

논문 2013-50-10-21

# 일반화된 라그랑지 다항식을 사용하는 FIR 하프밴드 필터 설계

(Design of FIR Halfband Filters using Generalized Lagrange  
Polynomial)

봉 정 식\*, 전 준 현\*\*

(Jeongsik Bong and Joonhyeon Jeon<sup>©</sup>)

## 요 약

일반적으로 최대평탄 하프밴드 필터들은 다른 필터들에 비해 넓은 주파수 영역을 가지고 있다. 이것은 필터의 주파수 응답을 직접적으로 제어하기 위한 필터 차수의 여분이 없이 단지  $z = \pm 1$ 에서 최대 가능한 제로 수를 갖도록 설계된 것으로 독립된 파라미터가 없기 때문이다. 본 논문에서는 천이 대역폭 직접 제어가 가능한 FIR 하프밴드 필터들의 설계를 위한 새로운 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 필터의  $0$ 번째 계수인  $h_0$ 를 파라미터화한 일반화된 라그랑지 하프밴드 다항식( $g$ -LHBP)을 기반으로 하고 있으며,  $h_0$ 를 제어함으로써 요구되는 주파수 응답을 갖는 필터를 설계하는 방식이다. 이때  $h_0$ 는  $g$ -LHBP 재귀관계의 이론적 분석을 통하여 천이대역의 경사도 파라미터로 모델링하였다. 또한, 이 방식은 요구된 필터 특성(천이대역의 경사도와 대역 평탄도 사이의 균형) 선택과 관련된 설계 파라미터들(필터 계수들)의 직접적인 계산을 위한 명확한 공식을 제공한다. 설계 예시들은 제안된 방식이 최대평탄 하프밴드 필터들 보다 상대적으로 날카로운 천이대역 경사도를 가진 하프밴드 필터의 설계에 적합한 솔루션임을 보여준다.

## Abstract

Maximally flat (MAXFLAT) half-band filters usually have wider transition band than other filters. This is due to the fact that the maximum possible number of zeros at  $z = \pm 1$  is imposed, which leaves no degree of freedom, and thus no independent parameters for direct control of the frequency response. This paper describes a novel method for the design of FIR halfband filters with an explicit control of the transition-band width. The proposed method is based on a generalized Lagrange halfband polynomial ( $g$ -LHBP) with coefficients parametrizing a  $0$ -th coefficient  $h_0$ , and allows the frequency response of this filter type to be controllable by adjusting  $h_0$ . Then,  $h_0$  is modeled as a steepness parameter of the transition band and this is accomplished through theoretically analyzing a polynomial recurrence relation of the  $g$ -LHBP. This method also provides explicit formulas for direct computation of design parameters related to choosing a desired filter characteristic (by trade-off between the transition-band sharpness and passband & stopband flatness). The examples are shown to provide a complete and accurate solution for the design of such filters with relatively sharper transition-band steepness than MAXFLAT half-band filters.

**Keywords :** Halfband filters, Maximally flat halfband filters, Linear phase filters, FIR digital filters, Lagrange halfband polynomial

\* 학생회원, \*\* 평생회원, 동국대학교-서울캠퍼스 공과대학 정보통신공학전공

(Department of Information and Communication Engineering, Dongguk University)

© Corresponding Author(E-mail: [memory@dgu.edu](mailto:memory@dgu.edu))

※ 본 과제(결과물)는 동국대학교 학술연구비의 지원을 받아 수행된 연구입니다.

접수일자: 2013년8월13일, 수정완료일:2013년10월3일

## I. 서 론

최대평탄(maximally-flat: MAXFLAT) 필터는 non-recursive FIR 필터들 가운데 중요한 필터 종류의 하나로, 높은 정지대역감쇄(stopband attenuation) 또는 완만한 주파수 응답(frequency response)이 요구될 때 응용된다<sup>[1-4]</sup>. MAXFLAT FIR 필터 설계의 기본 아이디어는 주파수 대역 에지에서의 MAXFLAT 제약을 만족하고 수학적으로 증명된 폐쇄형 다항식(closed-form polynomial)을 사용하는 것이다<sup>[5-11]</sup>. 일반적으로 Hermite<sup>[5]</sup>, Miller<sup>[6]</sup>, Bernstein<sup>[7]</sup> 또는 Krawtchouk<sup>[8]</sup> 다항식들이 사용되며, 설계된 필터는 요구되는 차단 주파수 응답의 근사화 오차를 포함한다. 이것은 필터 설계에 사용되는 폐쇄형 다항식들이 주로 정확한 주파수 응답이 아닌 필터의 평탄함을 목적으로 하기 때문이다<sup>[9-11]</sup>. MAXFLAT FIR 하프밴드 필터(halfband filters)의 설계를 위해 다양한 구현 방식들이 제안되었다<sup>[12-8]</sup>. 이러한 필터는 하프밴드 주파수  $\omega = \pi/2$ 에서 정확한 차단 주파수(cutoff frequency)를 갖으며 임펄스 응답 계수(impulse response coefficient)의 절반 정도가 0(zeros)이기 때문에 효율적인 구현이 계산적으로 가능하다. 또한 천이대역폭(transition bandwidth)은 다른 필터들에 비해 비교적 넓지만 필터의 길이를 늘려 좁힐 수 있다. MAXFLAT FIR 하프밴드 필터들의 설계에는 일반적으로 라그랑지 하프밴드 다항식(Lagrange halfband polynomial-LHBP)<sup>[13-14]</sup>을 가장 많이 사용되며, 이때 LHBP 필터는  $z = -1$ 에서 최대 제로(zeros) 수를 갖으며 2 채널 필터 뱅크를 이용한 웨이블릿 변환 및 다분할(multi rate) 기술 등에 많이 응용된다<sup>[15-16]</sup>. 그럼에도 불구하고 LHBP 필터들은 폐쇄형 다항식을 사용하는 기존의 MAXFLAT 필터들처럼 필터 길이 외에 천이대역폭의 주파수 응답을 직접 제어 할 수 있는 어떠한 독립된 파라미터를 가지고 있지 않다. 따라서 폐쇄형 다항식 속에서 필터의 천이대역 가파름(steeptness of transition band)을 명확하게 조절할 수 있는 필터의 설계에 대한 문제가 아직 남아있다<sup>[18]</sup>.

본 논문에서는 폐쇄형 LHBP 다항식을 사용하였을 때 천이대역 가파름 즉, 경사도 날카로움(sharpness of slop) 제어가 가능한 FIR 하프밴드 필터의 설계 방법을 제시하였다. 설계 방법은 하프밴드 다항식에서  $z = -1$ 에서 최대 제로 수 이하로 하여 주파수응답을 제어할

수 있는 독립 파라미터를 제공한 것이다. 그 결과 모든 임펄스 응답 계수들이 0-번째 임펄스 응답 계수인  $h_0$ 로 표현되는 일반화된 라그랑지 하프밴드 다항식( $g$ -LHBP)이 제시되었다. 이 때  $h_0$ 는  $g$ -LHBP의 선형 순환(linear recursive) 관계식으로 부터 필터의 천이대역의 가파름(또는 경사도)의 함수로 표현된다. 본 논문에서 제안한  $g$ -LHBP 기반의 하프밴드필터 설계는 진폭 평단도와 천이대역 가파름 간의 "trade-off"를 이용한 필터 선택의 유연성을 제공한다. 뿐만 아니라 정확하게 유도된 필터 계수 등의 파라미터 공식들을 통하여 직접적이고도 효율적인 계산을 허용토록 하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. II장에서는  $h_0$ 를 가진 일반화된 라그랑지 하프밴드 다항식을 설명하였다. III장에서는  $g$ -LHBP 재귀관계 분석과, 이를 바탕으로  $h_0$ 를 천이대역의 가파름 제어인자(steeptness control factor)로 모델링하는 과정을 설명하였다. 또한 상대적으로 좁은 천이대역폭을 가진 필터를 효과적이고 정확하게 설계하는 다양한 공식들이 제안되었다. IV장에서는 제안된 방법의 우수성을 입증하는 설계 예시를 설명하였으며, 마지막으로 V장에서는 결론을 도출하였다.

## II. 일반화된 라그랑지 하프밴드 다항식

$4K-2$  차수의 실제수임펄스응답(real impulse response)  $h_n$ 을 가진 type II의 FIR 하프밴드 필터가  $H(z)$ 일 때, 식 (1)에서 나타낸 바와 같이 식 (2)의 제로위상 하프밴드 저역통과 필터(zero-phase halfband lowpass filter)를 사용하여 나타낼 수가 있다.

$$H(z) = z^{-(2K-1)} Q_K(z) \quad (1)$$

$$Q_K(z) = 0.5 + \sum_{n=1}^K h_{2K-2n} (z^{-(2n-1)} + z^{2n-1}) \quad (2)$$

이때 MAXFLAT FIR 하프밴드 필터의 설계는 식 (2)의 필터 함수로 변환이 가능한 폐쇄형 다항식<sup>[8-11, 14]</sup>을 사용하면 쉽게 구현이 가능하다. 현재까지 라그랑지 솔루션을 이용한 LHBP<sup>[17-18]</sup>이 가장 많이 사용되고 있으며, 이를 이용한  $4K-2$  차수의 MAXFLAT FIR 하프밴드 필터를 표현하면 다음과 같다.

$$Q_K(z)_{LHBP} = z^K \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2K} \times \left\{ \sum_{\ell=0}^{K-1} d_{K,\ell} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^\ell \right\} \quad (3)$$

여기서  $d_{K,\ell}$ 는

$$d_{K,\ell} = \binom{K+\ell-1}{\ell} = \frac{(K+\ell-1)!}{(K-1)! \times \ell!} \quad (4)$$

식 (3)의 LHBP 필터는  $z=-1$ 에서 최대 제로(zero)의 수인  $2K$ 개를 갖기 때문에 아래와 같이  $\omega = \pi$ 에서 최대평탄 응답(maximally flat response)을 갖는다고 할 수가 있다.

$$\left. \frac{\partial^k Q_K(\omega)_{LHBP}}{\partial \omega^k} \right|_{\omega=\pi} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2K-1 \quad (5)$$

이는 LHBP 필터가 식 (3)에 나타난 바와 같이 주파수 응답을 직접적으로 제어할 수 있는 파라미터를 가지고 있지 않음을 또한 설명하고 있다.

이제까지 설명한 것을 바탕으로 식 (2)에서 나타난 FIR 하프밴드 필터 속에 주파수응답 제어 파라미터를 제공하기 위하여, 우선  $Q_K(z)$ 가  $z=-1$ 에서  $2(K-1)$ 의 제로를 갖는다고 가정하면, 식 (2)는 다음을 만족한다.

$$\left. \frac{\partial^k Q_K(\omega)}{\partial \omega^k} \right|_{\omega=\pi} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2K-3 \quad (6)$$

식 (6)의 조건을 식 (2)에 적용하고  $Q_K(z)$ 가 식 (3)과 유사하게 재귀관계를 갖도록 주요점들(coincident points)<sup>[17-18]</sup>에서 라그랑지 중첩(Lagrange interpolation)을 적용하였을 때 (부록 A에서 식 (A.12) 참조),  $Q_K(z)$ 는 아래 식과 같이  $h_0$ 에 관하여 표현되는 일반화된 LHBP (g-LHBP) 다항식으로 구할 수가 있다.

$$Q_K(z) = z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(K-1)} \left\{ \sum_{\ell=0}^{K-2} d_{K-1,\ell} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^\ell + (-1)^{K-1} 2^{4K-2} h_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right) \right] \right\} \quad (7)$$

$$- \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^{K-1} \right\}$$

만일  $h_0$ 가 식 (8)과 같이 주어진다면 식 (7)은 식 (3)의 LHBP와 동일하다.

$$h_0 = (-1)^{K-1} \frac{d_{K,K-1}}{2^{4K-2}} \quad (8)$$

또한 식 (8)은 식 (7)의  $z=-1$ 에서 제로를 추가함으로써 얻어질 수 있다. 위의 g-LHBP을 폐쇄형 일반 해 (general solution of closed form)로 표현하기 위해 식 (7)을 다음과 같이 변환하면

$$Q_K(z) = z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(K-1)} \times \left\{ g_K + \sum_{\ell=1}^K g_{K-\ell} (z^\ell + z^{-\ell}) \right\} \quad (9)$$

식 (9)의 중첩 계수(interpolation coefficients)  $g_\ell$ 's ( $\ell = 0, 1, 2, \dots, K$ )은  $h_0$ 와  $K$ 에 관하여 아래 식과 같이 얻을 수 있다(부록 A의 식 (A.13)를 참조).

$$g_\ell = (-1)^{K-\ell} \sum_{j=2}^{\ell} \frac{d_{K-1,K-j}}{2^{2(K-j)}} \binom{2(K-j)}{\ell-j} + (-1)^{\ell+1} 2^{2K-1} h_0 \left\{ \binom{2(K-1)}{\ell-1} - \frac{1}{2} \binom{2K}{\ell} \right\} \quad (10)$$

식 (10)을 이용한 IR 계수들인  $h_n$ 's의 계산은 참고문헌<sup>[11]</sup>과 유사한 방법으로 식 (9)를 식 (2)에 대입함으로써 얻어진 아래 관계식을 이용하여 쉽게 구할 수가 있다.

$$h_n = \frac{1}{2^{2(K-1)}} \left\{ \sum_{\ell=0}^K \binom{2(K-1)}{n-\ell} g_\ell + \sum_{\ell=1}^K \binom{2(K-1)}{n-\ell-K} g_{K-\ell} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, 2K-2 \quad (11a)$$

또는 이와 동일하게 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$h_{2n-1} = 0 \quad \text{and} \quad h_{2n} = \frac{1}{2^{2(K-1)}} \left\{ \sum_{\ell=0}^K \binom{2(K-1)}{2n-\ell} g_\ell + \sum_{\ell=1}^K \binom{2(K-1)}{2n-\ell-K} g_{K-\ell} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, K-1 \quad (11b)$$

여기서 만약  $A < B$  또는  $B < 0$  이면  $\binom{A}{B} = 0$  이며, 식

(10)을 식 (11a)에 대입하면, 식 (11b)처럼 홀수 번째 계수는 0이 된다(즉,  $h_{2n-1}'s = 0$ ). 또한, 식 (7)의  $g$ -LHBP 필터의 주파수 응답은 아래 식에서 나타낸 바와 같이  $K$ 와  $h_0$  관하여 표현될 수 있다.

$$Q_K(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2(K-1)} \left\{ \sum_{\ell=0}^{K-2} d_{K-1,\ell} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\ell} + (-1)^{K-1} 2^{4K-2} h_0 \left[ \frac{1}{2} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2(K-1)} - \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2K} \right] \right\} \quad (12)$$

다시 말해 고정된  $K$ 를 갖는  $g$ -LHBP 필터의 주파수 응답은  $h_0$ 에 의해 직접 제어가 가능하다는 것을 의미한다. 따라서  $h_0$ 를 이용한 다양한  $g$ -LHBP 필터를 얻을 수 있다. 또한 만일 원하는 스펙의  $h_0$  값이 주어진다면, 식 (10)의 공식을 이용한 식 (11)의 관계식으로부터 필터 계수들을 직접 계산 할 수가 있는 장점이 있다. 그러나  $h_0$ 가 매우 넓은 다이내믹 범위(dynamic range)를 갖기 때문에 ( $4K-2$  필터 차수의) FIR 하프 밴드 필터들이 무한개(no limit) 존재한다. 따라서 천이 대역폭과 진폭 평탄도 사이의 “trade-off”을 이용하여 원하는 주파수 응답을 갖는  $g$ -LHBP 필터를 얻기 위해서는  $h_0$ 가 제어 파라미터로서 정확하게 모델링되고 정의되어야 한다. 이는 III장에서 자세히 설명하였다.

### III. 천이대역 가파름(경사도) 파라미터: $h_0$

제 3장에서는 식 (12)의 이론적 분석을 통하여 천이대역 에지들(transition-band edges)의 직접적인 컨트롤을 위한 가파름 파라미터로써  $h_0$ 를 모델링하는 방법을 다뤘다. 또한 허용진폭왜곡(tolerant magnitude distortion)을 갖는 대신 (상대적으로) 가파른 기울기의 천이대역을 갖는  $g$ -LHBP 필터를 얻기 위한  $h_0$ 의 결정을 설명하였다.

$Q_K(z)$ 의 재귀 관계식(부록 A의 식 (A.2)을 참조)으로부터  $A_K(z)$ 는  $Q_{K-1}(z)_{LHBP}$ 에서  $Q_K(z)$ 로의 확장을 위한 목적 함수(objective function)의 역할을 한다 (여기서  $Q_{K-1}(z)_{LHBP}$ 와  $A_K(z)$ 는 부록 A의 식 (A.3)과 식 (A.12)에 나타나 있다). 따라서 식 (12)으로 표현된  $Q_K(\omega)$ 는 아래와 같이  $Q_{K-1}(\omega)_{LHBP}$ 와  $A_K(\omega)$ 을 사용하여 표현할 수 있다.

$$Q_K(\omega) = Q_{K-1}(\omega)_{LHBP} + A_K(\omega) \quad (13)$$

여기서

$$Q_{K-1}(\omega)_{LHBP} = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2(K-1)} \times \sum_{\ell=0}^{K-2} d_{K-1,\ell} \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2\ell} \quad (14)$$

$$A_K(\omega) = (-1)^{K-1} 2^{2(K-1)} \times h_0 (\cos\omega)(\sin\omega)^{2(K-1)} \quad (15)$$

( $A_K(\omega)$ 는  $\sin\omega = 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$ 의 공식을 이용하여 다시 쓴 것이다). 식 (13)으로 부터  $Q_{K-1}(\omega)_{LHBP}$ 는 MAXFLAT 저역통과 함수(lowpass function)이기 때문에  $A_K(\omega)$ 가  $h_0$ 을 이용하여  $Q_K(\omega)$ 을 특징화 한다는 것을 확신할 수가 있다. 다시 말해서,  $A_K(\omega)$ 의 분석을 통하여  $Q_K(\omega)$ 에  $h_0$ 가 끼치는 영향을 알 수가 있을 것이다. 식 (15)로부터  $(0, 0)$ ,  $(\pi/2, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ 을 통과하는  $A_K(\omega)$ 는 비대칭 싸인 함수와 유사한 파형 (“anti-symmetric sinusoid-like shape”)을 나타냄을 알 수가 있다. 따라서  $A_K(\omega)$ 는 두 개의 비대칭 피크 값들(anti-symmetric peak values)을 갖으며, 이들 두 개의 피크 값들과  $h_0$ 와의 관계를 살펴보면 다음과 같다.

$A_K(\omega)$ 의 두 개 피크 값 주파수들(peak frequencies)을  $\omega_p^+$ 와  $\omega_p^-$ 라고 가정하면,  $\partial A_K(\omega)/\partial\omega|_{\omega=\omega_p^\pm} = 0$ 로부터 아래식과 같이  $K$ 에 관하여 구할 수가 있다.

$$\omega_p^\pm = \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2K-1}}\right), \quad 0 < \omega_p^+ < \pi/2 < \omega_p^- < \pi \quad (16)$$

따라서 식 (16)을 식 (15)에 대입하여 두 개의 피크 값(peak values)  $A_K(\omega_p^+)$ 와  $A_K(\omega_p^-)$ 은 아래와 같다.

$$A_K(\omega_p^\pm) = \pm (-1)^{K-1} 2^{2K-1} h_0 \times \frac{1}{\sqrt{2K-1}} \left(1 - \frac{1}{(2K-1)}\right)^{K-1} \quad (17)$$

여기서  $\omega_p^\pm$ (복호동순)는  $\omega_p^+$ 와  $\omega_p^-$ 을 의미하며  $\cos(\omega_p^+ + \omega_p^-) = -1$ 로부터  $\omega_p^+ + \omega_p^- = \pi$ 와 관계가 성립됨을 알 수가 있다. 특히,  $Q_{K-1}(\omega)_{LHBP}$ 와  $A_K(\omega)$

는  $0 \leq \omega \leq \pi$ 에서  $\omega = \pi/2$ 를 중심으로 비대칭이 되므로  $Q_{K-1}(\omega_p^\pm)_{LHBP}$ 와  $A_K(\omega_p^\pm)$ 는 다음 특성을 만족한다.

$$Q_{K-1}(\omega_p^+)_{LHBP} + Q_{K-1}(\omega_p^-)_{LHBP} = 1 \quad (18a)$$

$$A_K(\omega_p^+) + A_K(\omega_p^-) = 0 \quad (18b)$$

위의 비대칭 특성을 식 (13)에 적용하였을 때,  $Q_K(\omega_p^+)$ 와  $Q_K(\omega_p^-)$ 는 다음의 관계식을 만족한다.

$$Q_K(\omega_p^+) + Q_K(\omega_p^-) = 1 \quad (19)$$

또한  $\omega = \omega_p^\pm$  점에서 식 (17)에 식 (13)을 대입한 후  $h_0$ 에 관하여 정리하면 다음과 같은 결과가 얻어진다.

$$h_0 = \frac{Q_K(\omega_p^\pm) - Q_{K-1}(\omega_p^\pm)_{LHBP}}{(-1)^{K-1} 2^{2K-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2K-1}} \right) \left( 1 - \frac{1}{2K-1} \right)^{K-1}} \quad (20)$$

식 (20)으로부터 얻어진 두 개의  $h_0$ (복호동순) 값들은 동일한 값을 갖는데, 이것은 식 (18a)와 식 (19)의 관계식들로부터  $Q_K(\omega_p^+) - Q_{K-1}(\omega_p^+)_{LHBP} = -Q_K(\omega_p^-) + Q_{K-1}(\omega_p^-)_{LHBP}$ 이 성립하기 때문이다. 무엇보다 중요한 것은 식 (12)에서 주어진  $g$ -LHBP 필터의  $h_0$ 를 얻기 위해 식 (20)을 사용하였을 때,  $Q_K(\omega)$ 는  $\omega = \omega_p^+$ 와  $\omega_p^-$ 에서  $Q_K(\omega_p^+)$ 와  $Q_K(\omega_p^-)$ 을 정확히 통과한다는 것이다. 따라서 필터의 천이대역 에지 주파수들(transition-band edge frequencies)로  $\omega_p^+$ 와  $\omega_p^-$ 을 사용할 수가 있으며, 결과적으로  $g$ -LHBP 필터의 천이대역의 기울기를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$slope_K = \frac{Q_K(\omega_p^-) - Q_K(\omega_p^+)}{\omega_p^- - \omega_p^+} \quad (21)$$

식 (21)은  $g$ -LHBP 필터 설계시 주어진  $K$ 에 대해 식 (20)의  $h_0$ 을 사용할 경우,  $Q_K(\omega_p^+)$ 와  $Q_K(\omega_p^-)$ 로 표현되는 천이대역의 기울기를 직접 제어하는 가파름 파라미터로  $h_0$ 가 사용될 수 있음을 보여준다. 따라서 통과대역-에지 주파수(passband-edge frequency)에서의 진

폭 값을 임의의 설계 상수  $Q_K(\omega_p^+) = \gamma$  (: 식 (19)에서  $Q_K(\omega_p^-) = 1 - \gamma$ )라 하고 식 (20)과 (21)에 각각 대입할 경우  $h_0$ 와  $slope_K$ 는  $\gamma$ 로 다시 표현될 수가 있다.

$$h_{0,\gamma} = \frac{\gamma - Q_{K-1}(\omega_p^+)_{LHBP}}{(-1)^{K-1} 2^{2K-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2K-1}} \right) \left( 1 - \frac{1}{2K-1} \right)^{K-1}} \quad (22)$$

$$slope_{K,\gamma} = \frac{1 - 2\gamma}{\arccos\left(1 - \frac{2}{2K-1}\right)} \quad (23)$$

여기서 식 (21)의  $\omega_p^- - \omega_p^+$ 는 식 (16)에 곱-합 변환공식  $(\cos\omega_p^-)(\cos\omega_p^+) = \frac{1}{2}\{\cos(\omega_p^- - \omega_p^+) + \cos(\omega_p^- + \omega_p^+)\}$ 을 사용하므로 써 얻어진 것이다. 중요한 점은  $g$ -LHBP 필터가 MAXFLAT LHBP 필터보다 상대적으로 좁은 천이대역을 갖도록  $h_{0,\gamma}$ 를 결정하기 위해서, 저대역통과 필터 함수 특성상  $\gamma$ 는  $Q_K(\omega_p^+)_{MAXFLAT} < \gamma \leq 1$ 의 범위 내에서 선택되어야 한다는 것이다. 여기서  $Q_K(\omega_p^+)_{MAXFLAT}$ 는  $\omega = \omega_p^+$ 에서 식 (3)의 진폭 값이며 식 (8)을 식 (12)에 적용한 값과 동일하다. 다시 말해 주어진  $K$ 에 대해  $\gamma = Q_K(\omega_p^+)_{MAXFLAT}$ 으로 식 (22)에서 계산된  $h_{0,\gamma}$ 는 식 (8)에 의해 계산된  $h_0$ 와 동일하기 때문에  $Q_K(\omega)$ 의 진폭응답은 MAXFLAT하며,  $\gamma > 1$ 일 때  $h_0$ 를 사용한  $Q_K(\omega)$ 는 날카로운 천이대역을 갖지만 통과대역과 정지대역에서 더 큰 왜곡 응답(distortion response)을 갖는다. 결론적으로 주어진  $K$

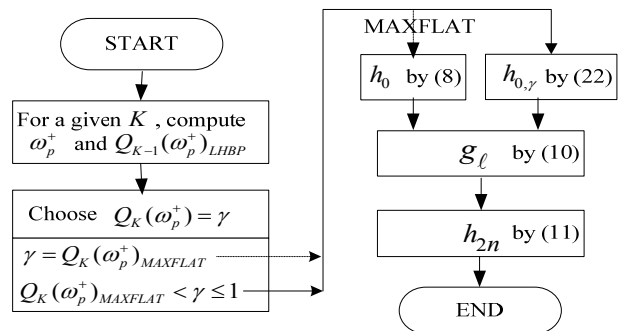


그림 1. 좁은 천이대역을 갖는  $g$ -LHBP 필터 설계 방법  
Fig. 1. Design procedure to obtain  $g$ -LHBP filters with narrow transition band.

에 대해 식 (22)를  $g$ -LHBP 필터 설계에 사용할 경우 상위에서 파라미터인  $\gamma$ 를 조절하므로써, 필터 천이대역의 가파름 제어가 가능함을 알 수가 있다. 그림 1은  $g$ -LHBP 필터 설계를 위한 흐름도를 나타낸 것이다.

**성능평가:**  $Q_K(\omega_p^+)_{MAXFLAT} < \gamma \leq 1.0$ 을 만족하는  $\gamma$ 에 의해 결정된  $h_{0,\gamma}$ 는 통과대역과 정지대역에서 각각 오버슈트(overshoot)와 언더슈트(undershoot)를 야기할 것이다. 따라서 천이대역 경사도 이득에 따른 이러한 진폭이득 왜곡의 정도를 확인하는 것이 필요하다. 식 (22)를 사용에 따른 통과대역과 정지대역의 피크 에러들(peak errors)을 계산하기 위하여  $\omega_d^+$ 와  $\omega_d^-$ 을 각각 피크 오버슈트(peak-overshoot)와 피크 언더슈트(peak - undershoot) 주파수들이라고 가정 하면,  $Q_K(\omega_d^+)$ 와  $Q_K(\omega_d^-)$ 는 통과대역과 정지대역에서 각각의 피크왜곡 값이 된다. 이때  $\partial Q_K(\omega)/\partial \omega|_{\omega=\omega_d^\pm} = 0$ 의 방정식을 풀면 다음과 같이  $K$ 와  $h_{0,\gamma}$ 에 대한  $\omega_d^\pm$ (복호동순)을 얻을 수 있다.

$$\omega_d^\pm = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{1}{2K-1} \left\{ 1 + (-1)^{K-1} \frac{(2K-3)}{2^{4(K-1)} h_{0,\gamma}} \left( \frac{2(K-2)}{K-2} \right) \right\}}\right) \quad (24)$$

여기서  $\omega_d^\pm$ 는  $\omega_d^+$ 와  $\omega_d^-$ 을 나타내며,  $\cos(\omega_d^+ + \omega_d^-) = -1$ 로부터  $\omega_d^+ + \omega_d^- = \pi$ 이 됨을 알 수가 있다. 식 (19)을 이끌어낸 유사한 방법으로  $Q_{K-1}(\omega_d^\pm)_{LHBP}$ 와  $A_K(\omega_d^\pm)$ 는 각각 다음의 특징을 가진다.

$$Q_{K-1}(\omega_d^+)_{LHBP} + Q_{K-1}(\omega_d^-)_{LHBP} = 1$$

and

$$A_K(\omega_d^+) + A_K(\omega_d^-) = 0$$

$$Q_K(\omega_d^+)_{LHBP} + Q_K(\omega_d^-)_{LHBP} = 1 \quad (26)$$

식 (26)으로부터  $Q_K(\omega_d^+)$ 에 따른 최대 오버슈트 리플(maximum overshoot ripple)  $\delta_{K,\gamma}^{max}$ 는 다음과 같이 피크 언더슈트  $Q_K(\omega_d^-)$ 의 진폭과 같다.

$$\delta_{K,\gamma}^{max} = Q_K(\omega_d^+) - 1 = -Q_K(\omega_d^-) \quad (27)$$

만약 MAXFLAT 응답을 가진  $g$ -LHBP 필터의 설계를 위하여 식 (8)을 사용한다면,  $\delta_{K,\gamma}^{max}$ 는 제로(i.e.,  $\delta_{K,\gamma}^{max} = 0$ )가 된다. 식 (16)과 식 (24)로부터  $\omega_p^\pm$ 의  $\omega_d^\pm$ 는  $0 < \omega_d^+ < \omega_p^+ < \pi/2 < \omega_p^- < \omega_d^- < \pi$ 가 되며, 이때  $A_K(\omega_p^+) > A_K(\omega_d^+) > A_K(\omega_d^-) > A_K(\omega_p^-)$ 되기 때문에  $Q_K(\omega_d^+) > Q_K(\omega_p^+) > Q_K(\omega_p^-) > Q_K(\omega_d^-)$ 가 된다. 그림 2는  $K=3$  일 때  $h_{0,\gamma}$ 을 구하기 위하여  $\gamma_{MAXFLAT} = 0.8667$ 와  $\gamma = 1.0$ 을 각각 사용한 두 개의  $g$ -LHBP 필터들의 주파수 응답들을 나타낸 것이다. 그림 2에서 나타난 바와 같이 식 (22)에 의해 설계된  $g$ -LHBP 필터들은 상대적으로 좁은 천이대역을 가질 수는 있지만 통과대역과 정지대역 사이에서 오버슈트와 언더슈트 같은 진폭 왜곡의 손실이 나타날 수가 있다. 따라서 식 (22) 속에서  $h_{0,\gamma}$ 을 제어함으로써 좁은 천이대역을 갖는 필터를 얻을 수는 있으나, 이로 인해 발생하는 진폭 왜곡이 허용할 수 있는 오차 범위에 있는지의 의문이 남아있다. 이러한 필터 성능평가는 IV장에서 설계 예시를 통해 자세히 설명하였다.

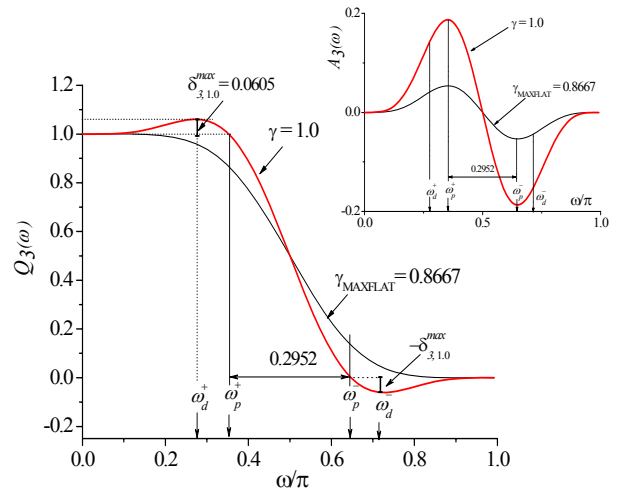


그림 2.  $K=3$ 가 일 때, 두 개의  $g$ -LHBP 필터의 주파수 응답; MAXFLAT 필터(검은 선)와 좁은 천이대역 필터(빨간 선).

Fig. 2. The frequency responses of two  $g$ -LHBP filters for a given  $K=3$ ; MAXFLAT filter(black solid line) and narrow transition-band filter(red bold line).

### IV. Design Examples

IV장에서는  $g$ -LHBP 저역통과 필터들의 설계 예시를 통하여, III장에서 설명한 설계 및 성능평가 파라미터들의 정확성을 확인하고, 제안된 방법의 유용성을 증명하였다.

예를 들어  $K=4$ (이때 필터의 차수는  $4K-2=14$ 가 된다) 일 경우, 14 차수의  $g$ -LHBP를 위한 일반형은 식 (9)로부터 다음의 식과 같다.

$$Q_4(z) = z^3 \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^6 \left\{ g_4 + \sum_{\ell=1}^4 g_{4-\ell} (z^\ell + z^{-\ell}) \right\} \quad (28)$$

이때 중첩 계수  $g_\ell (\ell = 0, 1, \dots, 4)$ 은 식 (10)으로 부터

$$\begin{aligned} g_0 &= 2^6 h_0, g_1 = -6 \cdot 2^6 h_0, g_2 = 3/8 + 16 \cdot 2^6 h_0, \\ g_3 &= -9/4 - 26 \cdot 2^6 h_0, g_4 = 19/4 + 30 \cdot 2^6 h_0 \end{aligned} \quad (29)$$

와 같으며, 식 (2)에서 나타낸 형식의 필터 전달 함수는 다음과 같이 표현된다.

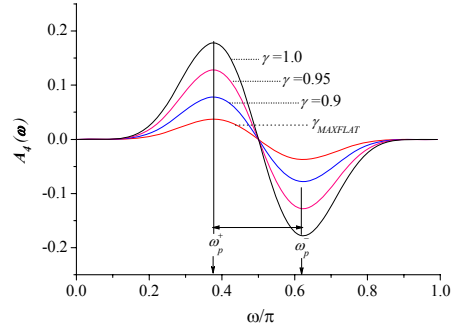
$$\begin{aligned} Q_4(z) &= h_0 z^{-7} + \left( \frac{3}{2^9} - 5h_0 \right) z^{-5} + \left( \frac{-25}{2^9} + 9h_0 \right) z^{-3} \\ &+ \left( \frac{75}{2^8} - 5h_0 \right) z^{-1} + 0.5 + \left( \frac{75}{2^8} - 5h_0 \right) z \\ &+ \left( \frac{-25}{2^9} + 9h_0 \right) z^3 + \left( \frac{3}{2^9} - 5h_0 \right) z^5 + h_{0,\gamma} z^7 \end{aligned} \quad (30)$$

여기서  $K=4$ 일 때 식 (2)의  $h_{2n} (n=1,2,3)$ 은 식 (29)를 식 (11b)에 대입하여 얻어진 것이다. 이때 식 (2)에 의해 주어진 홀수 차수의 하프밴드 필터 계수들은 "0" 값(즉,  $h_{2n-1} = 0, n=1,2,3$ )을 갖는다. 식 (30)에서 주어진  $Q_4(z)$ 의 주파수 응답은 식 (13)의  $Q_4(\omega) = Q_3(\omega)_{LHBP} + A_4(\omega)$ 로 표현되므로, 식 (14)와 식 (15)를 사용하여  $Q_3(\omega)_{LHBP}$ 와  $A_4(\omega)$ 를 표현하면 다음과 같이 얻어진다.

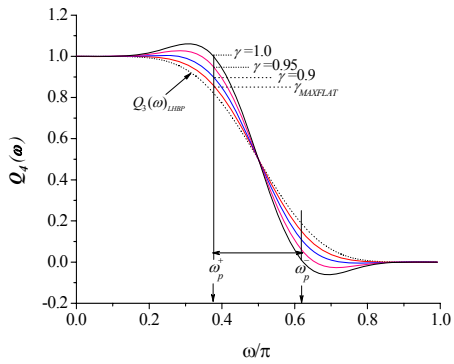
$$Q_3(\omega)_{LHBP} = \left( \cos \frac{\omega}{2} \right)^6 \left\{ 1 + 3 \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^2 + 6 \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^4 \right\} \quad (31)$$

$$A_4(\omega) = -h_0 2^6 (\cos \omega) (\sin \omega)^6 \quad (32)$$

그때,  $h_{0,\gamma}$ 는  $K=4$ 를 식 (22)에 대입함으로써 아래와 같이 얻어진다.



(a)



(b)

그림 3.  $K=4$ 일 때,  $\gamma$ 에 따른 주파수 응답 : (a)  $A_4(\omega)$  (b)  $Q_4(\omega)$

Fig. 3. The frequency responses due to  $\gamma$  for a given  $K=4$  : (a)  $A_4(\omega)$  (b)  $Q_4(\omega)$ .

$$h_{0,\gamma} = -\frac{\sqrt{7^7}}{2^{10} \cdot 3^3} \left\{ \gamma - Q_3(\omega_p^+)_{LHBP} \right\} \quad (33)$$

여기서  $K=4$  선택은 식 (16)과 (31)로부터  $\omega_p^+ = 0.3766\pi$ 와  $Q_3(\omega_p^+)_{LHBP} = 0.8220$ 을 제공한다.

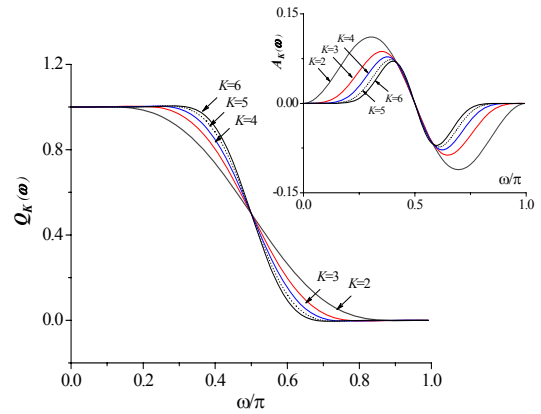
제안된 방법의 타당성을 설명하기 위해서  $\gamma = MAXFLAT, 0.9, 0.95, 1.0$ 인 네 개의  $h_{0,\gamma}$ 들을 사용한  $g$ -LHBP 필터들의 성능을 평가 하였으며, 이때  $\gamma = MAXFLAT$ 는 식 (8)의 사용을 의미 한다 (즉,  $\gamma_{MAXFLAT} = 0.8592$ 을 식 (33)에 대입하는 것과 같은  $h_{0,\gamma} = h_0 = -d_{4,3}/2^{14}$ 이 된다). 그림 3은 네 개의  $h_{0,\gamma}$  값들에 따른  $A_4(\omega)$ 와  $Q_4(\omega)$ 을 나타낸 것이며 이와 관련된 파라미터들은 표 1에 정리하였다. 그림 3과 표 1에서 보인 바와 같이 식 (30)의  $h_{0,\gamma}$  제어는  $g$ -LHBP 필터 천이대역의 경사도를 상대적으로 가파르게 제공함과 더불어 진폭왜곡이 주어진 범위 내에서 일정하게 증

표 1. 그림 3과 관련된 파라미터  
Table 1. Related Parameters of Fig. 3.

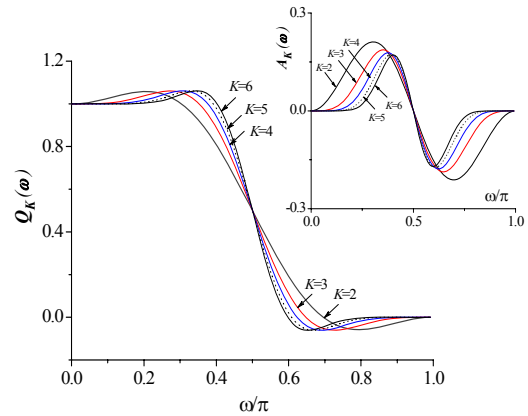
파라미터	다양한 $\gamma = Q_4(\omega_p^+)$ 에 따른 네 개의 $g$ -LHBP 필터의 특성				관계공식
	$\gamma_{MAXFLAT} = 0.8592$	$\gamma = 0.9$	$\gamma = 0.95$	$\gamma = 1.0$	
필터 차수	14 ( $K=4$ )				$4K-2$
$\omega_p^+/\pi$	0.3766				(16)
$\omega_p^-/\pi$	0.6234				(16)
$Q_3(\omega_p^+)_{LHBP}$	0.8220				(31)
$Q_3(\omega_p^-)_{LHBP}$	0.1780				(31)
$h_{0,\gamma}$	-0.00122070	-0.00584116	-0.00122070	-0.00584116	(8), (33)
$A_4(\omega_p^+)$	0.0372	0.0780	0.1280	0.1780	(32)
$A_4(\omega_p^-)$	-0.0372	-0.0780	-0.1280	-0.1780	(32)
$Q_4(\omega_p^+)$	0.8592	0.9000	0.9500	1	(13)
$Q_4(\omega_p^-)$	0.1408	0.1000	0.0500	0	(31)+ (32)
$\omega_d^+/\pi$	0	0.2335	0.2847	0.3079p	(24)
$\omega_d^-/\pi$	1	0.7665	0.7153	0.6921p	(24)
$Q_3(\omega_d^+)_{LHBP}$	1	0.9826	0.9516	0.9288	(31)
$Q_3(\omega_d^-)_{LHBP}$	0	0.0174	0.0484	0.0712	(31)
$A_4(\omega_d^+)$	0	0.0219	0.0757	0.1322	(32)
$A_4(\omega_d^-)$	0	-0.0219	-0.0757	-0.1322	(32)
$Q_4(\omega_d^+)$	1	1.0045	1.0273	1.0610	(13)
$Q_4(\omega_d^-)$	0	-0.0045	-0.0273	-0.0610	(31)+ (32)
$slope_{4,\gamma}/\pi$	-2.9117	-3.2421	-3.6474	-4.0527	(23)
$\delta_{4,\gamma}^{max}$	0	0.0045	0.0273	0.0610	(27)

표 2. K=4 일 때, 두 개의  $g$ -LHBP 필터 계수  
Table 2. Coefficients of the two  $g$ -LHBP filters for K=4.

	식 (8)에 따른 $h_0$ (: $\gamma_{MAXFLAT} = 0.8592$ )	$\gamma = 1.0$ 일 때, 식 (37)에 따른 $h_{0,1.0}$
$g_0$	-0.078124998	-0.373834144
$g_1$	0.468749990	2.243004864
$g_2$	-0.874999974	-5.606346304
$g_3$	-0.218750042	7.469687744
$g_4$	2.406250048	-6.465024320
$h_0$	-0.001220703	-0.005841156
$h_2$	0.011962891	0.035065168
$h_4$	-0.059814453	-0.101398552
$h_6$	0.299072266	0.322174543
$h_7$	0.5	0.5



(a)



(b)

그림 4. 여러 가지 K에 따른  $g$ -LHBP 필터의 주파수 응답 : (a)  $\gamma = 0.9$  (b)  $\gamma = 1.0$

Fig. 4. The frequency responses of  $g$ -LHBP filters due to various  $K$  : (a)  $\gamma = 0.9$  (b)  $\gamma = 1.0$ .

가함을 알 수가 있다(즉,  $0.8592 < \gamma \leq 1.0$ 에서  $0 < \delta_{4,\gamma}^{max} \leq 0.0610$ 이며  $0.2904 < |Slope_{4,\gamma}| \leq 4.0527$ ). 특히,  $\gamma = 0.9$  일 때의  $g$ -LHBP 필터는 MAXFLAT한 LHBP 필터( $\gamma_{MAXFLAT} = 0.8592$ )보다 천이대역의 경사도가 가파른 반면 진폭응답은 거의 유사한 것을 알 수가 있다. 표 2는  $g$ -LHBP 필터들의 계수들을 직접 계산한 예제로서,  $\gamma_{MAXFLAT} = 0.8592$ 와  $\gamma = 1.0$ 일 때 얻어진  $h_{0,\gamma}$ 을 식 (10)과 식 (11)에 대입하여 얻어진  $g_l$ 와  $h_n$ 을 나타낸 것이다. 그림 4는 다양한 K에 대한  $g$ -LHBP 필터들의 설계 예들을 나타낸 것이며, 관련 파라미터는 표 3에 설명하였다. 현재까지 결과를 바탕으로 하였을 때, 고정된 필터 길이에 대한  $\gamma$ 가 증가하면 천이대역 경사면의 가파름이 급격하게 증가하지만 왜곡 ( $\delta_{K,\gamma}^{max}$ )은 매우 조금 증가하는 것을 알 수 있다.



표 3.  $\gamma_{MAXFLAT}$ ,  $\gamma=0.9$  그리고  $\gamma=1.0$  일 때, 그림 4와 관계된 파라미터

Table 3. Related Parameters of Fig. 4 for  $\gamma_{MAXFLAT}$ ,  $\gamma=0.9$  and  $\gamma=1.0$ .

파라미터	$K(4K-2)^{1)}$				
	2(6)	3(10)	5(18)	6(22)	
식 (8)에 따른 MAXFLAT	$h_{0,MAXFLAT}$	-0.03125000	0.05859368	-0.00122070	-0.00006008
	$slope_{K,MAXFL}$	-1.9646	-2.4848	-2.9117	-3.6166
	$\delta_{K,MAXFLAT}^{max}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\gamma=0.9$	$h_{0,0.9}$	-0.03615381	0.00949362	-0.00253885	-0.00018373
	$slope_{K,0.9}/\pi$	-2.0417	-2.7103	-3.2421	-4.1029
	$\delta_{K,0.9}^{max}$	0.0018	0.0040	0.0045	0.0049
$\gamma=1.0$	$h_{0,1.0}$	-0.06862376	0.02041182	0.00162649	-0.00044455
	$slope_{K,1.0}/\pi$	-2.5521	-3.3879	-4.6222	-5.1287
	$\delta_{K,1.0}^{max}$	0.0581	0.0605	0.0613	0.0614

1)  $K(4K-2)$ 는 필터의 차수를 의미하며 필터의 파라미터와 관련이 있다.  $K=4$  일 경우는 표 1에 표현되어 있다.

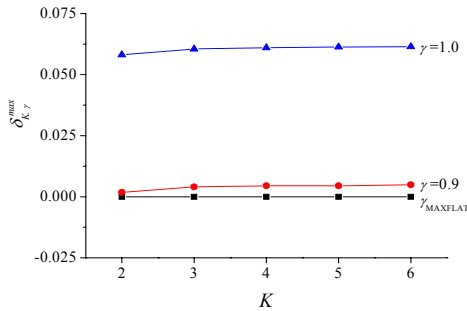
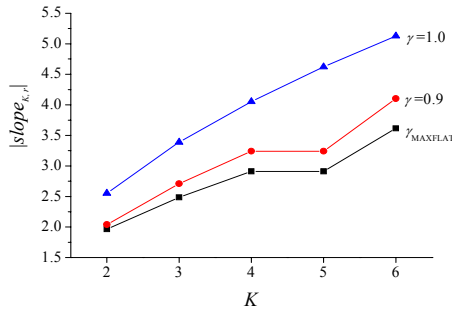


그림 5. 주어진  $K$ 와  $\gamma$ 에 따른 성능평가 (표 3에 따른) : (a)  $|slope_{K,\gamma}|$  (b)  $\delta_{K,\gamma}^{max}$

Fig. 5. The performance comparison (from Table 3) for a given  $K$  and  $\gamma$  : (a)  $|slope_{K,\gamma}|$  (b)  $\delta_{K,\gamma}^{max}$ .

또한 고정  $\gamma$ 에 대하여  $K$ 가 증가하게 되면 g-LHBP 필터의 천이대역의 경사도가 급격한 가파름을 갖는 반면 진폭왜곡은 급격히 감소함을 알 수가 있어 제안 방식이 더 큰 효과를 제공한다는 것이 입증된다 (그림 5 참조).

## V. 결론

폐쇄형 다항식을 이용한 FIR 하프밴드 필터들의 설계는 필터 길이를 증가시키는 것 외에 주파수 응답을 제어하는 파라미터가 없어 넓은 천이대역의 문제를 발생시킨다. 본 논문에서는 천이대역의 경사도를 제어할 수 있는 FIR 하프밴드 필터 설계 방법을 제안하였다. 이를 위하여 0-번째 계수인  $h_0$ 를 파라미터화한 일반화된 라그랑지 하프밴드 다항식을 제안하였으며,  $h_0$ 를 천이대역 경사도를 제어할 수 있는 파라미터로 모델링하고 수학적으로 증명하였다. 또한 폐쇄형 다항식의 설계 파라미터들과 필터 계수들의 직접적이고 간단한 연산을 위해 새로운 공식을 제공하였다. 본 논문에서 제시한 예시들을 통하여 제안된 방식이 기존의 방법들에서 발생하는 설계의 문제들을 해결할 수 있음을 증명하였다.

### 부록 A: g-LHBP 유도

식 (2)에서 주어진  $4K-2 (= 2N)$  차수의 FIR 하프밴드필터 전달함수는 아래와 같이 표현될 수가 있다.

$$Q_K(z) = h_0 z^{-(2K-1)} + h_2 z^{-(2K-3)} + \dots + h_{2K-4} z^{-3} + h_{2K-2} z^{-1} + 0.5 + h_{2K-2} z + h_{2K-4} z^3 + \dots + h_2 z^{2K-3} + h_0 z^{2K-1} \quad (A.1)$$

위 식 (A.1)에 식 (6)의 평탄 조건을 적용하고(즉,  $z=-1$ 에서  $2(K-1)$  개의 제로들을 갖음) 라그랑지 중첩 다항식을 사용하였을 때<sup>[16, 17]</sup>,  $Q_K(z)$ 는 식 (3)과 유사한 재귀 관계가 성립한다고 하면  $Q_K(z)$ 는  $Q_{K-1}(z)_{LHBP}$ 와 목적 함수인  $A_K(z)$ 을 이용하여 표현 할 수 있다.

$$Q_K(z) = Q_{K-1}(z)_{LHBP} + A_K(z) \quad (A.2)$$

여기서  $Q_{K-1}(z)_{LHBP}$ 는  $4K-6$  차수의 LHBP 필터로서 식 (3)으로부터 얻어진다.

$$Q_{K-1}(z)_{LHBP} = z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(k-1)} \times \sum_{\ell=0}^{K-2} d_{K-1,\ell} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^\ell \quad (A.3)$$

그리고 두 개의 미지계수(unknown coefficient)  $c_{K-1}$  과  $c_K$  사용하여  $A_K(z)$ 를 아래 식과 같이 정의하도록 하자.

$$A_K(z) = z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(k-1)} \left\{ c_{K-1} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^{K-1} + c_K \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^K \right\} \quad (A.4)$$

식 (A.3)과 (A.4)를 식 (A.2)에 적용하였을 때  $Q_K(z)$ 는  $c_{K-1}$ 과  $c_K$  사용하여 아래와 같이 다시 표현될 수가 있다.

$$Q_K(z) = z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(k-1)} \left\{ \sum_{\ell=0}^{K-2} d_{K-1,\ell} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^\ell + c_{K-1} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^{k-1} + c_K \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^k \right\} \quad (A.5)$$

식 (A.5)을 식 (9)의 폐쇄형의 일반해로 변환시키기 위하여 식 (A.6)의 변환 식을 식 (A.5)에 적용하고.

$$\left. \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^\ell \right|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{2^{2\ell}} \left\{ \binom{2\ell}{\ell} + 2 \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^j \binom{2\ell}{\ell-j} \frac{z^j + z^{-j}}{2} \right|_{z=e^{j\omega}} \right\} \quad (A.6)$$

이 식을 간소화 하면,  $c_{K-1}$ 과  $c_K$  표현되는 중첩계수  $g_\ell$ 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$g_\ell = (-1)^{K-\ell} \sum_{j=2}^{\ell} \frac{d_{K-1,K-j}}{2^{2(K-j)}} \binom{2(k-j)}{\ell-j} + (-1)^{K-\ell} \left\{ \frac{c_{K-1}}{2^{2(K-1)}} \binom{2(K-1)}{\ell-1} + \frac{c_K}{2^{2K}} \binom{2K}{\ell} \right\} \quad (A.7)$$

이 때 식 (A.7)와 식 (11b)의 공식으로 부터  $g_0, g_1, h_0$  그리고  $h_1$ 는 아래와 같이 각각 주어진다.

$$g_0 = (-1)^K \frac{c_K}{2^{2K}} \quad (A.8)$$

$$g_1 = (-1)^{K-1} \left\{ \frac{c_{K-1}}{2^{2(K-1)}} + \frac{c_K}{2^{2K}} \binom{2K}{1} \right\}$$

$$h_0 = \frac{g_0}{2^{2(K-1)}} \quad (A.9)$$

$$h_1 = \frac{1}{2^{2(K-1)}} \left\{ \binom{2(K-1)}{1} g_0 + g_1 \right\} = 0$$

여기서  $h_{2n-1}'s = 0$ 으로부터  $h_1 = 0$  결과는 식 (A.1)에 나타난 바와 같이 하프밴드 필터의 특성이다.  $c_{K-1}$ 와

$c_K$ 을 구하기 위하여 식 (A.8)을 식 (A.9)에 대입하여 방정식을 풀면 다음과 같은 결과를 얻을 수가 있다.

$$c_{K-1} = (-1)^{K-1} 2^{4K-3} h_0 \quad (A.10)$$

$$c_K = (-1)^{K-1} 2^{4K-2} h_0 \quad (A.11)$$

위의 결과들을 식 (A.4), 식 (A.5) 그리고 식 (A.7)에 각각 대입하면 다음과 같은 공식들이 얻어진다.

$$A_K(z) = (-1)^{K-1} 2^{4K-2} h_0 z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(K-1)} \times \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^{K-1} - \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^K \right\} \quad (A.12)$$

$$Q_K(z) = z^{K-1} \left( \frac{1+z^{-1}}{2} \right)^{2(K-1)} \times \left\{ \sum_{\ell=0}^{K-2} d_{K-1,\ell} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^\ell + (-1)^{K-1} 2^{4K-2} h_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^{K-1} - \left( \frac{2-z-z^{-1}}{4} \right)^K \right] \right\} \quad (A.13)$$

$$g_\ell = (-1)^{K-\ell} \sum_{j=2}^{\ell} \frac{d_{K-1,K-j}}{2^{2(K-j)}} \binom{2(K-j)}{\ell-j} + (-1)^{2K-1-\ell} 2^{2K-1} h_0 \left\{ \binom{2(K-1)}{\ell-1} - \frac{1}{2} \binom{2K}{\ell} \right\} \quad (A.14)$$

$$= (-1)^{K-\ell} \sum_{j=2}^{\ell} \frac{d_{K-1,K-j}}{2^{2(K-j)}} \binom{2(K-j)}{\ell-j} + (-1)^{\ell+1} 2^{2K-1} h_0 \left\{ \binom{2(K-1)}{\ell-1} - \frac{1}{2} \binom{2K}{\ell} \right\}$$

## REFERENCES

- [1] J. F. Kaiser, "Design subroutine (MXFLAT) for symmetric FIR low pass digital filters with maximally-flat pass and stop bands," in: *Program for Digital Signal Processing*, New York: IEEE Press, pp. 5.3-1-5.3-6, 1979.
- [2] P. P. Vaidyanathan, "Efficient and multiplierless design of FIR filters with very sharp cutoff via maximally flat building blocks," *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-32, pp. 236-244, 1985.
- [3] P. P. Vaidyanathan, "Optimal design of linear phase FIR digital filters with very flat passbands and equiripple stopbands," *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-32, pp. 904-917, 1985.

- [4] Joonhyeon Jeon, "A design method of linear phase FIR filters with MAXFLAT and MAXSHCUT frequency characteristics", Journal of The Institute of Electronics Engineers of Korea, vol. 44, no. 3, pp. 105-112, May 2007.
- [5] O. Herrmann, "On the approximation problem in nonrecursive digital filter design," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, pp. 411-413, 1971.
- [6] J. A. Miller, "Maximally flat nonrecursive digital filters," *Electron. Lett.*, vol. 8, pp. 157-158, 1972.
- [7] L. Rajagopal and S. C. Dutta Roy, "Design of maximally-flat FIR filters using the Bernstein polynomial," *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-34, pp. 1587-1590, 1987.
- [8] M. U. A. Bromba and H. Ziegler, "Explicit formula for filter function of maximally flat nonrecursive digital filters," *Electron Lett.*, vol. 16, pp. 905-906, 1980.
- [9] P. Thajchayapong, M. Puangpool and S. Banjongjit, "Maximally flat f.i.r filter with prescribed cutoff frequency," *Electron. Lett.*, vol. 16, pp. 514-515, 1980.
- [10] B. C. Jinaga and S.C. Dutta Roy, "Coefficients of maximally flat low and high pass non-recursive digital filters with specified cut-off frequency," *Signal Process.*, vol. 9, pp. 121-124, 1985.
- [11] J. Jeon and D. Kim, "Design of nonrecursive FIR filters with simultaneously MAXFLAT magnitude and prescribed cutoff frequency," *Digital Signal Process.*, vol. 22, pp. 1085-1094, 2012.
- [12] S. C. Pei and P. H. Wang, "Closed-form design and efficient implementation of generalized maximally flat half-band FIR filters," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 7, pp. 149-151, 2000.
- [13] M. M. J. Yekta, "Equivalence of the Lagrange interpolator for uniformly sampled signals and the scaled binomially windowed shifted sinc function," *Digital Signal Process.*, vol. 19, pp. 838-842, 2009.
- [14] R. Ansari, C. Guillemot and J.F. Kaiser, "Wavelet construction using Lagrange halfband filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 38, pp. 1116-1118, 1991.
- [15] G. Anbarjafari and H. Demirel, "Image Super Resolution Based on Interpolation of Wavelet Domain High Frequency Subbands and the Spatial Domain Input Image," *ETRI Journal*, vol. 32, pp. 390-394, 2010.
- [16] Joonhyeon Jeon, "Design of closed-form QMF filters with maximally flat and half-band characteristics in the frequency domain", Journal of The Institute of Electronics Engineers of Korea, vol. 44, no. 7, pp. 70-77, July 2007.
- [17] I. R. Khan and R. Ohba, "Efficient design of halfband low/high pass FIR filters using explicit formulas for tap coefficients," *IEICE Trans. Fundament.*, E83-A, pp. 2370-2373, 2000.
- [18] I. R. Khan, "Flat magnitude response FIR halfband low/high pass digital filters with narrow transition bands," *Digital Signal Process.*, vol. 20, pp. 328-336, 2010.

---

 저 자 소 개
 

---



봉 정 식(학생회원)

2003년 2월 호서대학교 정보통신 공학과 학사졸업.

2005년 8월 동국대학교 네트워크관리학과 공학석사

2005년 9월~현재 동국대학교 정보통신공학 전공 박사과정

&lt;주관심분야 : 신호처리, 디지털필터, 대역분할부호화등&gt;



전 준 현(평생회원)-교신저자

1984년 동국대학교 전자공학과 학사졸업.

1986년 한국과학기술원 전기 및 전자 공학석사 졸업.

1991년 한국과학기술원 전기 및 전자 공학박사 졸업.

1991년~1999년 한국통신 인터넷 연구실장 및 사업부장

2000년~2001년 한누리투자증권 리서치팀 이사

2000년~2001년 CJ 드림라인 전무

2001년~현재 동국대학교 정보통신공학전공 교수

&lt;주관심분야: 의료영상처리, 신호처리, 디지털필터 에너지저장 등&gt;