

## 저 레이놀즈수에 적용 가능한 가상경계기법

박 현 옥, 이 창 훈, 최 정 일\*

연세대학교 계산과학공학과

### AN IMMersed BOUNDARY METHOD FOR LOW REYNOLDS NUMBER FLOWS

Hyun Wook Park, Changhoon Lee and Jung-il Choi\*

Dept. of Computational Science & Engineering, Yonsei Univ.

*We develop a novel immersed boundary (IB) method based on implicit direct forcing scheme for incompressible flows. The proposed IB method is based on an iterative procedure for calculating the direct forcing coupled with the momentum equations in order to satisfy no-slip boundary conditions on IB surfaces. We perform simulations of two-dimensional flows over a circular cylinder for low and moderate Reynolds numbers. The present method shows that the errors for estimated velocities on IB surfaces are significantly reduced even for low Reynolds number with a fairly large time step while the previous methods based on direct forcing failed to provide no-slip boundary conditions on IB surfaces.*

**Key Words :** 가상경계기법(Immersed Boundary Method), 내재 직접 가진(Implicit Direct Forcing), 저 레이놀즈수(Low Reynolds Number), 점착조건(No-slip Condition)

### 1. 서 론

가상경계기법은 물체 표면 주위의 격자점에 가진항을 첨가하여 간접적으로 물체 표면에 점착조건을 부여하는 방법이며, 복잡한 물체 및 이동하는 물체 주위의 유동을 고정된 직각좌표계에서 구현 가능하다는 장점을 지니고 있다. 가상경계기법은 1972년 Peskin[1]에 의해 처음 개발되었으며, 심장 내부 유동의 해석에 사용되었다. 초기 Peskin이 사용한 가상경계기법은 연속가진법(continuous forcing)으로서 탄성체 주위의 유동 해석에 주로 사용되었으며, 가진항은 물체의 탄성력을 이용하여 계산되었다. 이후 강체 주위의 유동 계산을 위해 Goldstein et al.[2]의 피드백(feedback) 가진법, Fadlun et al.[3]의 이산(discrete) 가진법 등 여러 종류의 가상경계기법이 개발되었다. 그 중 2005년 Uhlmann[4]에 의해 제시된 직접가진(direct forcing, DF) 기법은 이산 가진법의 한 종류이며, 가진항은 차분된 Navier-Stokes 방정식으로부터 직접 구해진다. DF 기법은

사용절차가 매우 간단하며 수치적으로 안정적(stable)이라는 장점을 가지고 있다. 하지만 Uhlmann의 DF 기법은 물체 표면에서의 점착조건을 완벽히 만족시키지 못한다는 결과가 여러 차례 보고되었으며, 이를 보완하기 위해 Wang and Fan[5], Kempe and Fröhlich[6]이 다중직접가진(multi-direct forcing, MDF) 기법을 제시하였다. MDF 기법은 한 계산시간 구간 내에서 반복계산을 통해 속도장을 여러 번 수정하여 물체 표면에서 점착조건을 만족시키는 방법이다. 반복계산은 간단한 대수방정식의 해를 구함으로써 진행되기 때문에 추가적인 계산량은 미비하며, 물체 표면에서 DF 기법보다 더 높은 정확도로 점착조건을 만족시키게 된다. 하지만 본 연구에서는 MDF 기법 또한 낮은 Reynolds 수의 경우 물체 표면에서 점착조건을 완벽히 만족시킬 수 없다는 것을 확인하였다. 따라서 본 논문에서는 낮은 Reynolds 수에서도 적용 가능한 내재 직접 가진(implicit direct forcing, IDF)기법을 제시하였다. IDF 기법은 반복계산을 통해 물체 표면에서의 점착조건을 만족시킨다는 점에서는 MDF 기법과 유사하지만, 반복계산 시 대수방정식이 아닌 시스템 방정식의 해를 구하여 가진항이 수정되는 차이점을 가지고 있다. 본 논문에서는 DF, MDF, IDF 기법의 알고리즘의 차이를 설명하였다. 또한 결과에서는 본 연구에서 개발된 IDF 기법의 검증과 더불어 Reynolds 수와 CFL 수에 따른 각 기법들의 결과들을 비교하였다.

Received: July 2, 2013, Revised: September 2, 2013,

Accepted: September 2, 2013.

\* Corresponding author, E-mail: jic@yonsei.ac.kr

DOI http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2013.18.3.034

© KSCFE 2013

## 2. 수치해석 기법

### 2.1 지배방정식

무차원화된 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

여기서  $u$ 는 유체 속도벡터,  $p$ 는 압력,  $f$ 는 가진항(forcing)을 나타내며,  $Re$ 는 Reynolds 수이다.

지배방정식의 공간 차분은 2차 정확도를 갖는 중심차분법(centered difference scheme)이 사용되었으며, 시간적분은 대류항에 대해 2차 Adams-Bashforth 기법이, 점성항에 대해 Crank-Nicholson 기법이 사용되었다.

식 (1)과 (2)는 pressure-velocity decoupling procedure[7]를 이용하여 다음과 같이 4단계로 진행되어 계산된다.

$$Au^* = r^n + mbc + f^{n+1/2} \quad (3)$$

$$\Delta t DG\phi = Du^* - cbc \quad (4)$$

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t G\phi \quad (5)$$

$$p^{n+1/2} = \phi + \frac{\Delta t}{2Re} \nabla^2 \phi \quad (6)$$

여기서, 시스템행렬(system matrix,  $A$ ), 잔여벡터(residual vector,  $r$ )는 다음과 같이 정의된다.

$$A = \frac{1}{\Delta t} \left\{ I - \Delta t \frac{1}{2Re} L \right\} \quad (7)$$

$$r^n = \frac{1}{\Delta t} u^n + \frac{1}{2Re} Lu^n + \frac{1}{2} (3N^n - N^{n-1}) \quad (8)$$

또한  $N, L, G, D$ 는 각각 차분된 대류항(convective), 점성항(viscous), 구배(gradient), 와 발산(divergence) 연산자를 나타낸다.  $u^{n+1}$ 은 식 (3)-(6)을 통해 계산된 최종속도이며,  $u^*$ 는  $u^{n+1}$ 와  $u^n$  사이의 중간속도(intermediate velocity)이다 또한  $\phi$ 는 중간압력(pseudo-pressure)를 의미한다. 또한 식 (3)과 (4)의  $mbc$ 와  $cbc$ 는 경계조건에 의해 발생하는 항을 나타낸다. 식 (4)의 Poisson 방정식을 계산하기 위해 예조전화(Pre-conditioned) BiCGStab[8] 기법이 사용되었다.

### 2.2 가상경계기법

고정된 직교좌표계에서 임의형상 물체 주위의 유동을 해석

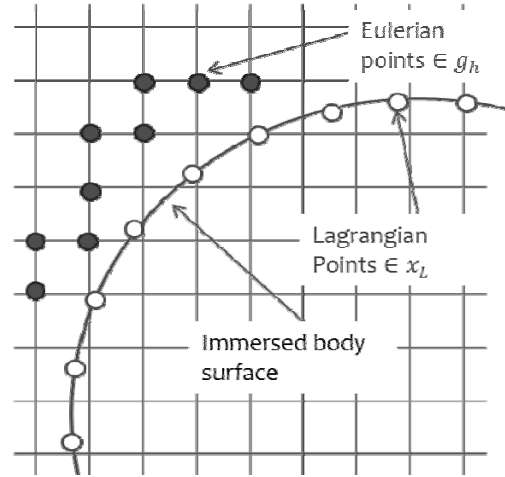


Fig. 1 Eulerian and Lagrangian points in the present immersed boundary method

하기 위해 가상경계기법이 사용되었다. Fig. 1과 같이, 고정된 직교좌표계 위의 점인 Eulerian 격자점과 물체표면(immersed surface) 위의 점인 Lagrangian 격자점과 같이 두 종류의 격자점이 존재하며, 두 격자점 사이의 정보교환을 위해 델타(delta) 함수가 사용되었다. 본 연구에서는 저 레이놀즈수에 적용 가능한 새로운 가상경계기법 알고리즘을 개발하였으며, 이를 Uhlmann[4]에 의해 제시된 직접가진(DF) 및 Wang and Fan[5], Kempe and Fröhlich[6]에 의해 제시된 다중직접가진(MDF) 기법과 비교하였다.

#### 2.2.1 직접가진(Direct forcing)

직접가진 기법의 가진항을 구하는 절차는 다음과 같다.

$$u^{**} = u^n + r^n \Delta t \quad (9)$$

$$U^{**}(X_l) = \sum_{x \in g_h} u^{**} \delta_h(x - X_l) h^2 \quad (10)$$

$$F^{n+1/2} = \frac{U^{(d)} - U^m}{\Delta t} \quad (11)$$

$$f^{n+1/2} = \sum_{l=1}^{N_l} F^{n+1/2}(X_l) \delta(x - X_l) \Delta V_l \quad (12)$$

먼저 식 (9)를 통해 가진항이 고려되지 않을 때의 2차 중간속도  $u^{**}$ 를 완전외재법으로 구하게 되며, 이를 이용하여 식 (10)에서 Lagrangian 격자점에서의 2차 중간속도  $U^{**}$ 를 구하게 된다. 식 (11)에서  $U^{(d)}$ 는 물체 표면에서의 유체속도(desired velocity)이며, 점착조건으로 물체 표면의 속도와 같다. 물체 표면에서 점착조건을 만족시키기 위한 가진항은 식 (11)과 같이 구해진다. Eulerian 격자점에서의 가진항은 식 (12)에

서와 같이 Lagrangian 격자점에서의 가진항을 외삽시켜서 구해진 뒤, 식 (3)에 대입된다. 이때 식 (12)의  $\Delta V_l$ 은 Lagrangian 격자점에서 가진항이 가해지는 미소체적(면적)을 나타내며, Eulerian 격자점에서의 미소체적(면적)과 같은 값을 갖는다[4].

### 2.2.2 다중직접가진(Multi-direct forcing)

직접가진기법은 복잡한 물체주위 유동을 간단한 직각좌표계 위에서 간단히 구현할 수 있다는 장점을 지니고 있다. 하지만 Wang and Fan[5]과 Kempe and Fröhlich[6]은 DF기법 적용시 물체 표면에서 점착조건을 정확히 부여할 수 없다는 것을 언급하였으며, 이를 보완하기 위해 다중직접가진(MDF) 기법을 제안하였다. MDF 기법은 DF 기법에 의해 발생한 오차를 반복계산을 통해 수정해 나가는 과정이며, 구체적인 절차는 다음과 같다.

먼저, 식 (12)의 가진항을 식 (3)에 대입하여 중간속도  $u^*$ 를 계산하며, 이를 Lagrangian 격자점으로 이동시킨다.

$$U^*(X_l) = \sum_{x \in g_h} u^* \delta_h(x - X_l) h^2 \quad (13)$$

이때 Lagrangian 격자점에서의 중간속도와 물체표면 유체속도  $U^{(d)}$ 와의 차이를 이용하여 물체 표면에서의 가진항을 다시 정의하게 된다.

$$F_k^{n+1/2} = \frac{U^{(d)} - U^*}{\Delta t} \quad (14)$$

구해진 Lagrangian 격자점에서의 가진항을 다시 Eulerian 격자점으로 이동시킨 뒤, 이를 이용하여 Eulerian 격자점에서의 중간속도를 수정하게 된다.

$$f_k^{n+1/2} = \sum_{l=1}^{N_l} F_k^{n+1/2}(X_l) \delta(x - X_l) \Delta V_l \quad (15)$$

$$u_k^* = u_{k-1}^* + \Delta t f_k^{n+1/2} \quad (16)$$

식 (16)을 통해 수정된 중간속도는 식 (13)을 이용하여 다시 Lagrangian 격자점으로 보내지며, 점착조건이 만족할 때까지 식 (13)-(16)의 과정이 반복되게 된다. 이때 하첨자 k는 반복계산을 통해 수정된 횟수를 나타낸다. 반복계산이 끝난 뒤, 수정된 중간속도는 식 (4) 및 이후 과정에 사용되게 된다.

### 2.2.3 내재직접가진(Implicit direct forcing)

MDF 기법은 DF 기법에서 발생한 물체 표면에서의 오차를

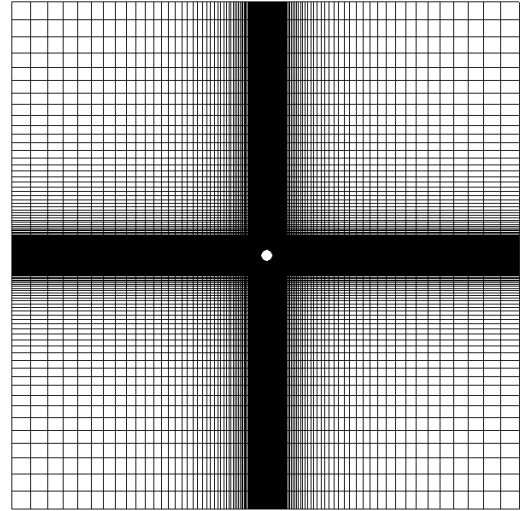


Fig. 2 Computational domain for simulation of flow around a fixed circular cylinder

쉽게 보완할 수 있다는 장점을 지니고 있다. 하지만, MDF 기법도 Reynolds 수가 낮은 계산의 경우 DF 기법과 유사하게 물체 표면에서 큰 오차를 유발하게 된다. 따라서 본 논문에서는 낮은 Reynolds 수에서도 적용 가능한 내재직접가진(IDF) 기법을 제안하였다. IDF 기법은 반복계산을 통하여 직접가진 이후의 오차를 수정한다는 점에서 MDF 기법과 유사하지만, 중간속도  $u^*$ 를 수정하는 과정에서 차이를 나타낸다. 식 (13)을 통해 Lagrangian 격자점에서의 중간속도를 구한 뒤, 이를 이용하여 Eulerian 격자점에서의 가진항과 중간속도를 다음과 같이 수정한다.

$$\Delta F = \frac{U^{(d)} - U^*}{\Delta t} \quad (17)$$

$$f_k^{n+1/2} = f_{k-1}^{n+1/2} + \sum_{l=1}^{N_l} \Delta F(X_l) \delta(x - X_l) \Delta V_l \quad (18)$$

$$Au_k^* = r^n + mbc + f_k^{n+1/2} \quad (19)$$

식 (19)에서와 같이 시스템 방정식을 직접 계산하여 중간속도  $u^*$ 를 수정하게 되며, 이는 식 (16)에서와 같이 간단한 대수방정식을 이용하는 MDF 기법과 확연한 차이를 나타낸다. MDF 기법과 유사하게, Lagrangian 격자점에서 점착조건이 만족할 때 까지 식 (13), (17), (18), (19)을 반복하여 계산하게 된다. IDF 기법은 반복계산 시 식 (19)의 시스템 방정식을 계산해야 하기 때문에 MDF 기법보다 더 많은 계산량이 요구된다. 하지만 이후 계산 결과 비교를 통해 낮은 Reynolds 수의 경우 IDF 기법이 MDF 기법 보다 매우 정확한 결과를 보여준다.

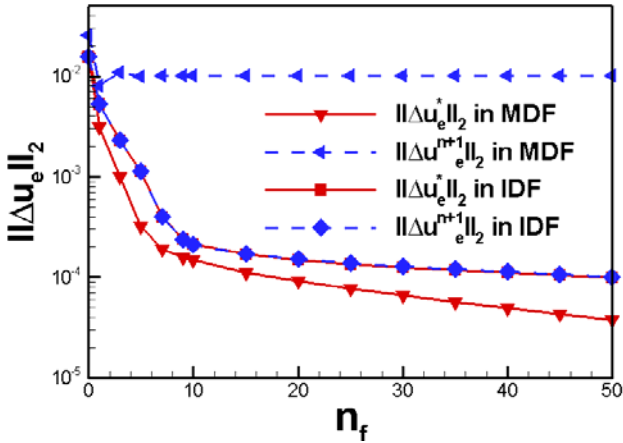


Fig. 3 Intermediate and final velocity errors depending on  $n_f$

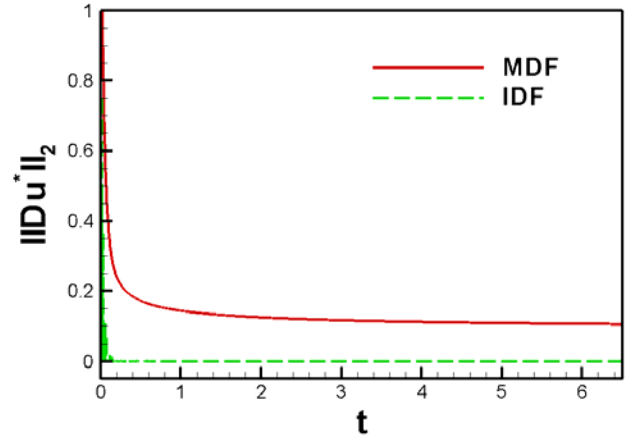


Fig. 4 Time history of divergence of  $u^*$

### 3. 결 과

#### 3.1 2차원 균일 유동 내의 원형 실린더 주위 유동

본 연구에서 개발된 IDF 기법의 검증 및 다른 기법들과의 결과 비교를 위해 2차원 균일 유동 내의 실린더 주위의 유동 해석을 수행하였다. 계산영역은 지름이  $D$ 인 원형 실린더에 대해서  $40D \times 40D$ 로 설정하였으며, Fig. 2에서와 같이  $160 \times 160$  격자가 비균일하게 분포되어 있다. 계산영역 중앙의 실린더 주위에는 격자가 균일하게 분포되어 있으며, 실린더 지름  $D$ 에 대해 40개의 격자가 사용되었다. 입구 경계조건은  $u = 1, v = 0$ 으로 부여하였으며, 위, 아래 경계면에서는 원거리 (far-field) 경계조건으로서  $u = 1, \partial v / \partial y = 0$ 을 사용하였다. 출구에서는  $\partial u / \partial x = 0, \partial v / \partial x = 0$ 의 Neumann 경계조건이 주어졌다. Reynolds 수는  $u_\infty D / \nu$ 로 정의되었으며,  $u_\infty$ 는 원거리 속도를 나타낸다. 또한 CFL 수는  $u_\infty \Delta t / \Delta x_{\min}$ 로 정의되었으며,  $\Delta x_{\min}$ 은 계산영역 내에서 가장 작은 격자간격을 의미한다.

##### 3.1.1 반복계산 횟수에 의한 계산 결과

MDF, IDF 기법의 반복계산 횟수( $n_f$ )에 따른 계산 결과를 살펴보았다. 계산에 사용된  $Re = 40, CFL = 0.1$ 이다. Fig. 3은 MDF, IDF 기법의  $n_f$ 에 대한 물체 표면에서의 중간속도 오차  $\| \Delta u_e^* \|_2$  및 최종속도 오차  $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$ 를 나타낸 그래프이다. 중간속도 오차 및 최종속도 오차는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta u_e^* = (U^* - U^{(d)}) / u_\infty \quad (20)$$

$$\Delta u_e^{n+1} = (U^{n+1} - U^{(d)}) / u_\infty \quad (21)$$

여기서  $U^*, U^{n+1}$ 은 각각 Lagrangian 격자점에서의 중간속도  $u^*$ , 최종속도  $u^{n+1}$ 를 의미한다. Fig. 3에서와 같이 MDF 기법은  $n_f$ 를 증가시킬수록 중간 속도오차는 감소하는 반면 최종속도 오차는 감소하다가  $n_f \geq 5$ 에서 일정한 값으로 수렴하게 된다. 반면 IDF 기법은  $n_f$ 를 증가시킬수록 중간속도 오차와 최종속도 오차 모두 유사한 형태로 감소하였다. 이는 가상경계기법의 중간속도  $u^*$ 의 발산(divergence)의 차이에 의해서 설명될 수 있다. 식 (5)의 과정에서 중간속도  $u^*$ 의 발산(divergence)이 압력보정을 통해 제거되며, 무발산(divergence free) 속도장  $u^{n+1}$ 을 얻게 된다. 이 과정에서 만약  $u^*$ 의 발산이 클 경우  $u^*$ 와  $u^{n+1}$ 의 차이가 증가된다. Fig. 4는 MDF, IDF 기법의 시간에 따른  $u^*$ 의 발산의 크기( $\| Du^* \|_2$ )를 나타내며, MDF 기법의 값이 IDF 기법의 값보다 더 크게 나타나는 것을 알 수 있다. 즉, MDF 기법에 의해 구해진 가진항은  $u^*$ 의 물체 표면에서 점착조건을 만족시키지만 물체주위의  $u^*$ 의 발산 또한 증가시키게 된다. 따라서 식 (5)의 과정에서  $u^*$ 와  $u^{n+1}$ 의 차이가 발생하게 되며,  $u^{n+1}$ 의 점착조건 정확도가 낮아지게 되는 것이다. 하지만 IDF 기법의 경우 식 (19)의 반복계산 과정이 중간속도  $u^*$ 의 발산을 증가시키지 않기 때문에 식 (5)의 영향이 크지 않아  $u^*$ 와  $u^{n+1}$ 가 유사한 값을 갖게 된다. 본 연구에서는 계산의 효율성을 위해 IDF의 중간 및 최종속도 오차 감소량이 미비해지기 시작하는  $n_f = 10$ 으로 고정하여 계산을 진행하였다.

##### 3.1.2 가상경계기법 검증

IDF 기법을 포함한 3종류의 가상경계기법의 검증을 위해  $Re = 1, 40, 200$ 에서의 실린더 주위의 계산을 수행하였다. 계산에 사용된  $CFL = 0.1$ 이며, IDF와 MDF 기법의  $n_f = 10$ 로 고정

되었다. Table 1을 통해 각 기법의  $Re$  수에 따른 항력, 양력 계수 및 Strouhal 수를 비교하였다. Choi et al.[9]의 결과는 이산가진 기법을 사용하여 계산된 결과이며, Fornberg[10]와 Rosenfeld et al.[11]의 결과는 body fitted mesh를 사용하여 계산된 결과이다. Table 1을 통해 3종류의 가상경계기법 모두 타 논문과 유사한 결과를 나타낸 것을 확인할 수 있다. DF, MDF 기법의  $Re=200$ 일 때 항력계수의 과도예측은 Uhlmann[4]의 논문에 언급된 결과와 유사하며, 계산영역의 제한에 따른 점성영역의 강제 축소에 의한 것으로 판단된다.

3.1.3 Reynolds 수에 따른 유동해석 결과

IDF 기법을 포함한 3종류의 가상경계기법을 이용하여 Reynolds 수에 따른 시뮬레이션 결과를 비교하였다. CFL=0.1로 고정되었으며, MDF, IDF 기법의  $n_f = 10$ 로 고정되었다. Fig. 4는 각 가상경계기법에 대해  $Re$  수에 따른 원통 표면에서의 최종속도 오차( $\Delta u_e^{n+1}$ )를 나타낸 그래프이다. 여기서  $\theta$ 는 물체 표면의 중심각도이며,  $\theta = 0$ 일 때 정체점(Stagnation point)를 나타낸다. Fig. 5를 통해 DF 기법과 MDF 기법의 경우 정체점에서 최종속도 오차가 가장 큰 것을 확인할 수 있으며,  $Re$  수가 감소할수록 표면의 최종속도 오차가 커지는 것을 알 수 있다. 하지만 IDF 기법은 물체 표면을 따라 최종속도 오차가 고르게 분포되어 있으며, 오차의 크기가 DF, MDF기법보다 작게 나타난 것을 알 수 있다. 이에 대한 정량적인 비교는 Table 2에 기재되어 있다. 앞선 결과와 마찬가지로, DF, MDF, IDF 기법 모두  $Re$  수가 감소할수록 최종속도 오차의 크기( $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$ )가 증가하지만, IDF의 경우  $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$ 가 다른 두 기법보다 약 10배 가까이 작은 것을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 MDF, IDF 기법에서 반복

Table 1 Drag, lift coefficients and Strouhal number

|                      | Re=1  | Re=40 | Re=200     |       |       |
|----------------------|-------|-------|------------|-------|-------|
|                      | $C_D$ | $C_D$ | $C_D$      | $C_L$ | St    |
| Choi et al.[9]       | -     | 1.52  | 1.36±0.048 | ±0.64 | 0.191 |
| Fornberg[10]         | -     | 1.50  | -          | -     | -     |
| Rosenfeld et al.[11] | -     | -     | 1.31±0.040 | ±0.65 | 0.20  |
| Panton[12]           | 11.52 | -     | -          | -     | -     |
| DF                   | 11.21 | 1.62  | 1.49±0.045 | ±0.61 | 0.194 |
| MDF                  | 11.65 | 1.61  | 1.45±0.045 | ±0.67 | 0.192 |
| IDF                  | 12.00 | 1.60  | 1.38±0.046 | ±0.69 | 0.192 |

Table 2 Comparison of velocity errors  $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$  at the immersed boundary surface for different Reynolds numbers

|     | Re=1     | Re=20    | Re=40    |
|-----|----------|----------|----------|
| DF  | 1.26E-01 | 2.88E-02 | 2.34E-02 |
| MDF | 3.19E-02 | 1.04E-02 | 9.30E-03 |
| IDF | 3.86E-03 | 1.20E-04 | 1.03E-04 |

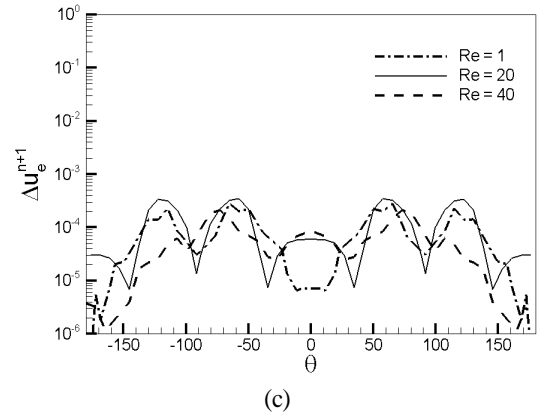
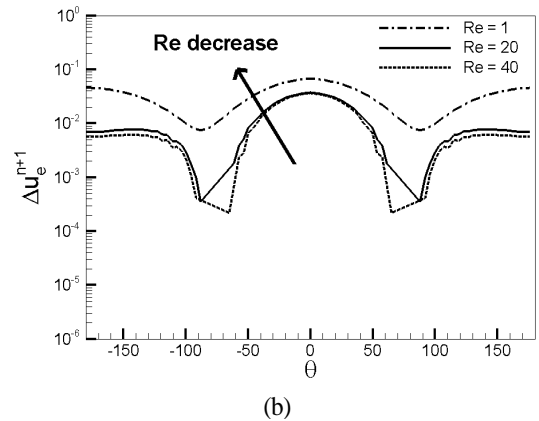
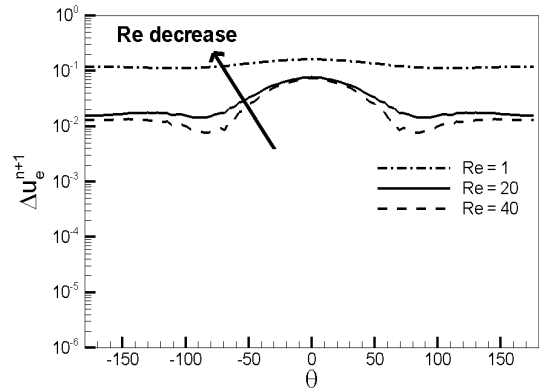


Fig. 5 The effects of forcing methods on the velocity error  $\Delta u_e^{n+1}$  for different  $Re$  number (a) DF (b) MDF (c) IDF

계산중  $u^*$ 가 수정되는 과정을 통해 설명될 수 있다. IDF의 경우 식 (19)를 통해 점성항( $\Delta t \frac{1}{2Re} L$ )이 포함된 시스템행렬 A를 이용하여  $u^*$ 를 수정하게 된다. 반면 MDF의 경우 식 (16)을 통해  $u^*$ 가 수정되는 과정에서 점성항에 대한 고려가 전혀 이뤄지지 않는다. Reynolds 수가 작아질수록 모멘텀 방정식에서 점성항의 비중이 커지게 되는데, MDF의 경우

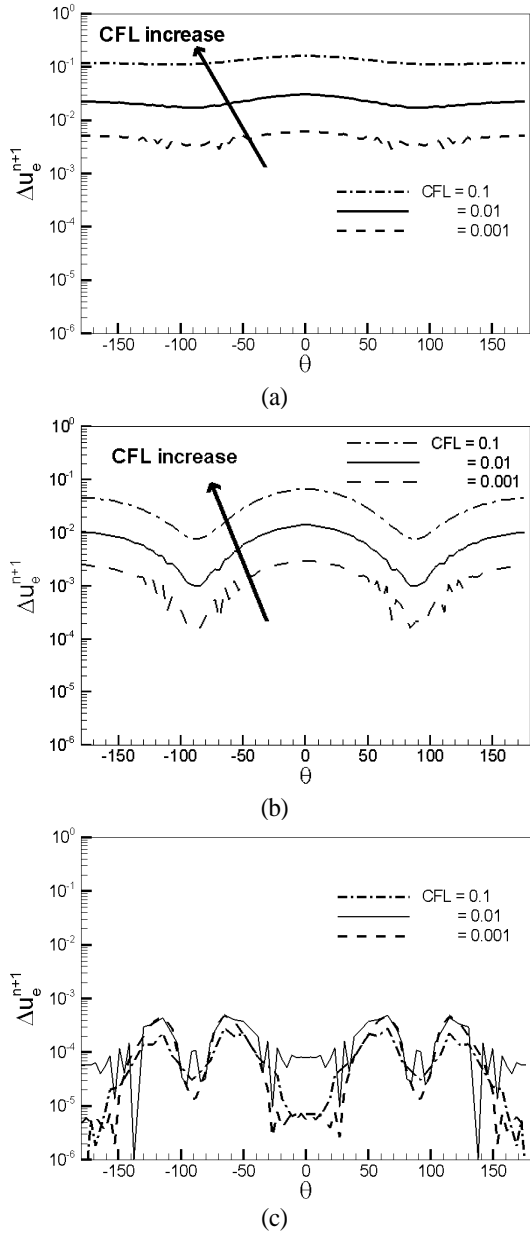


Fig. 6 The effects of forcing methods on the velocity error  $\Delta u_e^{n+1}$  for different CFL number (a) DF (b) MDF (c) IDF

이를 반영하지 않기 때문에 작은 Reynolds 수의 경우 큰 오차가 발생하게 되는 것이다.

3.1.4 CFL 수에 따른 유동해석 결과

본 절에서는 CFL 수에 따른 각 가상경계기법의 결과를 비교하였다. 계산에 사용된  $Re = 1$ 이며, MDF와 IDF 기법의 경우  $n_f = 10$ 로 고정되었다. Fig. 6은 각 가상경계기법에 대해 CFL 수에 따른 물체 표면에서의 최종속도 오차를 나타낸 것이다. Fig. 6에서와 같이 DF, MDF 기법의 경우 CFL 수가 감

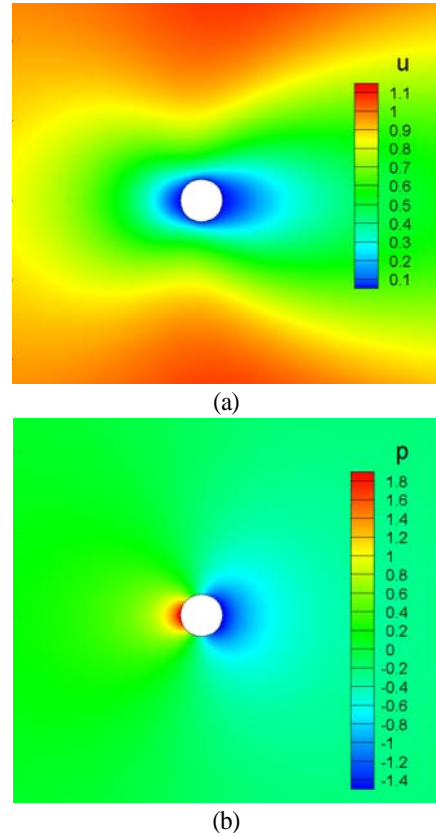


Fig. 7 The contour plots of (a) u-velocity and (b) pressure at  $Re = 1$  using IDF method

소할수록 최종속도 오차가 감소하지만, IDF 기법은 CFL 수에 의해서 최종속도 오차가 크게 변하지 않는다. 이에 대한 정량적인 값은 Table 3을 통해 확인할 수 있다. Table 3에서와 같이 CFL 수가 커질수록 DF, MDF, IDF 기법 모두 최종속도 오차의 크기 ( $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$ )가 증가하게 된다. 하지만 IDF 기법의 최종속도 오차의 크기가 의 다른 두 기법보다 매우 작은 것을 알 수 있다. 일례로 DF, MDF 기법의 CFL=0.001에서의  $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$ 가 IDF 기법에서 CFL=0.1일 때의  $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$ 와 비슷한 값을 갖는다. 이는  $u_\infty$ 와  $\Delta x_{min}$ 이 고정되어 있을 경우, IDF 기법은 DF, MDF 기법에서보다 약 100배 더 큰 시간간격( $\Delta t$ )을 사용하여도 비슷한 정확도로 점착조건을 부여할 수 있음을 의미한다. CFL 수에 따른 결과의 가시적인 비교는 Fig. 7-9을 통해 확인할 수 있다. Fig. 7

Table 3 Comparison of velocity errors  $\| \Delta u_e^{n+1} \|_2$  at the immersed boundary surface for different CFL numbers

|     | CFL=0.1  | CFL=0.01 | CFL=0.001 |
|-----|----------|----------|-----------|
| DF  | 1.26E-01 | 2.1E-02  | 4.61E-03  |
| MDF | 3.19E-02 | 6.61E-02 | 1.48E-03  |
| IDF | 3.86E-03 | 4.58E-04 | 2.31E-05  |

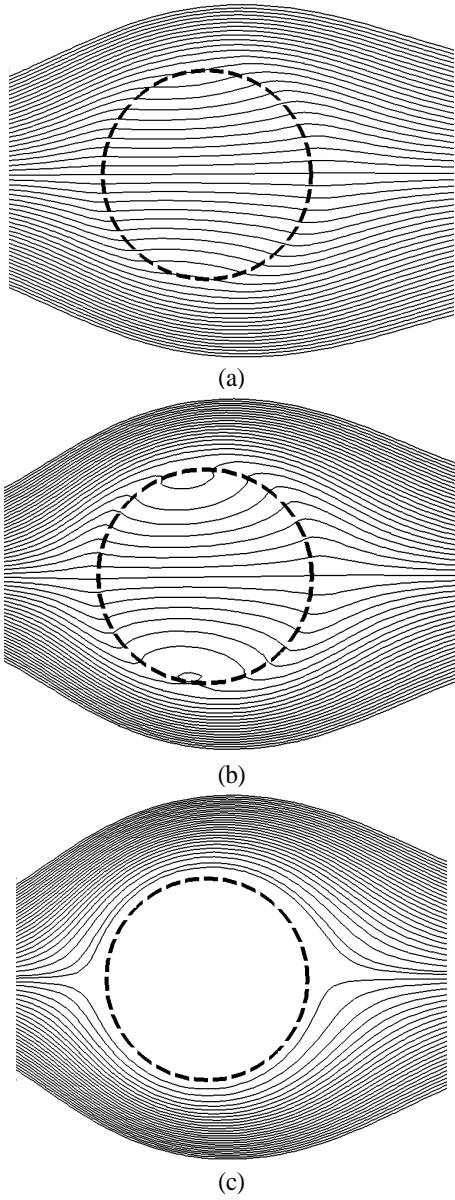


Fig. 8 Streamline around a circular cylinder for  $Re = 1$  with  $CFL=0.1$ ; (a) DF (b) MDF (c) IDF

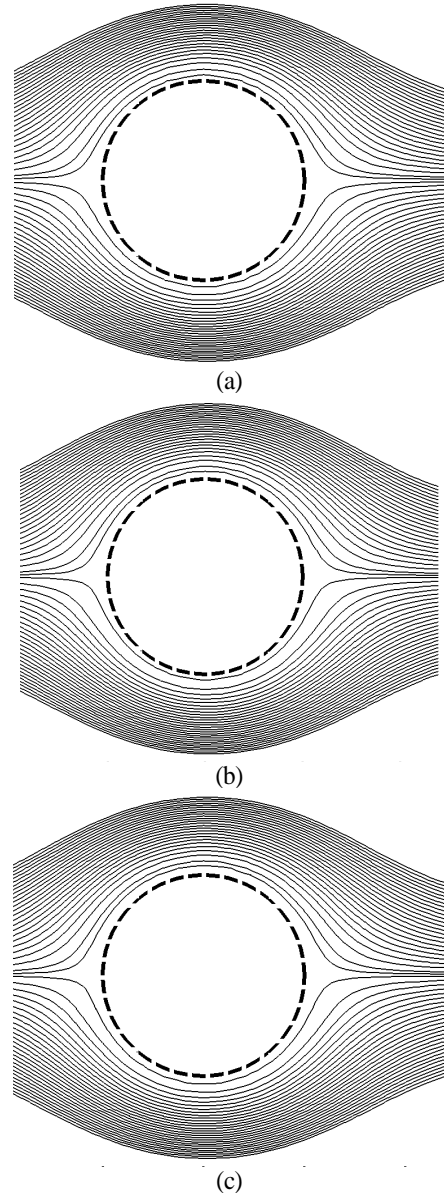


Fig. 9 Streamline around a circular cylinder for  $Re = 1$  with  $CFL=0.001$ ; (a) DF (b) MDF (c) IDF

은 IDF 기법을 이용한 실린더 주위  $10D \times 10D$  영역에서의 유동방향 속도 및 압력 분포를 나타내며, 이를 통해 낮은  $Re$  수( $Re = 1$ )에서 실린더 주위의 경계층이 넓게 분포되어 있는 것을 확인할 수 있다. Fig. 8, 9은 각각  $CFL=0.1, 0.001$ 일 때의 원통 주위  $2D \times 2D$  영역에서의 유선을 나타낸 것이며, 이때  $Re = 1$ 로 고정되었다. DF와 MDF 기법의 경우  $CFL=0.1$ 일 때는 물체 표면에서의 속도오차가 크게 때문에 점착조건이 만족하지 않아 유선이 물체 표면을 뚫고 지나가게 된다. 하지만  $CFL=0.001$ 일 때는 표면에서의 점착조건이 보다 정확히 만족되어서 유선이 물체의 표면을 따라 평행하게 이어져 있는

것을 확인할 수 있다. 이러한 결과는  $CFL$ 이 작아질수록 식 (3)의 시스템행렬  $A$ 에서 점성항( $\Delta t \frac{1}{2Re} L$ )이 작아지기 때문이며, MDF 기법의 경우 식 (16)에서 점성항을 고려하지 않고  $u^*$ 를 수정하기 때문에 점성항이 작아질수록 정확도가 높아지게 되는 것이다. 이와는 달리 IDF 기법의 경우는  $CFL$  수에 관계없이 물체 표면에서 점착조건이 잘 만족하고 있다. 이는 IDF 기법이 식(19)의  $u^*$ 를 수정하는 과정에서 점성항이 포함된 시스템행렬  $A$ 를 모두 고려하기 때문이다.

앞선 결과들을 통해 DF와 MDF 기법의 경우 물체 표면에

서 점착조건을 만족시키려면 CFL 수가 매우 작아져야 하지만, IDF 기법은 CFL 수에 관계없이 일정한 정확도로 점착조건을 만족시킨다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 낮은 Reynolds 수에 적용 가능한 새로운 가상경계기법인 내재 직접 가진(implicit direct forcing, IDF) 기법을 제시하고 시뮬레이션 결과를 다른 기법들의 결과와 비교하였다. 개발된 가상경계기법은 Uhlmann[4]의 직접 가진(DF) 기법을 기반으로 개발되었으며, Wang and Fan[5], Kempe and Fröhlich[6]에 의해 제시된 다중 직접 가진(MDF) 기법과 유사하게 반복계산을 통해 물체 주위에서 점착조건을 만족시키게 된다. 하지만 반복계산마다 시스템 방정식을 풀어야 한다는 차이점을 가지고 있다. 개발된 IDF 기법의 검증 및 결과를 다른 기법들과 비교하게 위해 2차원 균일유동 내의 원통 주위 유동 시뮬레이션을 수행하였으며, 물체 표면에서의 속도오차를 통해 점착조건 만족 유무를 측정하였다. DF 기법과 MDF, IDF 기법은 Reynolds 수가 감소할수록 물체 표면에서의 최종속도 오차가 증가하였으며 CFL 수가 커질 때 마찬가지로 최종속도 오차가 증가하였다. 하지만 IDF 기법의 최종속도 오차의 크기는 다른 기법들보다 매우 작게 나타났다. 특히 IDF 기법은 같은 Re 수에서 CFL 수가 약 100배 이상 큰 상황에서 다른 기법과 유사한 크기의 최종속도 오차를 갖게 되며, 이는 IDF 기법이 DF, MDF 기법에 비해 큰 시간간격을 사용하여도 충분히 물체 표면에서 정확도 높은 점착조건을 부여할 수 있다는 것을 의미한다. 물체표면의 점착조건 만족 유무를 판단하기 위해 물체 주위의 유선을 구하여 비교하였다. DF, MDF 기법의 경우 낮은 Re 수( $Re=1$ )에서 CFL 수가 0.1 이상일 때는 물체 표면에서의 최종속도 오차가 매우 커서 유선이 물체 표면을 뚫고 지나가는 현상이 발생하였다. 하지만 IDF 기법의 경우 CFL 수에 관계없이 물체 주위의 유선들이 물체 표면에 평행하게 이어져 있으며, 이를 통해 물체 표면에서 점착조건이 만족한다는 것을 가시적으로 확인할 수 있었다.

앞선 결과들을 통해 본 연구에서 개발된 IDF 기법은 반복 계산 시 시스템 방정식을 풀기 때문에 MDF 기법에 비해 많은 계산량이 요구되지만, 낮은 Reynolds 수에서 비교적 큰 시간간격을 사용하여도 정확도 높은 점착조건을 부여할 수 있다는 것을 확인하였다.

#### 후 기

본 연구는 2011년도 교육과학기술부의 재원으로 첨단사이

언스 교육허브개발사업(EDISON 2011-0020561)의 지원으로 수행되었습니다.

#### References

- [1] 1972, Peskin, C.S., "Flow Patterns Around Heart Valves: a Digital Computer Method for Solving the Equations of Motion," *Ph.D. Thesis, Alber Einstein College of Medicine, Yeshiva University, USA.*
- [2] 1993, Goldstein, D., Handler, R. and Sirovich, L., "Modeling a no-slip flow boundary with an external force field," *J. Comput. Phys.*, Vol.105, pp.354-366.
- [3] 2000, Fadlun, E.A., Verzicco, R., Orlandi, P. and Mohd-Yusof, J., "Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations," *J. Comput. Phys.*, Vol.161, pp.35-60.
- [4] 2005, Uhlmann, M., "An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.209, pp.448-476.
- [5] 2008, Wang, Z. and Fan, J., "Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles," *Int. J. Multi. Flow*, Vol.34, pp.283-302.
- [6] 2012, Kempe, T. and Fröhlich, J., "An improved immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particle laden flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.231, pp.3663-3684.
- [7] 1984, Kim, J. and Moin, P., "Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol.59, pp.308-323.
- [8] 2003, Saad, Y., *Iterative methods for sparse linear systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA.
- [9] 2007, Choi, J.I., Oberoi, R.C., Edwards, J.R. and Rosati, J.A., "An immersed boundary method for complex incompressible flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.224, pp.757-784.
- [10] 1980, Fornberg, B., "A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder," *J. Fluid. Mechs*, Vol.98, pp.819-855.
- [11] 1991, Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M., "A fractional step solution method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in generalized coordinate systems," *J. Comput. Phys.*, Vol.94, pp.102-137.
- [12] 2005, Panton, R.L., *Incompressible Flow*, WILEY, Canada.