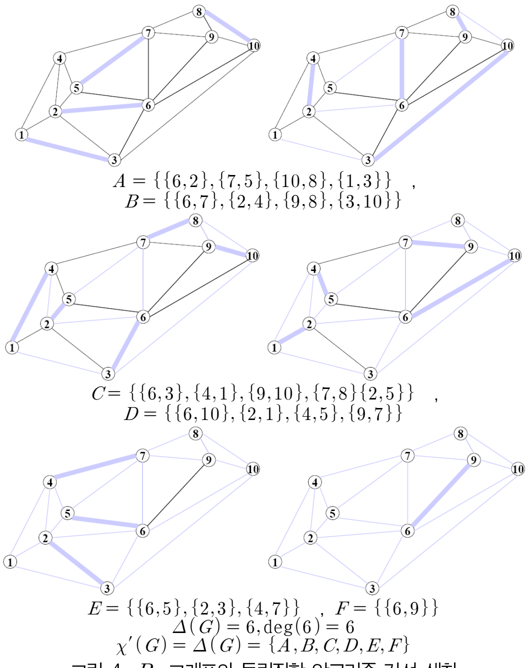


그림 4. P_1 그래프의 독립집합 알고리즘 간선 색칠
Fig. 4. Independent Set Algorithm Edge Coloring for P_1 Graph

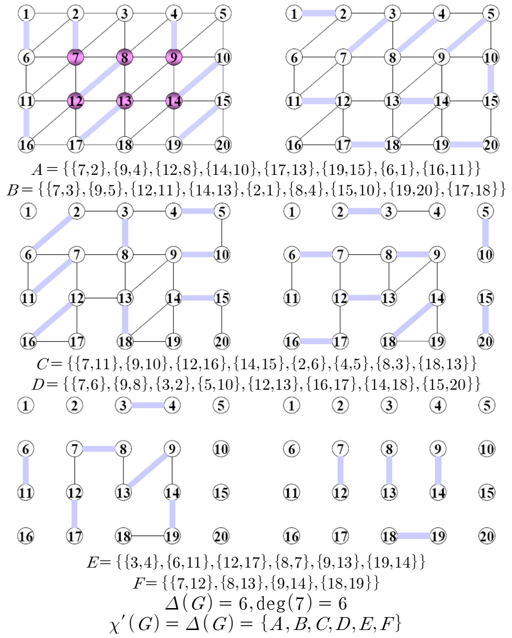


그림 5. P_3 그래프의 독립집합 알고리즘 간선 색칠
Fig. 5. Independent Set Algorithm Edge Coloring for P_3 Graph

P_1 그래프에 대해 그림 4와 같이 제안된 알고리즘을 수행한 결과 간선 독립집합 $\{A,B,C,D,E,F\}$를 얻었다. 이는 P_1 그래프의 $\Delta(G)=6, \deg(6)=6$으로 $\chi'(G)=\Delta(G)$의 결과를 나타냄을 알 수 있다.

P_2 그래프에 대해 그림 5와 같이 제안된 알고리즘을 수행한 결과 간선 독립집합은 $\{A,B,C,D,E,F\}$를 얻었다. 이는 P_2그래프의 $\Delta(G)=6, \deg(7)=6$으로 P_1그래프와 마찬가지로 $\chi'(G)=\Delta(G)$의 결과를 나타냄을 알 수 있다.

나머지 10개 그래프에 대해 간선 채색수를 배정한 결과는 표 2에 제시하였다.

표 2에서 다양한 그래프에 제안된 알고리즘을 적용한 결과 $\chi'(G)=\Delta(G)$또는 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$의 결과를 얻었음을 알 수 있다.

본 논문에서 거론된 13개 그래프에 대해 $\chi'(G)$를 구한 결과는 표 3에 제시하였다. 13개 그래프 모두에 대해 공통적으로 $\chi'(G)\ge\Delta(G)$ 또는 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$을 얻었으며, 주어진 그래프가 부류 1 또는 부류 2인지를 정확히 분류하는데 성공하였다. 또한, P_1과 P_3 그래프는 $\Delta(G)=6$인 경우로, 지금까지 증명되지 못한 최대 차수가 6인 경우의 Vizing의 평면 그래프 추정에 대해 제안된 알고리즘은 P_1과 P_3 그래프

가 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$임을 증명하였다.

표 2. 실험 그래프의 독립집합 알고리즘 간선 색칠
Table 2. Independent Set Algorithm Edge Coloring for Experimental Data

그래프	간선 색칠	$\Delta(G)$	$\chi'(G)$
P_2	A={{7,3},{1,4},{6,2}}, B={{1,3},{7,4},{5,6}} C={{1,2},{7,5}}, D={{1,5},{6,7}}	4	$\Delta(G)$
S_1	A={{1,2},{4,3},{10,5},{6,8},{9,7}} B={{1,6},{4,5},{2,3},{10,7}} C={{8,3},{9,4},{1,5},{2,7}}, D={{6,9},{8,10}}	3	$\Delta(G)+1$
S_2	A={{1,2},{4,3},{6,5},{9,8},{13,12},{18,7},{10,11},{16,17}, {14,15},{19,20}} B={{1,15},{4,5},{18,17},{10,19},{14,9},{20,13},{2,3},{7,8}, {11,6}} C={{12,2},{16,1},{3,8},{4,17},{5,15},{6,7},{9,10},{13,14}, {18,19}} D={{11,12},{16,20}}	3	$\Delta(G)+1$
K_5	A={{1,2},{3,4}}, B={{5,1},{2,3}}, C={{4,1},{5,2}} D={{3,1},{4,5}}, E={{2,4},{3,5}}	4	$\Delta(G)+1$
K_6	A={{1,2},{3,4},{5,6}}, B={{1,3},{2,5},{4,6}}, C={{1,4},{3,5},{2,6}}, D={[1,5},{2,4},{3,6}} E={{1,6},{2,3}, {4,5}}	5	$\Delta(G)$
K_7	A={{1,2},{3,4},{5,6}},B={{7,1},{2,3},{4,5}}, C={{6,1},{7,3},{2,4}},D={{5,1},{6,3},{7,2}}, E={{4,1},{5,2},{6,7}}, F={{3,1},{7,5},{6,4}} G={{2,6},{3,5},{4,7}}	6	$\Delta(G)+1$
K_8	A={{1,2},{3,4},{5,6},{7,8}}, B={{1,3},{2,5},{4,7},{6,8}} C={{1,4},{3,5},{2,8},{6,7}}, D={{1,5},{2,7},{3,6},{4,8}} E={{1,6},{3,8},{4,2},{5,7}}, F={{1,7},{2,3},{4,6},5,8}} G={{1,8},{2,6},{3,7},{4,5}}	7	$\Delta(G)$
K_9	A={{1,2},{3,4},{5,6},{7,8}}, B={9,1},{2,3},{4,5},{6,7}} C={{8,1},{9,3},{2,5},{4,6}}, D={{7,1},{8,3},{9,5},{2,4}} E={{6,1},{7,3},{8,5},{9,2}}, F={{4,1},{6,3},{7,2},{8,9}} G={{5,1},{4,7},{6,9},{2,8}}, H={{3,1},{7,5},{4,9},{6,8}} I ={{2,6},{3,5},{4,8},{7,9}}	8	$\Delta(G)+1$
K_{10}	A={{1,2},{3,4},{5,6,{7,8},{9,10}} B={{1,3},{2,5},{4,7},{6,9},{8,10}} C={{1,4},{3,5},{2,8},{5,10},{7,9}}, D={{1,5},{2,7},{4,6},{3,10},{8,9}} E={{1,6},{3,7},{4,8},{2,10},{5,9}}, F={{1,7},{4,10},{3,5},{2,9},{6,8}} G={{1,8},{2,3},{4,9},{7,5},{6,10}}, H={{1,9},{8,3},{4,5},{6,2},{10,7}} I ={{1,10}.{2,4},{3,9},{5,8},{6,7}}	9	$\Delta(G)$

표 3. 알고리즘 성능 분석
Table 3. Analysis of Algorithm Performance

그래프		$\Delta(G)$	$\chi'(G)$	독립집합 알고리즘	
				$\chi'(G)=\Delta(G)$	$\chi'(G)=\Delta(G)+1$
단순, 평면 그래프	P_1	6	6	○	
	P_2	4	4	○	
	P_3	6	6	○	
단순 그래프	S_1	3	4		○
	S_2	3	4		○
완전 그래프	K_3	2	3		○
	K_4	3	3	○	
	K_5	4	5		○
	K_6	5	5	○	
	K_7	6	7		○
	K_8	7	7	○	
	K_9	8	9		○
	K_{10}	9	10	○	

표 3으로부터 단순과 평면 그래프는 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, 단순, 평면과 완전 그래프 이외의 일반적인 단순 그래프는 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$, 완전 그래프 K_n은 n이 홀수인 경우 $\chi'(G) = \Delta(G)+1$, 짝수인 경우 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$라는 특성을 얻었다.

지금까지는 간선 채색수 $\chi'(G)$를 NP-완전으로 다항시간 알고리즘이 존재하지 않는 것으로 알려져 왔으나 제안된 알고리즘은 간선 색칠을 할 수 있는 간선 최대 독립집합의 개수를 $O(E)$의 선형 다항시간으로 찾는 방법을 제안하여, $\chi'(G)$ 문제는 NP-완전이 아닌 P 문제임을 증명하였다.

V. 결론 및 향후 연구과제

본 논문은 지금까지 다항시간 복잡도의 알고리즘이 알려지지 않아 NP-완전 문제로 분류된 간선 색칠 문제에 대해 다항시간 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 간선 채색수 $\chi'(G)$를 구하기 위해 단순히 최대차수-최소차수 정점 쌍 간선을 선택하는 방법을 적용하였다.

본 논문은 간선 최소 채색수 $\chi'(G)$를 다항시간으로 정확히 구하는 알고리즘을 제안함과 동시에 주어진 그래프가 부류 1인지, 부류 2인지를 명확히 분류하는 NP-완전 문제도 해결하였다. 추가적으로, 최대차수가 6인 단순, 평면 그래프에 대해 Vizing의 평면 그래프 추정도 증명하였다.

본 논문은 간선 색칠 문제에 한정하여 알고리즘을 제안하였으며, 추후 NP-완전 문제로 분류된 총 색칠 문제를 다항시간으로 풀 수 있는 알고리즘을 연구할 계획이다.

참고문헌

[1] Wikipedia, "Graph Coloring," http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_Coloring, Wikimedia Foundation Inc., 2013.

[2] Wikipedia, "Edge Coloring," http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_coloring, Wikimedia Foundation Inc., 2013.

[3] Wikipedia, "Total Coloring," http://en.wikipedia.org/wiki/Total_coloring, Wikimedia Foundation Inc., 2013.

[4] Wikipedia, "Degree (Graph Theory)," http://en.wikipedia.org/wiki/Degree_(graph-theory), Wikimedia Foundation Inc., 2013.

[5] E. Weisstein, "Class 1 Graph," http://mathworld.wolfram.com/Class 1 graph, Wolfram Research Inc., 2013.

[6] E. Weisstein, "Class 2 Graph," http://mathworld.

wolfram.com/Class 2 graph, Wolfram Research Inc., 2013.

〔7〕 V. G. Vizing, "Critical Graphs with Given Chromatic Class," Metody Diskret. Analiz., Vol. 5, pp. 9-17, 1965.

〔8〕 D. P. Sanders and Y. Zhao, "Planar Graphs of Maximum Degree Seven are Class Ⅰ," Journal of Combinatorial Theory Series B, Vol. 83, No. 2, pp. 201-212, 2001.

〔9〕 S. U. Lee and M. B. Choi, "A Polynomial (P) Algorithm for Vertex Coloring (Chromatic Number) Problem," Journal of the Korea Society of Computer and Information, Vol. 16, No. 7, pp. 85-93, Jun, 2011.

〔10〕 S. U. Lee, "The Four Color Algorithm," Journal of the Korea Society of Computer and Information, Vol. 18, No. 5, pp. 113-120, May, 2013.

〔11〕 Wikipedia, "Minimum Spanning Tree," http://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_spanning_tree, Wikimedia Foundation Inc., 2013.

〔12〕 R. Machado and C. M. H. de Figueiredo, "A Decomposition for Total-coloring Graphs of Maximum Degree 2," Cologne-Twente Workshop, 2008.

〔13〕 Wikipedia, "Peterson Graph," http://en. wikipedia.org/wiki/Peterson_graph,Wikimedia Foundation Inc., 2013.

〔14〕 E. Weisstein, "Complete Graph," http://mathworld.wolfram.com/Complete graph, Wolfram Research Inc., 2013.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)

1983년 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995년 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998년 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003.3 ~ 현 재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 소프트웨어 개발 방법론, 소프트웨어 신뢰성, 그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr