

마주보는 양단이 자유 경계조건을 갖는 Lévy 판의 조화 응답 해석

Harmonic Response Estimation Method on the Lévy Plate with Two Opposite Edges Having Free Boundary Conditions

박 남 규[†] · 서 정 민^{*} · 전 경 락^{*}

Nam-Gyu Park, Jung-Min Suh and Kyeong-Lak Jeon

(Received April 18, 2013 ; Revised November 5, 2013 ; Accepted November 5, 2013)

Key Words : Lévy Plate(레비 판), Harmonic Response(조화 응답), Mode Superposition Method(모드중첩법), Algebraic Equation(대수방정식), Least Mean Square Error(최소자승오차)

ABSTRACT

This paper discusses a harmonic response estimation method on the Lévy plate with two opposite edges simply supported and the other two edges having free boundary conditions. Since the equation of motion of the plate is not self-adjoint, the modes are not orthogonal to each other on the domain. Noting that the Lévy plate can be expressed using one term sinusoidal function that is orthogonal to other sinusoidal functions, this paper suggested the calculation method that is equivalent to finding a least square error minimization solution of the finite number of algebraic equations. Example problems subjected to a distributed area loading and a distributed line loading are defined and their solutions are provided. The solutions are compared to those of the commercial code, ANSYS. According to the verification results, it is expected that the suggested method will be useful to predict the forced response on the Lévy plate with the distributed area or line loading conditions.

1. 서 론

평판의 진동에 대한 연구는 Euler의 수학적 접근을 시초로하여 Bernoulli, Navier, Lévy, Kirchhoff, Love 등을 거치면서 학문적 체계가 완성되었으며^(1,2), 이를 기반으로 많은 기술적 문제에 적용되어 왔다⁽³⁻⁷⁾. Kirchhoff는 최초로 변분법의 원리로부터 판의 운동방정식을 유도하였으며⁽²⁾, Kirchhoff의 가정은 길이대 두께의 비가 1/20 이하인 경우의 얇은 판에 대해 매우 정확한 해를 구할 수 있음이 검증되었다⁽⁸⁾.

외력이 작용하는 판에 대한 응답 특성은 구조물의 거동을 해석하거나 설계변수를 설정하는데 매우 중요하며, Lee⁽¹⁰⁾ 등은 설계민감도 기법을 이용하여 판 구조물의 진동 저감방안을 연구하였다. 구조물의 조화 응답 해석은 여러 가지의 방법으로 구할 수 있으며, Doyle은 지배방정식의 Fourier 변환을 이용하여 Timoshenko 스펙트럼 빔 요소를 개발하였고 파동의 반사 등 스펙트럼 요소법을 이용한 구조물의 거동을 구하였다^(9,11). Kulla⁽¹³⁾는 Euler-Bernoulli 스펙트럼 빔(beam) 요소를 사용하여 동 강성 행렬을 유도한 바 있다. 모드 중첩법을 이용한 구조물의 응답 해석은 모드의 직교성을 이용하여 간단히 정리될

[†] Corresponding Author ; Member, KEPCO NF
E-mail: nkpark@knfc.co.kr
Tel : +82-42-868-1197, Fax : +82-42-868-1149
^{*} KEPCO NF

[‡] Recommended by Editor Hyung-Jo Jung
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

수 있으므로 많이 활용된다^(1,8,12). 한편, 판 구조물의 경우 모드의 직교성(orthogonality)이 모든 경계 조건에 대해 성립하지 않으므로 모드 중첩법을 이용한 해법은 특정한 경계조건을 갖는 경우로 제한된다.

네 변이 단순지지된 판에 대해 Navier는 이중 삼각함수(double trigonometric series)를 이용한 해를 제시하였다⁽¹⁾. 일반적으로 서로 마주보는 두변이 단순지지된 사각평판은 싸인함수를 포함한 모드형상을 취하며, Lévy의 해로 알려져 있다^(1,8). Lévy 판은 공학적으로 빈번하게 응용되는 형태이므로 많은 연구자들의 연구 대상이었다. Xiang^(14,15)은 여러 개의 단순 지지대가 있는 사각 평판의 고유치 문제의 해 및 좌굴 문제의 해를 제시하였다. Marynowski⁽¹⁶⁾는 움직이는 점탄성 평판에 대한 안정성에 대해 논하였고, Thai⁽¹⁷⁾는 자유진동하는 이방성 재질의 평판에 대한 해를 제시하였다. Lellep⁽¹⁸⁾은 크랙이 존재하는 평판에 대한 고유치 문제의 해를 제시하였고, 크랙의 크기에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

회전기계를 포함한 다수의 기계구조물은 일정한 주파수 성분에 의한 가진이 지배적이므로, 특정 주파수 성분에 의한 응답해석은 기계설계 및 성능 개선에 유용하게 활용될 수 있다. 이 논문에서는 서로 마주보는 양변이 자유단이고, 다른 두 변이 단순 지지된 Lévy 판의 조화 응답 해석 방법에 대해 논하였다. 상술한 바와 같이 다양한 조건에서의 자유진동하는 판의 해는 많은 연구자들에 의해 수행 되었으나, 판의 경우 모드간의 직교성을 만족하는 경계 조건을 갖는 경우가 제한적이므로 모드 중첩법을 이용한 강제진동 해석 방법의 적용은 매우 제한적이다. 따라서 이 연구에서는 상술한 Lévy 판의 조화 응답을 구하기 위한 선형 대수방정식을 제시하였고, 상기 방정식의 최소자승오차를 만족시키는 각 주파수에 대한 모드별 가중치를 구하고, 유한요소해석에 의한 결과와 비교하여 타당성을 검증하였다.

2. 운동방정식과 경계조건

Fig. 1은 이 연구에서 수행하고자 하는 대상물에 대한 개략도이다. 서로 마주보는 양변이 단순 지지 되었으며, 다른 두 변은 자유진동하는 평판이다. 탄성 계수(Young's modulus)와 푸아송 비(Poisson's

ratio)가 E 및 ν 인 균질(homogeneous)한 사각 평판의 두께가 충분히 얇고 균일한 경우, 회전 관성을 고려치 않은 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다⁽¹⁾.

$$D_h \nabla^4 w + \rho h \ddot{w} = p(x, y) f(t) \tag{1}$$

여기서 감쇠의 영향은 고려치 않았으며, ρ, h, w 는 각각 평판의 밀도, 두께, z 방향 변위를 의미한다. \ddot{w} 는 시간(t)에 대한 2계 미분이며 ∇^4 는 라플라스 연산자(∇^2)의 제곱이다. p 와 f 는 각각 공간 및 시간에 따라 변하는 단위 면적당 작용하는 하중이고, D_h 는 횡방향 강성($Eh^3/(12(1-\nu^2))$)을 의미한다. 이 구조물에 대한 경계조건은 단순 지지된 두 변에서는 변위 및 모멘트가 0이어야 하며, 자유단 경계면은 모멘트 및 전단력이 0임을 만족해야 한다. z 방향 변위(w)는 $W(x, y)q(t)$ 로 쓸 수 있으므로, 상술한 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다. 단순 지지단에서의 경계조건은 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} W(0, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(0, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W(0, y)}{\partial y^2} &= 0 \\ W(a, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(a, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W(a, y)}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

자유단에서의 경계조건은 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W(x, 0)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, 0)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 W(x, 0)}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W(x, 0)}{\partial y \partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 W(x, b)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, b)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^3 W(x, b)}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W(x, b)}{\partial y \partial x^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

강제 진동하는 구조물은 경계조건을 만족하는 고유모드를 이용해 해석할 수 있으며, Fig. 1과 같은 경계조건을 갖는 사각 평판의 고유모드를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W_{mn}(x, y) = Y_n(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{4}$$

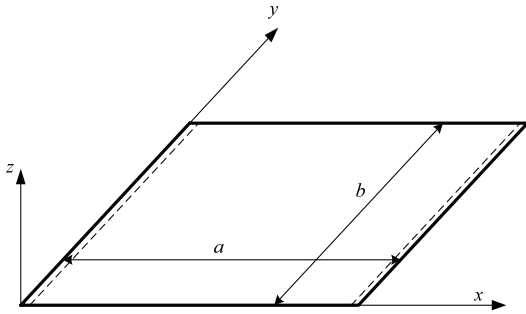


Fig. 1 Lévy plate; two sides($x=0, x=a$) are simply supported, and the other two sides are free

여기서 W_{mn} 은 x 방향의 m 번째 모드($\sin(m\pi/a)x$) 및 y 방향의 n 번째 모드(Y_n)에 의한 z 방향의 모드형을 의미한다. 또, 구조물의 응답은 모드 중첩법을 적용하여 해석 할 수 있으므로 식 (4)의 모드를 사용하여 식 (1)의 응답을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}(t) Y_n(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{5}$$

식 (5)에서 q_{mn} 는 시간에 따른 모드별 기여도이며, 모든 모드들이 직교성을 만족할 경우 식 (1)은 각 모드에 대한 상미분 방정식으로 표현할 수 있으므로 쉽게 해를 구할 수 있다.

3. 조화응답의 근사해

기계구조물의 정상상태 운전은 특정 주파수 성분이 지배적이며, 이때 식 (1)의 우변에서 시간의 함수 $f(t)$ 는 특정 주파수(ω)로 진동하는 계로 모사할 수 있으므로 $e^{j\omega t}$ 로 표현할 수 있다. 따라서 식 (5)는 식 (6)과 같이 쓸 수 있다.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} e^{j\omega t} Y_n(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \tag{6}$$

여기서 Q_{mn} 은 시간영역에서의 모드기여도(q_{mn})에 대응되는 주파수 영역에서의 기여도이다. 한편, 식 (2)의 경계조건을 만족하는 평판의 y 방향의 고유모드($Y(y)$)는 다음과 같이 쓸 수 있다⁽¹⁹⁾.

$$Y(y) = A \cosh \frac{r_1}{b} y + B \sinh \frac{r_1}{b} y + C \cos \frac{r_2}{b} y + D \sin \frac{r_2}{b} y \tag{7}$$

$$\text{if } K_n \geq 1, \text{ where } r_1 = \frac{b}{a} m\pi \sqrt{K_n + 1},$$

$$r_2 = \frac{b}{a} m\pi \sqrt{K_n - 1}$$

$$Y(y) = A \cosh \frac{r_1}{b} y + B \sinh \frac{r_1}{b} y + C \cosh \frac{r_2}{b} y + D \sinh \frac{r_2}{b} y \tag{8}$$

$$\text{if } K_n < 1, \text{ where } r_1 = \frac{b}{a} m\pi \sqrt{K_n + 1},$$

$$r_2 = \frac{b}{a} m\pi \sqrt{1 - K_n}$$

위 식에서 A, B, C, D는 각 항의 계수이며, K_n 은 다음과 같이 정의된다.

$$K_n = \omega_{mn} a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} / (m\pi)^2 \tag{9}$$

여기서 ω_{mn} 은 x 방향의 m 번째 모드 및 y 방향의 n 번째 모드에 대응되는 고유진동수를 의미한다. 또한 식 (6)을 식 (1)에 대입하고, 양변에 싸인 함수($\sin(k\pi/a)x$)를 곱하고 적분하면 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kn} \left[Y_n(y) \left(\frac{k\pi}{a} \right)^4 - 2 \frac{\partial^2 Y_n(y)}{\partial y^2} \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \frac{\partial^4 Y_n(y)}{\partial y^4} \right] - \rho h \omega^2 \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{kn} Y_n(y) = \int_0^a p(x, y) \sin \frac{k\pi}{a} x dx \tag{10}$$

평판의 y 방향의 고유모드는 서로 직교성을 만족하지 않으므로 식 (10)은 더 이상 간략히 표현할 수 없다.

그런데 상기 식 (10)은 평판의 모든 점에서 만족

하여야 하므로 y방향으로 유한개의 위치에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{k11} & C_{k12} & \cdots & C_{k1n} \\ C_{k21} & C_{k22} & \cdots & C_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{kr1} & C_{kr2} & \cdots & C_{krn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{k1} \\ Q_{k2} \\ \vdots \\ Q_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, 좌변 행렬의 각 요소는 다음과 같다.

$$C_{kij} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{a}{2} \left[Y_j(y_i) \left(\frac{k\pi}{a} \right)^4 - 2 \frac{\partial^2 Y_j(y_i)}{\partial y^2} \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \frac{\partial^4 Y_j(y_i)}{\partial y^4} \right] - \rho h \omega^2 \frac{a}{2} Y_j(y_i) \quad (12)$$

또한 식 (11)의 우변의 각 요소는 다음과 같다.

$$f_i = \int_0^a \left(p(x, y_i) \sin \frac{k\pi}{a} x \right) dx \quad (13)$$

따라서, 식 (11)의 미정계수는 다음과 같이 결정됨을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Q_{k1} \\ Q_{k2} \\ \vdots \\ Q_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{k11} & C_{k12} & \cdots & C_{k1n} \\ C_{k21} & C_{k22} & \cdots & C_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{kr1} & C_{kr2} & \cdots & C_{krn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

식 (6)의 정확도는 미정계수의 정확도에 따라서 결정되므로 방정식의 개수가 충분하여야 하며, 식 (14)로 결정되는 값은 최소 자승 오차의 개념에서 최적해이다⁽²⁰⁾. 또한 식 (14)에서 미정계수보다 많은 수의 방정식이 존재하는 경우 역변환 행렬은 가역행렬(pseudo-inverse)이 된다. 차수(rank)가 부족한 행렬의 역변환은 존재하지 않으므로, 서로 종속된 속성을 갖지 않는 행렬을 구성하여야 한다. 이것은 특정 모드의 영향이 지배적인 경우에서 서로 종속된 특성을 보일 수 있으므로, 모든 모드의 영향이 균등하게 반영될 수 있도록 판의 각 부분에서 방정식을 구하여 식 (11)를 구성함이 바람직하다.

4. 응용 예제 및 검증

4.1 검증 모델

핵연료를 구성하는 여러 부품 중에서 지지격자는 연료봉의 배열을 일정하게 유지하는 역할을 수행하며, 얇은 판재로 제작된다. 판의 두께는 지지격자의 종류에 따라 다르나 대개는 0.5 mm 미만의 박판으로 제작된다. 냉각수는 지지격자판의 두께 방향으로 수직하게 입사되므로 냉각수는 판을 통과하면서 압력차를 발생하며 와류의 박리로 냉각수의 진행방향과 수직한 방향으로 진동한다.

이 논문의 검증 대상은 두께가 0.2667 mm인 스틸(steel) 사각 판재이다. 판재는 격자형태로 조립되므로 다소 복잡한 기하학적 구조 및 경계조건을 갖고 있으나, 이 연구에서는 제시된 방법의 타당성을 검증하고자 지지격자를 구성하는 일부분인 10.67 mm × 2.54 mm의 판을 대상으로 검증을 실시하였다. 판의 모양은 Fig. 1과 동일하며 길이가 긴쪽의 양단이 단순 지지되고 다른 양단은 자유단 조건이다. 밀도, 탄성계수, 푸아송비는 각각 7860 kg/m³, 2.1 × 10¹¹ Pa, 0.3이다. 상기 물성을 갖는 평판의 고유진동수는 x방향 및 y방향의 모드를 이용하여 식 (2)의 경계조건을 만족시키는 특성방정식의 해를 반복적인 방법으로 구하면 Table 1과 같고 ANSYS 해석결과와 매우 유사함을 알 수 있다.

4.2 면 하중이 작용하는 경우

고속의 냉각수에 의해 발생하는 유체유발 진동에 의한 가진력은 통상 수천 Hz의 고주파 성분과 성분 가진 성분이 지배적이다⁽²⁰⁾. 따라서 단위면적 당 50 N의 하중이 면 전체에 걸리고 1.8 kHz로 조화 가진을 하는 경우를 분석하였다. y방향으로 20개의 위치에서의 값을 이용하였으며, 이때 가진력은 식 (13)과 같이 정해지므로 다음과 같음을 알 수 있다.

$$f_i = \frac{50a}{m\pi} (1 - \cos m\pi) \quad (15)$$

즉, m이 홀수인 경우에만 가진성분이 존재하므로, 짝수인 경우는 가진력이 없으므로 해당 모드의 기여도는 존재하지 않는다. Table 2는 식 (14)에

Table 1 The plate natural frequencies in Hz(present/ ANSYS)

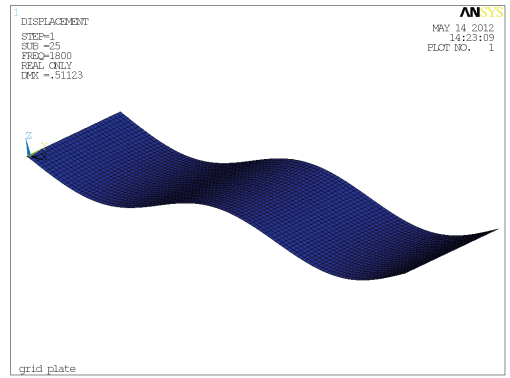
$m \backslash n$	1	2	3
1	174/174	1,013/1,013	7,588/7,587
2	700/701	2,119/2,120	8,466/8,465
3	1,587/1,588	3,399/3,400	9,819 /9,817
4	2,839/2,840	4,913/4,916	11,559/11,559
5	4,450/4,456	6,707/6,712	13,637/13,637
6	6,428/6,436	8,806/8,816	16,027/16,023

Table 2 Weighting factor(Q) at 1.8 kHz excitation

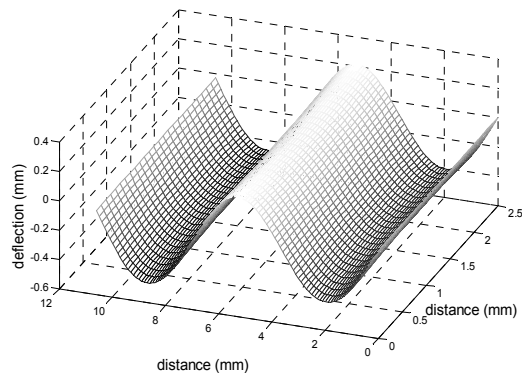
$m \backslash n$	1	2	3
1	-0.0210	0.0000	-0.0001
2	0.0041	0.0000	0.0000
3	-0.0499	0.0001	-0.0001
4	0.0005	0.0000	0.0000
5	0.0018	0.0000	0.0000
6	0.0002	0.0000	0.0000

의해 결정된 각 모드별 기여도이며, n 이 1인 경우의 홀수 모드($m=1,3,5$)의 기여도가 매우 큰 것을 확인할 수 있다. n 이 1보다 큰 경우는 비대칭(skew-symmetric) 비틀림 모드가 대부분이므로 이들의 기여도는 거의 없음을 알 수 있다. Fig. 2는 1.8 kHz에서의 변형 형상(operating deflection mode)이며 가진주파수가 3차 모드($n=1, m=3$)에 비교적 근접하므로 3차모드의 영향이 지배적이다. Fig. 3은 평판의 중심 부근($x=5.2851$ mm, $y=1.27$ mm)에서의 가진주파수 변화에 따른 응답을 도시한 그림이다. ANSYS 해석결과와 비교하면 응답 크기의 최대 오차는 1700 Hz 이상에서 3% 이내이며, 1700 Hz 이하에서는 8% 이내이다. 고유진동수 부근으로 갈수록 결과의 차이는 발생하나 이 해석 결과는 댐핑이 없는 상황에서 수행되었으며, 댐핑을 고려할 경우 이 차이는 감소할 것으로 예측된다.

수렴성을 검증하기 위해 식 (14)를 구성하는 방정식의 개수가 증가하는 경우의 평판의 중간 위치에서의 해를 고찰하였다. 여러 번의 시뮬레이션 결과, Fig. 4와 같이 방정식의 수가 증가할수록 수렴함을 확인할 수 있다. 대략 500개 정도의 방정식이면 충분한 정도로 수렴함을 알 수 있으나, 방정식의 수가 10개 이내인 경우에도 최종 수렴하는 해에 비하여



(a) ANSYS



(b) Suggested

Fig. 2 Comparison of the two operating deflections subjected to 1.8 kHz uniform distributed load

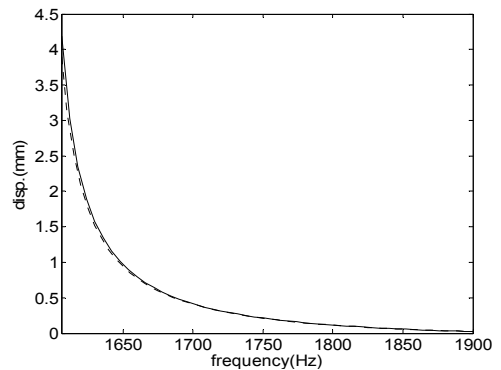


Fig. 3 Harmonic response at the center node(solid : ANSYS, dotted : suggested)

1% 이내의 미소한 차이가 발생한다.

4.3 선 하중이 작용하는 경우

평판의 특정 지점($x=x^*$)에서 선 하중(line load)이

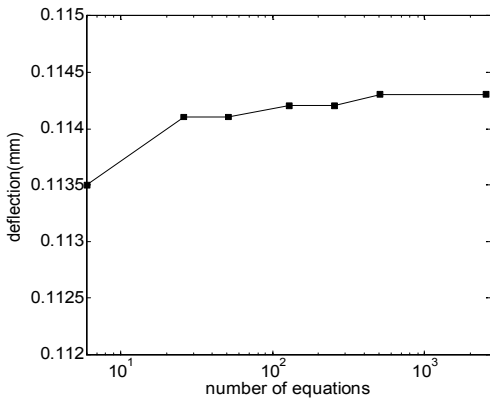


Fig. 4 Variation of the deflection with respect to number of equations

작용하는 경우, 식 (13)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

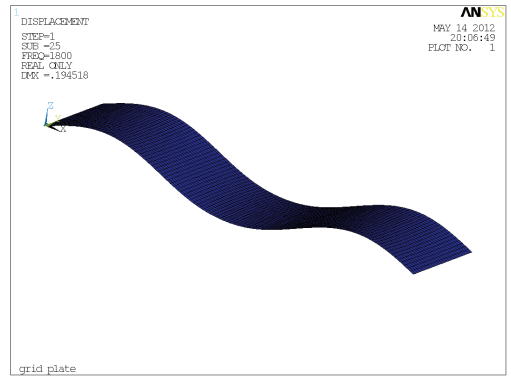
$$f_i = p(x^*, y_i) \sin \frac{m\pi x^*}{a} \quad (16)$$

작용하는 선 하중이 50 N/mm인 경우, Fig. 5는 1.8 kHz에서의 변형 형상이다. 중심선(x=5.2851 mm)에서만 선 하중이 작용하므로 중심에서의 변형이 지배적임을 알 수 있으며 ANSYS의 해석 결과와 근사함을 알 수 있다. 또한 변형형상이 Fig. 2와 근사함을 알 수 있으며, 따라서 이 경우에도 각 모드별 미정계수는 Table 1과 유사하게 n이 1인 경우가 지배적임을 알 수 있다.

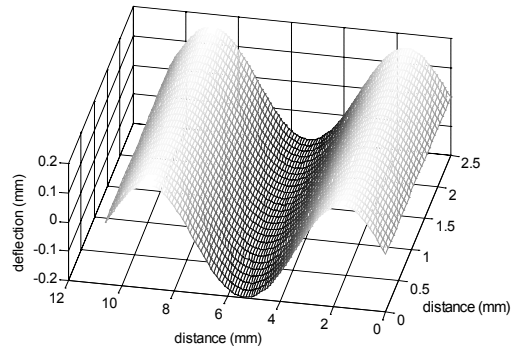
Fig. 6은 평판의 중심 부근(x=5.2851 mm, y=1.27 mm)에서의 가진주파수 변화에 따른 응답을 도시한 그림이며, ANSYS 해석결과와 비교하면, 상기 예제와 마찬가지로, 응답 크기의 최대 오차는 2% 이내이다.

4.4 제약조건

양변이 자유단인 방향과 평형을 이루는 선 하중(line load)이 작용하는 경우 및 점 하중(point load)이 작용하는 경우는 이 방법의 적용에 제약이 있다. 이것은 이 방법의 근간을 이루는 유한개의 대수 방정식으로 구성된 계의 해를 결정하는 문제와 관련이 있기 때문이다. 이러한 하중이 작용하는 경우 식 (14)의 우변을 구성하는 하중의 성분이 특정 위치에서만 값을 갖고 나머지는 0이기 때문이다. 즉, 방정식의



(a) ANSYS



(b) Suggested

Fig. 5 Comparison of the two operating deflections subjected to 1.8 kHz uniform line load

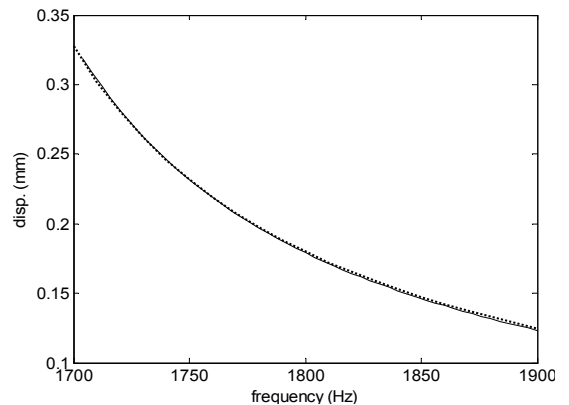


Fig. 6 Harmonic response at the center node(solid : ANSYS, dotted : suggested)

수가 아무리 증가하여도 힘 벡터의 특정 요소를 제외한 모든 요소는 항상 0이 되며, 자유단에 선 하중이 작용하는 경우 식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_{k11} & C_{k12} & \cdots & C_{k1n} \\ C_{k21} & C_{k22} & \cdots & C_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{kr1} & C_{kr2} & \cdots & C_{krn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{k1} \\ Q_{k2} \\ \vdots \\ Q_{kn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

따라서 방정식의 수가 증가할수록 식 (17)의 계수 행렬의 크기(norm)가 증가하나, 힘 벡터의 크기는 항상 같음을 알 수 있다.

행렬 및 벡터의 크기의 성질로부터 식 (17)은 다음의 부등식을 만족한다.

$$\left\| \begin{Bmatrix} Q_{k1} \\ Q_{k2} \\ \vdots \\ Q_{kn} \end{Bmatrix} \right\| \leq \|f_n\| \left\| \begin{bmatrix} C_{k11} & C_{k12} & \cdots & C_{k1n} \\ C_{k21} & C_{k22} & \cdots & C_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{kr1} & C_{kr2} & \cdots & C_{krn} \end{bmatrix}^{-1} \right\| = c \|f_n\| \left\| \begin{bmatrix} C_{k11} & C_{k12} & \cdots & C_{k1n} \\ C_{k21} & C_{k22} & \cdots & C_{k2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{kr1} & C_{kr2} & \cdots & C_{krn} \end{bmatrix} \right\|^{-1} \quad (18)$$

여기서 c 는 계수행렬의 조건수(condition number)이며, 계수행렬 및 그 역행렬의 크기의 비(ratio)이다⁽²¹⁾. 조건수의 변화량이 미미할 경우, 계수행렬의 크기는 방정식의 수에 비례하여 작아짐을 알 수 있다. 따라서 미정계수는 수렴하지 않으며 유일한 값으로 결정할 수 없음을 알 수 있다.

5. 결 론

이 연구는 서로 마주보는 두 변이 자유단이고 다른 두 변이 단순지지된 Lévy 사각 평판에 대한 조화 가진에 의한 응답을 구하는 방법에 대해 논하였다. 모든 모드들이 서로 직교하는 경우의 운동방정식은 매우 단순하게 표현될 수 있으므로 구조물의 응답을 구하기가 수월하나, 상술한 경계조건인 사각 평판의 모드는 전 영역에 대해 서로 직교하지 않으므로 모드 중첩법을 이용한 강제운동의 해석은 사실상 어렵다. 따라서 이 연구에서는 미정계수의 추정을 통한 근사해를 구하는 방법에 대하여 논하였다.

즉 모드해석을 통한 평판의 모드를 구한 후, 특정 외력을 받는 평판에 대한 유한개의 대수 방정식을 수립한 후 모드별 가중치의 최적해를 구하였다. 제안된 방법의 적합성을 보이고자 평판 전체에 균일한 힘이 가해지는 경우에 대한 해를 구하였고, 상용 코드인 ANSYS의 해석결과와 비교하였으며 특정 주파수 구간에서 오차의 범위가 3% 이내임을 확인하였다. 이 논문은 댐핑이 없는 상황을 전제로 시물레이션을 수행하였으나, 고유진동수 부근에서도 상용 소프트웨어의 결과와 매우 근사함을 알 수 있다. 실제 구조물은 항상 댐핑이 존재하므로 제시한 방법은 실제구조물의 고유진동수에서도 충분히 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있을 것으로 예측된다.

양변이 자유단인 방향과 평형을 이루는 선 하중(line load)이 작용하는 경우 및 점 하중(point load)이 작용하는 경우, 이 방법의 적용은 제한이 있음을 논하였다. 이것은 하중이 국부적으로 작용하는 경우에도 이 방법을 이용한 응답의 결정은 많은 오차를 내포할 수 있음을 의미하며, 이러한 종류의 하중이 작용하는 경우에 대한 논의는 추가적인 연구가 필요하다.

References

- (1) Venstel, E. and Krauthammer, T., 2001, *Thin Plates and Shells*, Marcel Dekker Inc.
- (2) Yu, Y. Y., 1996, *Vibrations of Elastic Plates*, Springer.
- (3) Youn, J. O. and Lee, J. M., 1996, Double Fourier Sine Series Method for the Free Vibration of a Rectangular Plate, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 6, No. 6, pp. 771~779.
- (4) Hur, S. C. and Yoo, H. H., 2000, Dynamic Modeling and Vibration Analysis of Rotating Plate Structures with Stiffeners, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 10, No. 2, pp. 312~318.
- (5) Kim, J. O. and Moo, B. H., 2001, Flexural Vibration of a Rectangular Plate with Orthotropically and Harmonically Varying Material Properties, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 323~328.

(6) Lee, Y. S. and Choi, M. H., 1999, A Study on the Vibration Characteristics of Steel and Plain Weave Composite Cylindrical Shells Combined with Internal Plate Structures, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 9, No. 1, pp. 149~162.

(7) Oh, J. E. and Rhee, D. I., 1997, A Free Vibration Analysis of Sound-structure Interaction Plate Having a Small Cut-out, Transactions of the KSME(A), Vo. 21, No. 10, pp. 1666~1673.

(8) Lee, K. H., Lim, G. T. and Wang, C. M., 2002, Thick Levy Plates Re-visited, Int. J. Solids and Structures, Vol. 39, No. 1, pp. 127~144.

(9) Lee, J. and Lee, U., 1998, Vibration Analysis of the Plates Subject to Dynamic Concentrated Loads by Using Spectral Element Method, Transactions of the KSME(A), Vol. 22, No. 3, pp. 635~643.

(10) Lee, J. H. and Lee, K. H., 1996, The Reduction of Harmonic Dynamic Response of Plate Structure Using Continuum Design Sensitivity Analysis, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 6, No. 1, pp. 27~34.

(11) Doyle, J. F., 1997, Wave Propagation in Structures, Springer.

(12) Soedel, W., 1993, Vibrations of Shells and Plates, Marcel Decker Inc.

(13) Kulla, P. H., 1997, High Precision Finite Elements, Finite element in Analysis and Design, Vol. 26, No. 2, pp. 997~114.

(14) Xiang, Y., Zhao, Y. B. and Wei, G. W., 2002, Lévy Solutions for Vibration of Multi-span Rectangular Plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 44, No. 6, pp. 1195~1218.

(15) Xiang, Y. and Wei, G. W., 2004, Exact Solutions for Buckling and Vibration of Stepped

Rectangular Mindlin plates, International Journal of Solids and Structures, Vol. 41, No. 1, pp. 279~294.

(16) Marynowski, K., 2010, Free Vibration Analysis of the Axially Moving Lévy-type Viscoelastic Plate, European J. Mechanics-A/Solids, Vol. 29, No. 5, pp. 879~886.

(17) Thai, H. T. and Kim, S. E., 2012, Lévy-type Solution for Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Based on Two Variable Refined Plate Theory, Applied Mathematical Modelling, Vol. 36, No. 8, pp. 3870~3882.

(18) Lellep, J. and Kägo, E., 2011, Vibrations of Elastic Stretched Strips with Cracks, Intl. J. of Mechanics, Vol. 5, No. 1, pp. 27~34.

(19) Leissa, A. W., 1973, The Free Vibration of Rectangular Plate, J. Sound & Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257~293.

(20) Ryu, J. Y., Eom, K. B., Jeon, S. Y. and Suh, J. M., 2012, An Analysis on the Flow Induced Vibration Characteristics of Protective Grids in Nuclear Fuel Assembly, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 739~740.

(21) Noble, B. H. and Daniel, J. W., 1988, Applied Linear Algebra, Prentice-Hall.



N.G. Park is managing Fuel Performance Testing Section in KEPCO Nuclear Fuel since 2012. He received Ph.D. in mechanical engineering from Korea Advanced Institute of Science & Technology in 2002. His job is to develop mechanical methodologies to evaluate nuclear fuel integrity.