

민들린 평판의 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석

이 승 욱¹ · 조 선 호^{1*}

¹서울대학교 조선해양공학과 아이소-지오메트릭 최적설계 창의연구단

Isogeometric Shape Design Sensitivity Analysis of Mindlin Plates

Seung-Wook Lee¹ and Seonho Cho^{1*}

¹National Creative Research Initiatives(NCRI) Center for Isogeometric Optimal Design, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Korea

Abstract

In this paper, a shape design sensitivity analysis(DSA) method is presented for Mindlin plates using an isogeometric approach. The isogeometric method possesses desirable advantages; the representation of exact geometry and the higher order inter-element continuity, which lead to the fast convergence of solution as well as accurate sensitivity results. Unlike the finite element methods using linear shape functions, the isogeometric method considers the exact normal vector and curvature of the CAD geometry, taking advantages of higher order NURBS basis functions. A selective reduced integration(SRI) technique is incorporated to overcome the difficulty of 'shear locking' phenomenon. This simple technique is surprisingly helpful for the accuracy of the isogeometric shape sensitivity without complicated formulation. Through the numerical examples of plate bending problems, the accuracy of the proposed isogeometric analysis method is compared with that of finite element one. Also, the isogeometric shape sensitivity turns out to be very accurate when compared with finite difference sensitivity.

Keywords : Shape design sensitivity analysis, Isogeometric method, Mindlin plate, NURBS basis function

1. 서 론

아이소-지오메트릭 해석(IGA: Isogeometric Analysis)은 근래에 활발히 연구되는 수치해석 방법들 중에서 기존의 유한요소해석(FEA: Finite Element Analysis)을 대체할 수 있는 잠재력을 지닌 기법으로 Hughes 등(2005)에 의해 제안되었다. 아이소-지오메트릭 해석법에서는 수학적 모델을 해석하기 위하여 유한요소법의 노드와 형상함수를 사용하지 않고, CAD에서 사용된 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) 형상함수와 조정점을 응답해석에 그대로 적용한다. 이는 유한요소법이 가지고 있지 않은 여러 장점들을 가지고 있다. 기존의 유한요소법은 요소들 사이에서 C^0 연속성을 가지고 있는 반면에 아이소-메트릭 기법은 p 차 NURBS 기저함수에 대해 C^{p-1} 연속성을 가지고 있다. 그리고 아이소-지오메트릭 해석은 해석할 모델을 정확하게 표현할 수 있지만 기존의 유한요소법은 Piecewise 선형 보간법을 사용하여 모델을 나타낸다. 이

러한 사실 때문에 기존의 유한요소법에서는 정확한 법선벡터와 곡률을 계산하기 어려운 반면 아이소-지오메트릭 기법은 이러한 항들을 정확하게 계산할 수 있다(Cho and Ha, 2010). 이것뿐만 아니라 아이소-지오메트릭 기법은 간단한 정밀화 기술과 기저함수의 차수를 쉽게 올리는 것 등의 여러 가지 장점들을 가지고 있다. 이러한 장점들을 이용해서 진동(Bazilevs *et al.*, 2007)과 유체(Cottrell *et al.*, 2006) 등 다양한 분야에 적용되고 있다.

후판에 대한 형상 설계민감도 해석에 대해서는 여러 연구자들에 의해 진행된 바 있으며 준 해석적(Semi-analytical) 형상 설계민감도는 Oral(2000)에 의해 제안되었다. 여기서 후판에 대한 혼합-응력(Hybrid-stress) 유한요소법을 제시하였으며, 급수 전개에서 고차 항까지 설계민감도 계산에 적용함으로써, 기존의 준 해석적 형상 설계민감도의 단점을 극복하려고 시도하였다. 판과 셸 구조의 형상 설계민감도에 대한 연구(Kim *et al.*, 2002)는 다양한 분야에서 수행되어 왔

* Corresponding author:

Tel: +82-02-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr

Received June 28 2013; Revised July 30 2013;

Accepted July 31 2013

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

으나 아이소-지오메트릭 설계민감도 해석으로의 확장은 아직 수행되지 않는 실정이다.

이 논문에서는 유한차분법에 의한 준 해석적 방법 대신에, 물질 도함수(Material derivative) 개념을 도입한 해석적인 형상 설계민감도를 아이소-지오메트릭 이산화를 통해 계산한다. 이를 통해 위에 언급한 아이소-지오메트릭 방법의 장점들이 적용되며, 따라서 기존의 유한요소법이 가지고 있는 부정확한 모델링의 한계를 극복할 수 있을 뿐만 아니라 고차 형상정보가 정확하게 고려되어 정확한 설계민감도 계산을 수행할 수 있다.

2. 아이소-지오메트릭 해석

1차원 문제에 대해 노트 벡터는 파라메트릭 좌표들의 집합인 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 같이 구성된다. 여기서 p 는 기저함수의 차수이며, n 는 조정점의 개수이다. 이로부터 B-spline 기저함수를 구성할 수 있으며 차수 $p=0$ 일 때는 다음과 같다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

차수가 0보다 클 때는 기저함수는 다음과 같이 Cox-de Boor 순환식을 사용하여 구성된다.

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

B-Spline 기저함수를 사용하여 p 차 NURBS 기저함수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_i N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (3)$$

여기서, w_i 는 각각의 NURBS에 대해서 i 번째 가중치이다. p 차 NURBS 기저함수 $R_i^p(\xi)$ 와 조정점 \mathbf{P}_i 를 사용하여 NURBS 곡선을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i \quad \mathbf{P}_i \in R^d \quad (4)$$

이와 같이 NURBS 곡선은 식 (5)와 같이 표현될 수 있으

며, 기저함수는 식 (6)과 같이 텐서 곱에 의해 표현된다.

$$S(\Xi) = \sum_I W_I(\Xi) B_I \quad (5)$$

$$W_I(\Xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) \times M_{j,q}(\eta) w_{ij}}{\sum_{i,j} N_{i,p}(\xi) \times M_{j,q}(\eta) w_{ij}} \quad (6)$$

3. 형상 설계민감도 해석

3.1 물질 도함수(Material Derivative)

Fig. 1과 같이 초기 영역 Ω 에서 설계 변경된 영역 Ω_τ 로의 변화를 고려하자.

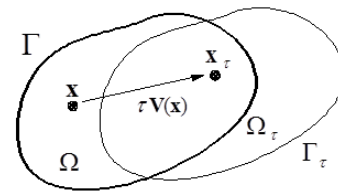


Fig. 1 Material Derivative

변환식 T 는 매개변수 τ 로 표현될 수 있다고 할 때 $\mathbf{x}_\tau = T(\mathbf{x}, \tau)$ 와 $\Omega_\tau = T(\Omega, \tau)$ 는 매핑(Mapping) $T: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_\tau, \mathbf{x} \in \Omega$ 를 구성한다. 여기서 설계 속도장은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \frac{d\mathbf{x}_\tau}{d\tau} = \frac{dT(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \quad (7)$$

$\mathbf{z}_\tau(\mathbf{x}_\tau)$ 가 변형된 영역 Ω_τ 에서 다음과 같은 식의 부드러운 해라고 가정하자.

$$\begin{aligned} A\mathbf{z}_\tau &= \mathbf{f}, \mathbf{x} \in \Omega_\tau \\ \mathbf{z}_\tau &= 0, \mathbf{x} \in \Gamma_\tau \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, A 는 구조 문제에서의 미분연산자이다. 변환식을 선형 매핑 $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x})$ 로 가정하면 $\mathbf{x} \in \Omega$ 에서 해의 Point-wise material derivative는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{z}} \equiv \frac{d}{d\tau} \mathbf{z}_\tau(\mathbf{x} + \tau \mathbf{V}(\mathbf{x}))|_{\tau=0} = \mathbf{z}' + \nabla \mathbf{z}^T \mathbf{V} \quad (9)$$

여기서, \mathbf{z}' 은 \mathbf{z} 의 편미분 항이며, $\Delta \mathbf{z}$ 는 \mathbf{z} 의 기울기(Gradient)이다. 영역 범함수(Domain functional) ψ_1 와 경계 범함수(Boundary functional) ψ_2 를 성능함수로 두면 다음

과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_1 = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (10)$$

$$\psi_2 = \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (11)$$

식 (10)과 (11)을 형상설계 매개변수 τ 에 대하여 1차 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\psi'_1 = \int_{\Omega} [f'(\mathbf{x}) + \text{div}\{f(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x})\}] d\Omega \quad (12)$$

$$\psi'_2 = \int_{\Gamma} [g'(\mathbf{x}) + \{(\nabla g(\mathbf{x})^T \mathbf{n} + \kappa g(\mathbf{x})) V^T\}_n] d\Gamma \quad (13)$$

여기서, $\kappa = \text{div} \mathbf{n}$ 는 Γ 의 곡률이다.

3.2 후판 판의 아이소-지오메트릭 형상민감도 해석

형상 설계민감도는 평형 방정식에 대한 변분으로부터 유도된다. 3차원 공간에서 후판에 대한 변분방정식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^m \epsilon_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{kl}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega + \int_{\Omega} C_{ijkl}^b \chi_{ij}(\mathbf{z}) \chi_{kl}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (14)$$

$$+ \int_{\Omega} C_{ij}^s \gamma_i(\mathbf{z}) \gamma_j(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega = \int_{\Omega} b_k \bar{z}_k d\Omega + \int_{\Gamma} T_k \bar{z}_k d\Gamma$$

여기서, 좌변은 쌍선형(Bilinear) 변형에너지 형태로서 첫 번째 항은 막에너지, 두 번째는 굽힘에너지, 세 번째는 전단 에너지를 의미한다. C_{ijkl}^m , C_{ijkl}^b , C_{ij}^s 은 각각의 항에 대한 재료텐서를 의미한다. 우변은 선형 하중 형태로 b 는 체적 힘(Body force), T 는 접촉력(Traction)을 나타낸다. $\bar{\mathbf{z}}$ 는 아래의 변분 공간에 속하는 가상변위를 나타낸다.

$$\bar{\mathbf{Z}} = \{\bar{\mathbf{z}} \in [H^1(\Omega)]^d : \bar{\mathbf{z}} = 0 \text{ on } \Gamma\} \quad (15)$$

여기서, d 는 차원을 $H^1(\Omega)$ 는 1차의 Sobolev 공간을 의미한다. 식 (14)의 막에너지 항에 대해 형상설계 매개변수에 관한 일차 변분을 취하면, 설계민감도 식은 다음과 같이 유도된다.

$$\left[\int_{\Omega} C_{ijkl}^m z_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega \right]' = \int_{\Omega} C_{ijkl}^m z'_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega \quad (16)$$

$$+ \int_{\Omega} C_{ijkl}^m z_{i,j} \bar{z}'_{k,l} d\Omega + \int_{\Omega} (C_{ijkl}^m z_{i,j} \bar{z}_{k,l})_{,m} V_m d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} (C_{ijkl}^m z_{i,j} \bar{z}_{k,l}) V_{m,m} d\Omega$$

여기서, V 는 실제 속도장이며, z 와 \bar{z} 의 편미분에 대한 도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{z}_i = z'_i + z_{i,m} V_m, \quad \dot{\bar{z}}_i = \bar{z}'_i + z_{i,m} V_m + z_{i,m} V_{m,j} \quad (17)$$

식 (17)을 식 (16)에 대입하고 나머지 항들도 같은 방식을 적용될 수 있다.

$$a^m(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) + a^b(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) + a^s(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = l(\bar{\mathbf{z}}) \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \bar{\mathbf{Z}} \quad (18)$$

또한 식 (18)이 만족한다는 사실을 이용하여 최종적인 형상 설계민감도 식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$a^m(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) + a^b(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) + a^s(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) \quad (19)$$

$$= l'_V(\bar{\mathbf{z}}) - a_V^{m'}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + a_V^{b'}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + a_V^{s'}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$$

여기서, 식 (19)의 각각의 항들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a^m(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ijkl}^m \dot{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega \quad (20)$$

$$a^b(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ijkl}^b \dot{\theta}_{i,j} \bar{\theta}_{k,l} d\Omega \quad (21)$$

$$a^s(\dot{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ij}^s (\dot{z}_{3,i} - \dot{\theta}_i) (\bar{z}_{3,j} - \bar{\theta}_j) d\Omega \quad (22)$$

$$l'_V(\bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} b_{k,m} \bar{z}_k V_m d\Omega + \int_{\Omega} b_k \bar{z}_k V_{m,m} d\Omega \quad (23)$$

$$+ \int_{\Gamma} T_{k,m} \bar{z}_k V_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa (T_k \bar{z}_k) V_m n_m d\Gamma$$

$$a_V^{m'}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ijkl}^m z_{i,n} V_{n,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega + \quad (24)$$

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^m z_{i,j} \bar{z}_{k,n} V_{n,l} d\Omega + \int_{\Omega} C_{ijkl}^m z_{i,j} \bar{z}_{k,l} V_{m,m} d\Omega$$

$$a_V^{b'}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ijkl}^b \theta_{i,n} V_{n,j} \bar{\theta}_{k,l} d\Omega + \quad (25)$$

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^m \theta_{i,j} \bar{\theta}_{k,n} V_{n,l} d\Omega + \int_{\Omega} C_{ijkl}^m \theta_{i,j} \bar{\theta}_{k,l} V_{m,m} d\Omega$$

$$a_V^{s'}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Omega} C_{ij}^s z_{3,n} V_{n,i} (\bar{z}_{3,j} - \bar{\theta}_j) d\Omega \quad (26)$$

$$+ \int_{\Omega} C_{ij}^s z_{3,n} V_{n,j} (z_{3,i} - \theta_i) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} C_{ij}^s (z_{3,i} - \theta_i) (\bar{z}_{3,j} - \bar{\theta}_j) V_{n,n} d\Omega$$

3.3 아이소-지오메트릭 이산화

식 (19)와 같이 표현된 형상 설계민감도는 연속체 형태로

표현된 것으로 실질적으로 구현하기 위해서는 이산화된 형태로 표현할 필요가 있다. 아이소-지오메트릭 기법에서는 이산화 과정에서 응답장(Response field)을 식 (27)과 같이 NURBS 기저함수와 응답계수(Response coefficient)로 나타낸다.

$$z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^{pq}(\Xi) d = \sum_I W_I(\Xi) \mathbf{d}_I \quad (27)$$

여기서, d_{ij} 은 조정점 좌표에서의 응답계수를 의미하며 CP는 조정점의 개수를 의미한다.

형상 설계민감도 해석을 위해서는 설계속도장을 정의해야 하며 아이소-지오메트릭 기법의 경우에는 변경된 NURBS 표면의 기하학적 엄밀성을 유지하기 위해서 설계속도장을 식 (28)을 통해 얻을 수 있다.

$$\mathbf{V}(\Xi) \equiv \frac{d\mathbf{x}_r(\Xi)}{d\tau} = \sum_I W_I(\Xi) \delta \mathbf{B}_I \quad (28)$$

여기서, $\delta \mathbf{B}_I$ 는 조정점의 변경된 양을 의미한다. 식 (27)과 (28)을 이용하여 형상 설계민감도 식 (20)~(22)는 다음과 같이 이산화될 수 있다.

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^m \mathbf{z}_{i,j} \overline{\mathbf{z}}_{k,l} d\Omega = \overline{\mathbf{d}}_I^T \left\{ \int_{\Omega} \sum_{I,K} C_{ijkl}^m W_{I,j}^m W_{K,l}^m d\Omega \right\} \mathbf{d}_K \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^m \theta_{i,j} \overline{\theta}_{k,l} d\Omega = \overline{\mathbf{d}}_I^T \left\{ \int_{\Omega} \sum_{I,K} C_{ijkl}^m W_{I,j}^m W_{K,l}^m d\Omega \right\} \mathbf{d}_K \quad (30)$$

$$\int_{\Omega} C_{ij}^s (\dot{\mathbf{z}}_{3,i} - \dot{\theta}_i) (\overline{\mathbf{z}}_{3,j} - \overline{\theta}_j) d\Omega = \overline{\mathbf{d}}_I^T \left\{ \int_{\Omega} \sum_{I,K} C_{ik}^s W_I^s W_K^s d\Omega \right\} \mathbf{d}_K \quad (31)$$

여기서, \mathbf{d} 는 변위에 대한 형상 설계민감도 계수를 의미하고, $W_{I,j}^m, W_{I,j}^b, W_I^s$ 는 각각의 에너지 형태가 나타내고자 하는 자유도에 부합하는 NURBS 기저함수의 편미분 행렬을 의미한다. 식 (19)의 우변의 항들 또한 아이소-지오메트릭 기법을 이용한 이산화를 통해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_V^m(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}) = \overline{\mathbf{d}}_I^T \left[\int_{\Omega} \sum_{I,K,N} C_{ijkl}^m (W_{I,n}^m W_{K,l}^m W_{N,j}^m + \right. \quad (32)$$

$$\left. W_{L,j}^m W_{K,n}^m W_{N,l} + W_{L,j}^m W_{K,l}^m W_{N,n} \right) V_{n,N} d\Omega \right] \mathbf{d}_K$$

$$a_V^b(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}) = \overline{\mathbf{d}}_I^T \left[\int_{\Omega} \sum_{I,K,N} C_{ijkl}^b (W_{I,n}^b W_{K,l}^b W_{N,j}^b + \right. \quad (33)$$

$$\left. W_{L,j}^b W_{K,n}^b W_{N,l} + W_{L,j}^b W_{K,l}^b W_{N,n} \right) V_{n,N} d\Omega \right] \mathbf{d}_K \quad (34)$$

$$l'_V(\overline{\mathbf{z}}) = \overline{\mathbf{d}}_I^T \left[\int_{\Omega} \sum_{I,M} (b_{k,m} W_I^p W_M^p + b_k W_I^p W_{M,m}^p) V_{m,M} d\Omega + \right. \quad (35)$$

$$\left. \int_{\Gamma} \sum_{I,K,N} (\hat{t}_{k,j} n_j + \kappa \hat{t}_k) \overline{W}_I^p \overline{W}_M^p V_{m,M} n_m d\Gamma \right] \mathbf{d}_K$$

4. 수치 예제

본 논문에서 제안된 아이소-지오메트릭 기법으로 얻은 해와 설계민감도의 정확도를 수학적 해석해와 유한요소 해석결과와 비교하여 입증하였다. 몇 가지 수치 예제를 통해 높은 차수의 기하학적 효과와 정확한 기하 형상에 대한 영향을 살펴본다.

4.1 단순지지된 정사각형 판

Fig. 2에서 보인 바와 같이 단순 지지된 길이 10m, 두께 0.1m인 평판이 균일한 하중 0.01N/m²을 받고 있다. 영률은 100000Pa이며 포아송 비는 0.3이다. 모든 예제는 동일한 물성치를 가진다.

이 문제에서 최대 처짐량에 대한 해석해는 다음과 같다.

$$w = 0.048744 \frac{qa^4(1-\nu^2)}{Eh^3} \quad (36)$$

유한요소법과 아이소-지오메트릭 기법의 최대 처짐량은 Table 1과 2에 나타나 있다. 유한요소망이 덜 세밀화 될수록 아이소-지오메트릭 기법이 유한요소법과 비교해서 더 정확함을 알 수 있다. 유한요소법은 선형 형상함수를 사용하였고 아이소-지오메트릭 방법은 2차 NURBS 형상함수를 채택하였다. 더 높은 차수의 형상함수로 정식화되어졌기 때문에 아이소-지오메트릭 방법이 더 좋은 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다. 유한요소법 역시 2차 형상함수로 정식화될 수 있으나 유한요소법에서 고차 형상함수를 구성하는 것은 복잡

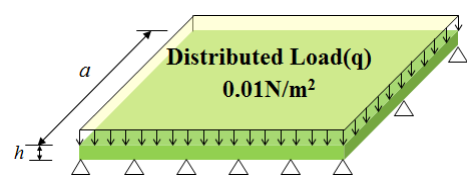


Fig. 2 Simply Supported Square Plate

Table 1 Comparison with analytic solution

Number of Elements	FEA	Analytic Solution	Agreement
25	0.0398552	0.0443352	89.9%
100	0.0449228		99.8%

Table 2 Comparison with analytic solution

Number of Elements	IGA	Analytic Solution	Agreement
25	0.0442575	0.0443352	98.7%
100	0.0443701		99.9%

할 뿐만 아니라 3차 이상의 형상함수는 일반적으로 사용되지 않는다. 그러나 아이소-지오메트릭 기법은 순환식에 의해 형상함수의 차수를 쉽게 올릴 수 있으므로 2차 이상의 고차 형상함수 역시 널리 이용되고 있다.

또한 유한요소법에서 2차 형상함수를 사용했다고 할지라도 요소들 간의 연속성이 C^0 연속성을 가지고 있다. 그러나 아이소-지오메트릭 기법은 고차 형상함수를 사용할 경우에는 요소들 간의 연속성 역시 증가하기 때문에 Table 1과 2에서 아이소-지오메트릭이 더 좋은 결과를 나타낸다고 볼 수 있다.

4.2 구멍이 뚫린 원형 판

Fig. 3과 같이 분포하중이 가해지는 구멍이 뚫린 원형 판에 대하여 변위 해석과 형상 설계민감도 해석을 수행하였다. 내부 구멍의 경계에서는 고정단 경계조건을 부여하고 평면에 수직방향으로 0.01N/m^2 의 균일한 하중을 가하였다.

바깥쪽 원의 반경 a 는 10m이고, 내부 원의 반경은 5m, 두께는 0.1m이다. 이 문제에 대하여 최대 변위와 반경에 대한 설계민감도 식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$w = 0.0938 \frac{qa^4}{Eh^3}, \quad \frac{\partial w}{\partial a} = 0.3752 \frac{qa^3}{Eh^3} \quad (37)$$

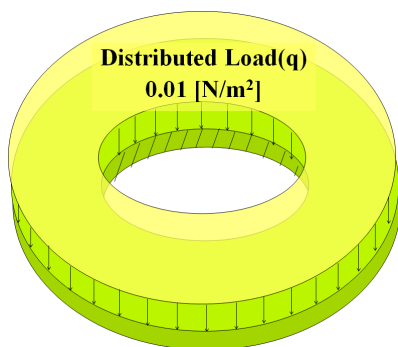


Fig. 3 Circular plate with a hole under distributed loads

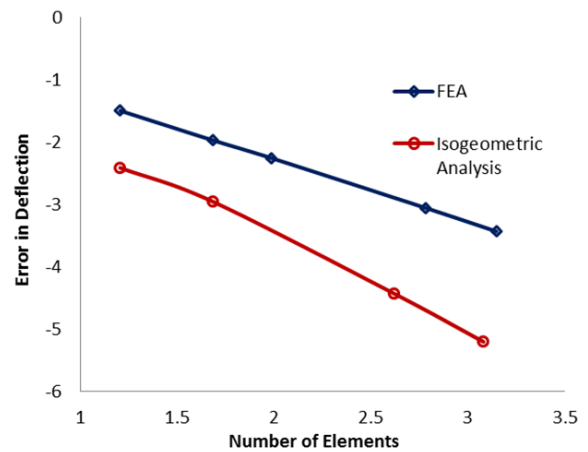


Fig. 4 Convergence Test

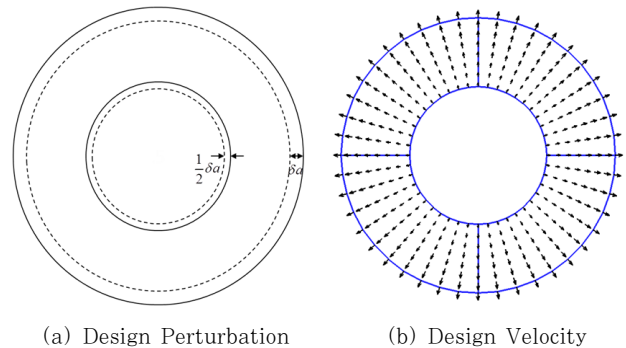


Fig. 5 Design velocity field for sensitivity analysis

수치 해와 해석 해 간의 오차는 Fig. 4에 로그-로그 스케일로 나타내었다. 유한요소법보다 아이소-지오메트릭 기법에서 더욱 정확하고, 빠르게 해가 수렴함을 알 수 있다.

형상 설계민감도 해석을 수행하기 위해서는 설계변경에 따른 설계 속도장이 정의되어야 한다. Fig. 5(a)와 같이 모델의 반경에 대해 0.1% 설계변경을 하였다. 선형 설계 속도장만을 고려하였으며 Fig. 5(b)에 크기와 방향을 벡터로 표시하였다.

Table 3과 4에서는 유한요소법과 아이소-지오메트릭 기법으로 형상 설계민감도 해석을 수행한 것을 유한차분 해와

Table 3 Comparison with finite difference

	Design Sensitivity	Finite Difference Sensitivity	Agreement
FEA	0.033237	0.0332	99.85%
IGA	0.037047	0.0371	99.86%

Table 4 Comparison with analytic solution

	Design Sensitivity	Analytic Sensitivity	Agreement
FEA	0.033237	0.03752	88.59%
IGA	0.037047		98.74%

수학적엄밀해와 각각 비교하였다. 유한요소법과 아이소-지오메트릭 기법 모두 유한차분법에 의한 결과와는 비슷한 일치도를 보이고 있으나 해석적인 설계민감도 값은 아이소-지오메트릭 기법이 더 좋은 정확도를 보이고 있음을 알 수 있다.

아이소-지오메트릭 기법으로 원을 모델링할 때는 기하학적으로 정확하게 원으로 모델을 구성할 수 있으므로 이산화 과정에서 오차가 발생하지 않으나 유한요소법의 경우에는 노드 간의 선형 보간을 통해서 모델을 구성하기 때문에 이산화 과정에서 오차가 필연적으로 발생하고 따라서 부정확한 형상 설계민감도 값이 얻어지게 된다.

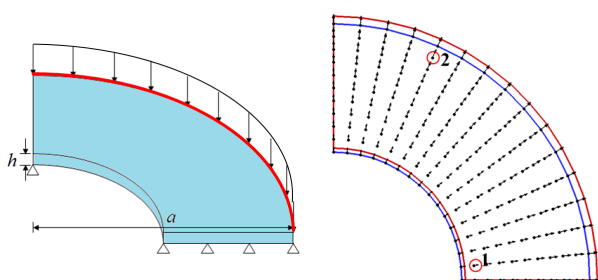
4.3 4분의 1 원환

식 (23)에서 접축력과 관련된 항들을 살펴볼 때 마지막 항에 모델의 경계에 대한 곡률과 법선 벡터에 대한 정보가 들어 있음을 알 수 있다.

$$l'_V(\bar{z}) = \int_{\Omega} b_{k,m} \bar{z}_k V_m d\Omega + \int_{\Omega} b_k \bar{z}_k V_{m,m} d\Omega + \int_{\Gamma} T_{k,m} \bar{z}_k V_m d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa(T_k \bar{z}_k) V_m n_m d\Gamma \quad (23)$$

특히 곡률은 모델 형상을 두 번 미분한 항으로 유한요소법에서 선형 형상함수를 사용할 경우 법선 벡터는 부정확하고 곡률은 사라지게 된다. 그러나 아이소-지오메트릭 기법에서는 고차 형상함수를 사용하고 기하학적인 정보를 엄밀하게 표현할 수 있기 때문에 곡률과 법선 벡터를 정확하게 고려할 수 있다. 이를 수치 예제를 통해 입증하기 위해서 Fig. 6(a)와 같이 바깥 원의 둘레를 따라 균일한 하중을 받는 1/4 원환을 고려하자.

0.01N/m의 균일한 하중이 원환 바깥의 둘레를 따라 가해지고 있다. 바깥 원의 반경은 10m, 내부 원의 반경은 5m, 두께는 0.1m이고 Fig. 6(a)에서와 같이 단순지지 되어 있다. 형상 설계민감도 해석을 위한 설계속도장을 구하기 위하여 모



(a) A quarter Annulus (b) Design Velocity Field
Fig. 6 Design velocity field for sensitivity analysis

델의 반경을 0.1% 정도로 섭동하였다. 설계속도장은 선형적으로 변화하며 Fig. 6(b)에서 벡터장 형태로 표시하였다.

Fig. 6(b)에 표시되어 있는 노트 1, 2의 모든 자유도에 대한 설계민감도를 계산하여 유한차분법과 비교하였을때, Table 5과 같이 매우 부정확한 일치율을 보이고 있음을 알 수 있다. 이것은 모델의 법선벡터가 부정확하고 곡률이 계산되지 않기 때문이다. 이 모델의 요소망을 더욱 세밀화하여 150개 정도 충분한 수의 노트 요소를 사용하여 법선벡터의 정확도를 올리더라도 곡률은 계산되지 않기 때문에 Table 5와 같이 여전히 부정확한 설계민감도가 얻어짐을 알 수 있다. 이는 설계민감도에서 곡률의 영향이 매우 중요하다는 것을 시사한다.

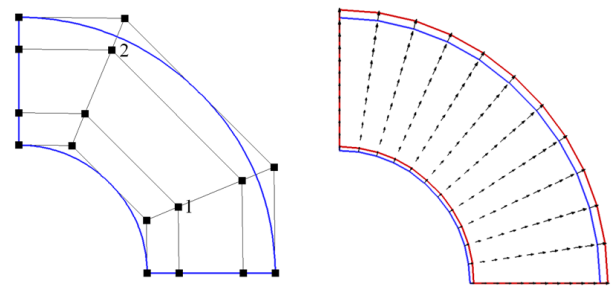
간단한 문제에 대해서는 곡률을 직접 계산할 수 있는데 이 예제의 경우 해석적인 곡률 값은 0.1이다. 이 곡률 값을 직접 설계민감도 식에 대입하여 계산하면 Table 6에서 알 수 있듯이 유한요소법 역시 유한차분법과 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 5 Sensitivity comparison

DOF	FEA	Finite Difference Sensitivity	Agreement
1_Uz	7.7376E-6	1.5496E-5	49.93%
1_θx	6.7485E-6	2.0173E-5	33.45%
1_θy	-5.0447E-7	-1.4996E-6	33.64%
2_Uz	6.9432E-5	1.3941E-4	49.80%
2_θx	8.2829E-6	2.5090E-5	33.01%
2_θy	-2.8343E-6	-8.6389E-6	32.81%

Table 6 Sensitivity comparison including curvature

DOF	FEA	Finite Difference Sensitivity	Agreement
1_Uz	1.5463E-5	1.5496E-5	99.78%
1_θx	2.0134E-5	2.0173E-5	99.81%
1_θy	-1.4968E-6	-1.4996E-6	99.81%
2_Uz	1.3910E-4	1.3941E-4	99.78%
2_θx	2.5042E-5	2.5090E-5	99.81%
2_θy	-8.6224E-6	-8.6389E-6	99.81%



(a) Isogeometric model (b) Design Velocity Field
Fig. 7 Isogeometric DSA model

Table 7 Comparison with finite difference method

DOF	IGA	Finite Difference Sensitivity	Agreement
1. U_z	2.3880E-4	2.3976E-4	99.60%
1. θ_x	4.9981E-5	5.0199E-5	99.56%
1. θ_y	-2.7511E-5	-2.7631E-5	99.56%
2. U_z	4.4131E-4	4.4309E-4	99.60%
2. θ_x	3.0822E-5	3.0957E-5	99.56%
2. θ_y	-6.2993E-5	-6.3269E-5	99.56%

그러나 복잡한 모델일 경우에는 곡률을 직접 계산하기는 어려우므로 형상 설계민감도를 계산할 때 정확한 곡률을 계산하는 수치적인 방법이 필요하다. 형상 설계민감도 해석을 위한 아이소-지오메트릭 모델과 그에 따른 조정점 요소망(control mesh)은 Fig. 7(a)에 확인할 수 있다. 설계 속도장은 Fig. 7(b)와 같이 유한요소 모델과 같은 방식으로 부여하였다.

Fig. 7(a) 제시되어 있듯이 번호로 할당되어 있는 조정점 응답계수(Response coefficient)에 대한 설계민감도를 계산하여 Table 7에서 유한차분법과 비교하였다. 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도와 유한차분 설계민감도가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이는 유한요소법과는 달리 아이소-지오메트릭 기법이 정확한 곡률과 법선 벡터의 고차 기하정보를 잘 고려하고 있음을 보여준다.

5. 결 론

본 논문에서는 아이소-지오메트릭 기법을 사용하여 후판에 대한 형상 설계민감도 해석을 수행하였다. 물질 도함수 개념을 사용하여 후판에 대한 형상 설계민감도 식을 유도하였다. 아이소-지오메트릭 기법을 통해서 이 설계민감도 식을 이산화하여 구한 아이소-지오메트릭 민감도는 수학적으로 엄밀한 설계민감도를 비교하여 유한요소법보다 정확함을 확인하였다. 이는 아이소-지오메트릭 기법이 정확한 기하학적 정보를 표현할 수 있기 때문에 이산화에 따른 기하학적 손실이 없기 때문이다. 또한 접촉력 경계조건을 갖는 모델의 경우, 형상 설계민감도는 모델의 법선벡터와 곡률이 고려되어야 한다. 유한요소법의 경우 곡률이 계산되지 않고 법선벡터 또한 부정확하여 정확한 민감도 값을 계산할 수 없다. 그러나 아이소-지오메트릭 기법의 경우에는 높은 차수의 기하학적 정보의 영향으로 정확한 곡률과 법선벡터가 계산이 가능하며, 결과적으로 정확한 형상 설계민감도를 계산할 수 있다. 이러한 결과를 바탕으로 형상 최적설계 문제에 적용하였을 때 정확

하고 효율적인 최적설계를 수행할 수 있을 것으로 예상된다.

감사의 글

이 논문은 2008, 2010년도 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다(R32-2008-000-10161-0, No. 2010-0018282). 저자들은 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- Ahn, S., Kim, M.G., Cho, S. (2010) Isogeometric Shape Design Optimization of Structures under Stress Constraints, *Journal of Computational Structural Engineering Institute of Korea*, 23(4), pp.275 ~282.
- Bazilevs, Y., Hughes, T.J.R (2007) Weak Imposition of Dirichlet Boundary Conditions in Fluid Mechanics, *Computers and Fluids*, 36(1), pp.12~26.
- Cho, S., Ha, S.-H. (2009) Isogeometric Shape Design Optimization :Exact Geometry, Enhanced Sensitivity, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(1), pp.53~70.
- Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., Hughes, T.J.R (2006) Isogeometric Analysis of Structural Vibrations, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp.5257~5296.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005) Isogeometric Analysis : CAD, FInite Elements NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.4135~4195.
- Kim, N.H., Choi, K.K., Chen, J-S., Botkin, M.E. (2002) Meshfree Analysis and Design Sensitivity Analysis for Shell Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(9), pp.2087~2116.
- Oral, S. (2000) Mindlin Plate Finite Element with Semi-analytical Shape Design Sensitivities, *Computer and Structures*, 78(1), pp.467~472.
- Timoshenko, Stehan, P. Woinowsky-Kringer, S. (1961) Theory of Plates and Shells, Mcgraw-Hill Book Company, p.580.

요 지

본 논문에서는 아이소-지오메트릭 기법을 기반으로 민들린 후판에 대한 형상 설계민감도 해석법을 제시하였다. 아이소-지오메트릭 기법은 정확한 기하학적 형상의 표현, 요소 사이의 높은 연속성 등 바람직한 강점들을 가지고 있으며 궁극적으로는 해석해로의 빠른 수렴성과 정확한 설계민감도를 제공한다. 선형 형상함수를 사용하는 유한요소법과는 달리 아이소-지오메트릭 기법에서는 높은 차수의 NURBS 기저함수를 활용하여 CAD 형상의 법선벡터와 곡률을 정확하게 고려한다. 전단 잠김(Shear locking) 현상을 극복하기 위해서 선택적 감소적분(Selective reduced integration) 기법을 사용하였다. 이 간단한 방법은 복잡한 정식화 과정 없이 정확한 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도 해석을 수행한다. 굽힘 문제에 대한 수치예제를 통하여 제안된 아이소-지오메트릭 해석과 유한요소 해석을 비교하였으며, 유한차분 설계민감도와 비교하여 아이소-지오메트릭 형상 설계민감도는 매우 정확함을 확인하였다.

핵심용어 : 형상 설계민감도 해석, 아이소-지오메트릭 기법, 후판(Mindlin Plate), NURBS 기저함수